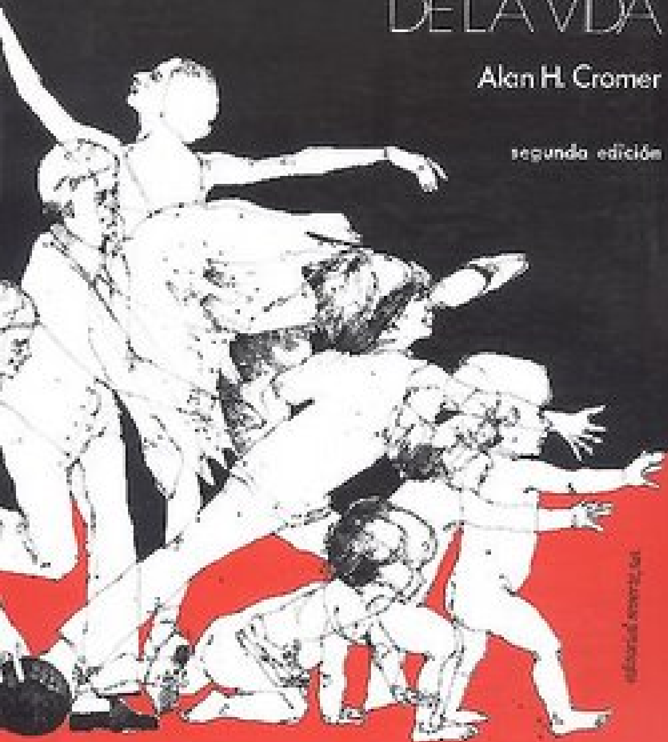
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA

Alan H. Cromer

segunda edición



Índice

Parte 1: Mecanica

Capítulo 1 Medida

La mente humana adscribe muchos atributos diferentes a las personas y a las cosas, tales como longitud, peso, color, belleza y patriotismo. Algunos atributos son fáciles de medir y otros no, ya que existen procedimientos bien definidos para medir la longitud y el peso, pero no la belleza o el patriotismo. [El color es un caso intermedio, pues si bien puede asignarse un valor numérico a cada color (Apart. 15.4), no pueden éstos, en cambio, ordenarse.] La física es el estudio de los atributos medibles de las cosas. Los conceptos básicos de la física se definen en función de las medidas, y el objetivo de las teorías físicas es el de establecer relaciones entre los resultados de las medidas. Una teoría física, cualquiera que sea el modo abstracto de expresarla, es a la larga un enunciado acerca de operaciones concretas llevadas a cabo en un laboratorio.

1.1. LOS ORÍGENES INTELECTUALES DE LA FÍSICA

La física moderna es la confluencia de dos corrientes intelectuales bastante diferentes. Una puede remontarse a los primitivos filósofos del Asia Menor, quienes, según registra la historia, fueron los primeros hombres que se preguntaron acerca de la naturaleza fundamental (*physis*) del mundo material. A menudo su razonamiento era más especulativo que científico, pero estaba libre de toda la mitología que oscurecía las mentes de la mayoría de los hombres de aquel tiempo. En las colonias griegas del Asia Menor (Jonia), especialmente en la ciudad de Mileto, los filósofos Tales (640?-546 a.C.), Anaximandro (610-545 a.C.), Anaxímenes (?-525 a.C.) y otros desarrollaron el concepto de unidad en el mundo físico. Ellos creían que a pesar de las diferencias aparentes entre los objetos materiales tales como rocas, árboles, nubes y caballos, existe una igualdad subyacente a todas las cosas. Cada uno de ellos tenía una idea distinta de la naturaleza de esta esencia universal (Tales pensaba que era el agua y Anaxímenes que el aire), pero su importantísimo concepto de la unidad de la materia persiste aún como doctrina principal de la física de hoy.

Los filósofos jónicos fueron también auténticos hombres de ciencia, y partiendo de los antiguos trabajos de los egipcios y babilonios consiguieron importantes avances en matemáticas, astronomía, geología y biología. Su obra fue continuada en la Grecia continental en el siglo V a.C. y en las ciudades helénicas (en particular Alejandría) en los siglos III y IV a.C. El gran Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) vivió en este último período. Su trabajo en estática e hidrostática es de enfoque muy moderno, y se avanzó tan poco en los 1800 años siguientes que él mismo no habría tenido ninguna dificultad para entender la obra de Galileo (1564-1642 d.C.). De hecho, Arquímedes pudo ser el punto de partida de la segunda corriente de ideas que, junto con la primitiva búsqueda por parte de los griegos de la naturaleza

fundamental de las cosas, constituye la física moderna. Pero, desgraciadamente, la mayor parte de sus escritos estuvieron perdidos para Europa durante mucho tiempo, y así hubo que esperar hasta Galileo para ver surgir de manera clara la segunda corriente.

Galileo fue quien desarrolló el moderno método de estudio de los sistemas simples por medio de la medida experimental y el análisis matemático. Estudió el movimiento de los objetos que se deslizan por planos inclinados y llegó a distinguir las características propias del movimiento de las que no lo son. La característica propia era corrientemente una magnitud medible, tal como la masa del objeto o el tiempo necesario para recorrer una distancia fija. Trató de encontrar la relación entre estas medidas numéricas y de expresar los resultados en términos matemáticos. Resultó que las conclusiones de una de estas investigaciones podían a menudo resumirse de modo muy simple, por ejemplo: La distancia recorrida a lo largo de una pendiente es proporcional al cuadrado del tiempo. Galileo demostró que las leyes de la naturaleza (o al menos algunas de ellas) obedecen a ecuaciones matemáticas simples, y desde entonces los físicos han continuado la búsqueda de relaciones matemáticas entre los resultados de sus medidas.

Así, pues, ¿qué es la física? Es una motivación y un método. La motivación es la misma que la de los griegos: encontrar la naturaleza fundamental de las cosas. Pero el método es el de Galileo: investigar sistemas simples por medio de la experimentación y el análisis matemático. Los problemas que se estudian parecen unas veces pueriles y otras esotéricos: Galileo ponía a rodar bolas por una pendiente, Joule daba vueltas a una rueda de paletas en el agua, Rutherford hacía experimentos con raros elementos radiactivos. Sin embargo, muchas veces los resultados conducen a percepciones claras y profundas de la naturaleza de las cosas, que cumplen el objetivo de los filósofos griegos por caminos que sólo ellos podrían imaginar.

En este libro vamos a estudiar el método de la física y algunos de sus resultados obtenidos en los 400 años transcurridos desde Galileo. Estos resultados son importantes para cualquiera que se interese por la naturaleza de las cosas, puesto que son de aplicación universal en todo el mundo material, incluidos los organismos vivos.

En efecto, como vamos a ver en este libro, la física es esencial para comprender el mecanismo de muchos procesos biológicos, tales como el movimiento del cuerpo, el flujo de la sangre y el habla. Además, quizás el misterio de la vida misma pueda ser algún día comprendido en términos de las leyes fundamentales de la física.

1.2. MEDIDA

La física trata de las cosas que pueden ser medidas. Lo que puede medirse depende en gran manera del estado en que se halla la tecnología. Por ejemplo, la radiación emitida por las sustancias radiactivas no se podía medir antes de descubrir dispositivos para detectar tal radiación. El dominio de la física crece continuamente a medida que los nuevos descubrimientos extienden el campo de posibles medidas. Todas las ciencias cuentan con las medidas hasta cierto punto, pero normalmente la medida es subsidiaria del fin principal. Así, un zoólogo podría medir cuidadosamente el peso de sus ratones experimen-

tales para determinar el efecto de un medicamento sobre su crecimiento. Esta medida es inherente al problema de la función metabólica del medicamento. En física, sin embargo, el objeto de interés primordial es la propia medida. Esto es así porque un determinado concepto, como puede ser la longitud, el tiempo o la temperatura, sólo se entiende en función del método utilizado para medirla. Esta manera de definir las cosas se denomina *operacionalismo*, y su uso evita asignar a un concepto un significado metafísico injustificado e introducir connotaciones extrañas y posiblemente falsas.

Consideremos, por ejemplo, el concepto de longitud. De manera operacional, la longitud de algo se define como el número obtenido cuando se realiza un conjunto de operaciones que recibe el nombre de *medida de su longitud*. Estas operaciones se pueden ilustrar siguiendo los pasos dados al medir la longitud de una habitación:

1. Marcar dos puntos, uno a cada extremo de la habitación, para definir el intervalo exacto a medir (puntos A y B de la Fig. 1.1.*a*).
2. Extender una cinta de agrimensor (bastaría con un trozo de cordel) entre estos dos puntos para definir la línea recta entre ellos.
3. Coger una varilla graduada y ponerla a lo largo de la cinta estirada, con un extremo en el punto A. Marcar donde toca el otro extremo de la varilla (punto C de la Fig. 1.1.*c*) y desplazar la varilla a lo largo de la cinta hasta que el extremo anterior esté alineado con esta marca (Fig. 1.1*d*). Repetir esta operación hasta alcanzar el punto B.
4. Cuando se alcanza el punto B, la varilla estará en la posición que aparece en la Fig. 1.1*e*. Marcar sobre la varilla el punto en que toca a B.
5. La *longitud* (en metros) es el número de marcas sobre la cinta, más la fracción de varilla desde la última marca (E) hasta el punto B.

Vemos que, detallando el procedimiento real utilizado para medir una longitud, nos evitamos tener que decir algo acerca de la naturaleza esencial del espacio o la distancia (lo cual sería metafísica). Longitud es lo que se mide con una regla, y para hacer física no se necesita conocer nada más.

Las medidas se hacen siempre con respecto a un patrón, denominado *unidad*. En nuestro ejemplo, la unidad es el metro, y el resultado final se expresa como tantos metros, pongamos 3,7 m. Ésta se puede convertir en otras unidades si se conoce la longitud del metro en función de estas unidades. Por ejemplo, la conversión de metros a centímetros es

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

de modo que la longitud de la habitación puede expresarse como

$$3{,}7 \text{ m} \times 100 \text{ cm/m} = 370 \text{ cm}$$

la conversión de metros a pies es

$$1 \text{ m} = 3{,}28 \text{ pies}$$

luego la longitud puede expresarse también como

$$3{,}7 \text{ m} \times 3{,}28 \text{ pies/m} = 12{,}1 \text{ pies}$$

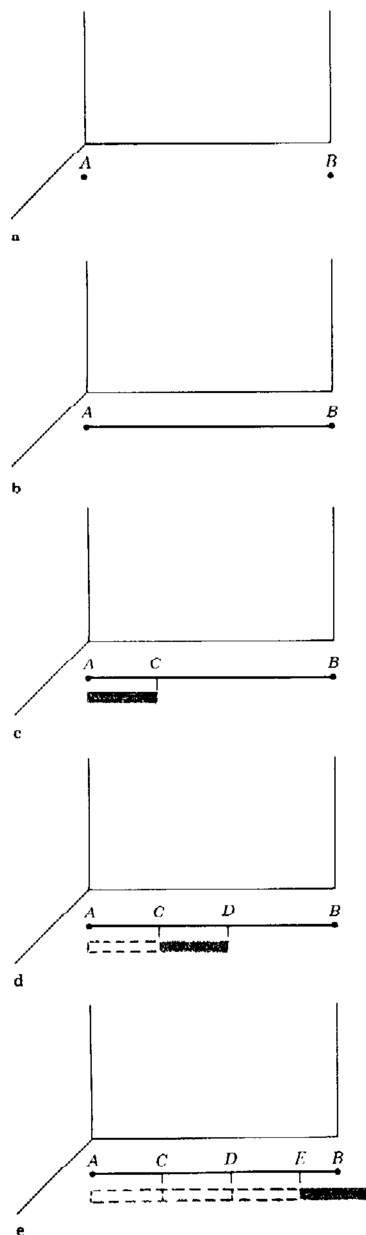


FIGURA 1.1
Pasos necesarios para medir la longitud de una habitación.

Ejemplo 1. Si se sabe que un litro es igual a 0,264 galones, ¿cuántos litros son 20 galones?

Una dificultad corriente al convertir unidades consiste en saber si se divide o se multiplica por el factor de conversión. Para saber cómo se ha de proceder en este caso, escribimos en primer lugar la relación entre litros (l) y galones (gal).

$$1 \text{ litro} = 0{,}264 \text{ gal}$$

Como queremos pasar de galones a litros, hemos de hallar el número de litros por galón dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por 0,264 gal

$$\frac{1 \text{ litro}}{0{,}264 \text{ gal}} = \frac{0{,}264 \text{ gal}}{0{,}264 \text{ gal}}$$

o bien

$$1 = 3{,}79 \text{ l/gal}$$

Por lo tanto, hay 3,79 litros por galón (3,79 l/gal) y

$$20 \text{ gal} = (20 \text{ gal})\ (3{,}79 \text{ l/gal}) = 75{,}8 \text{ l}$$

Obsérvese que si se tratan las unidades como símbolos algebraicos, las unidades correctas aparecen en el resultado final después de algunas simplificaciones.

De manera semejante, para convertir litros en galones se ha de multiplicar el número de litros por el factor

$$1 = 0{,}264 \text{ gal/l}$$

En un tiempo, el metro y el pie fueron los respectivos patrones nacionales de longitud de Francia e Inglaterra. En la actualidad, el metro es el patrón científico de longitud en todos los países y el patrón nacional en la mayoría de ellos, excepto en los Estados Unidos. (Incluso el Reino Unido está llevando a cabo la conversión al sistema métrico.) El sistema métrico se describe en el Apéndice V y las conversiones entre unidades inglesas y métricas aparecen en la página de guarda de la cubierta delantera.

Se dan muchos casos de interés en los que no es posible la medida directa de una longitud por medio de una varilla graduada, y han de utilizarse métodos indirectos. Sin embargo, incluso en una medida indirecta se ha de acudir en algún momento a una medida tipo varilla.

Por ejemplo, para medir la distancia d entre dos puntos A y B en ambas orillas de un río se emplea un teodolito (Fig. 1.2). Se escoge un tercer punto C en la orilla del topógrafo y se dirigen visuales con el teodolito en B y en C para medir los ángulos θ_1 y θ_2 †. La longitud b de la línea base BC se mide con una cadena y una varilla graduada, del modo descrito anteriormente. A partir de estas medidas puede calcularse d utilizando la ley de los senos.

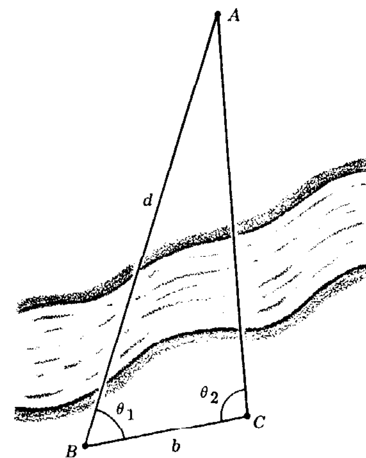


FIGURA 1.2
La distancia d entre los puntos A y B a una y otra orilla de un río se halla midiendo la distancia b y los ángulos θ_1 y θ_2.

† θ es la letra griega theta.

Sin embargo, en este libro evitaremos la trigonometría tanto como nos sea posible, y problemas como éste los resolveremos *gráficamente* haciendo un dibujo a escala.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la distancia d de la fig. 1.2, sabiendo que $b = 0{,}50$ km, $\theta_1 = 80°$, y $\theta_2 = 85°$?

Un dibujo a escala se empieza eligiendo una escala apropiada. En este ejemplo, si $b = 0{,}5$ km, se puede usar la escala

$$10 \text{ cm} = 1 \text{ km}$$

Con esta escala se traza una línea BC de 5 cm de larga. Para dibujar las líneas que forman los ángulos θ_1 y θ_2 desde los puntos B y C se emplea un transportador; las líneas se prolongan hasta que se cortan en el punto A. Por último, se mide la distancia AB con una regla y se hace la conversión inversa a las unidades originales. Por ejemplo, supongamos que se obtiene para AB 19,2 cm. Según nuestra escala, el factor de conversión es 0,1 km/cm, luego

$$19{,}2 \text{ cm} = 19{,}2 \text{ cm} \times 0{,}1 \text{ km/cm} = 1{,}92 \text{ km}$$

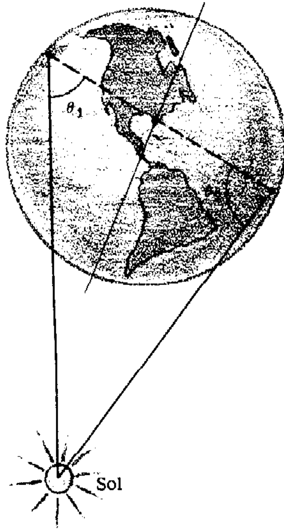


FIGURA 1.3
La distancia al Sol se halla midiendo los ángulos θ_1 y θ_2 desde dos puntos situados sobre la Tierra y cuya separación se conoce.

El método gráfico no es tan exacto como el trigonométrico, pero conceptualmente es mucho más simple y se adapta perfectamente a la mayoría de nuestros fines. Al final de este capítulo se dan algunos problemas de topografía como preparación para los vectores del capítulo siguiente.

Las grandes distancias sobre la Tierra se miden mediante una serie de *triangulaciones* como ésta, e incluso el tamaño de la Tierra se determina esencialmente de este modo. Una vez que se conoce el tamaño de la Tierra, se puede hallar su distancia al Sol midiendo al mismo tiempo el ángulo del Sol desde dos puntos diferentes de la Tierra y empleando como línea base la distancia conocida entre estos puntos (Fig. 1.3). La distancia al Sol se utiliza entonces para medir la distancia a una estrella (cercana) tomando como línea base el diámetro de la órbita Tierra-Sol (Fig. 1.4). De este modo, incluso las medidas astronómicas están relacionadas, a menudo a través de un gran número de pasos intermedios, con una medida directa de distancia hecha con cadena y varilla graduada.

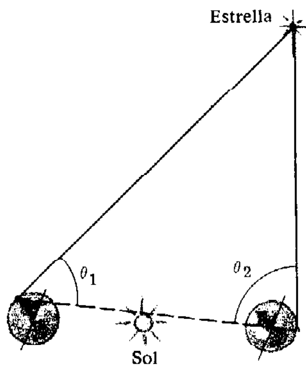


FIGURA 1.4
La distancia a una estrella se halla utilizando el diámetro de la órbita Tierra-Sol como línea base.

Otros conceptos necesitan otros métodos de medida. El tiempo es particularmente sutil. Para medir el tiempo es necesario un dispositivo que repita de manera continua cierto suceso, de tal modo que el intervalo entre dos sucesos pueda tomarse como la unidad de tiempo. Para este fin resulta muy conveniente la rotación de la Tierra sobre su eje, y la unidad de tiempo sería el día sideral, es decir, el tiempo que tarda una determinada estrella en pasar por el cenit en dos noches sucesivas. (Este no es igual al día solar medio, o de 24 horas, que es el tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el cenit promediado sobre el año.)

Los relojes son dispositivos mecánicos construidos para repetir un suceso una y otra vez. Se calibran comparándolos con la rotación de la Tierra, y las discrepancias entre el reloj y la Tierra se atribuyen a inexactitudes en uno u otra. Los relojes atómicos son más exactos

que la Tierra, la cual no gira con absoluta uniformidad debido a la fricción de las mareas.

La unidad normal de tiempo es el *segundo* (s), que es 1/86 400 del día solar medio en el año 1900. Éste no es igual a 1/86 400 de un día cualquiera de 24 horas porque la velocidad de rotación de la Tierra ha cambiado desde 1900. La Tierra, al igual que un reloj, se retrasa un poco, y para corregir esto se añadió un segundo extra al día 30 de julio de 1972.*

La longitud y el tiempo son dos dimensiones fundamentales en la Física. Solamente introduciremos otras tres dimensiones fundamentales (masa, temperatura y carga); todas las demás se definirán en función de éstas. Por ejemplo, la velocidad (media) v de un automóvil en una carrera es la distancia d recorrida por el automóvil (obtenida midiendo la pista de carreras y el número de vueltas efectuadas) dividida por el tiempo total empleado (medido con un cronógrafo). En general, la velocidad media se define por la ecuación

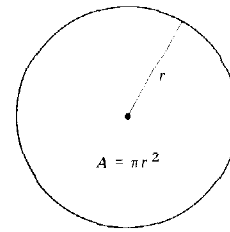


FIGURA 1.5
Círculo de radio r.

$$v = d/t$$

Las *dimensiones* de una magnitud física son los símbolos de las magnitudes fundamentales (o derivadas) que la definen. Designamos las dimensiones de una magnitud escribiendo dichos símbolos entre corchetes. Así, las dimensiones de longitud y tiempo son simplemente $[l]$ y $[t]$, y las dimensiones de velocidad se obtienen de su definición como longitud dividida por tiempo, o $[l/t]$.

Las dimensiones de área y volumen también están relacionadas con $[l]$. Para medir el área (o el volumen) de alguna cosa se requieren ciertas medidas de longitud y algunos cálculos matemáticos. Así, el área de un círculo requiere la medida de su radio r (Fig. 1.5). Si $r = 2{,}5$ m, el área A es

$$A = \pi r^2 = \pi \times (2{,}5 \text{ m})^2 = 6{,}25\pi \text{ m}^2 = 19.6 \text{ m}^2$$

La unidad en este caso es el metro cuadrado (m²) y la dimensión es $[l^2]$. Análogamente la unidad de volumen es el metro cúbico (m³) y la dimensión es $[l^3]$.

Por ejemplo, el volumen de una esfera de radio 2,5 m es

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3} \times (2{,}5 \text{ m})^3$$
$$= \frac{4\pi}{3} \times 15{,}6 \text{ m}^3 = 65{,}4 \text{ m}^3$$

Como hicimos notar anteriormente, se pueden utilizar diversas unidades para medir el área y el volumen, pero la dimensión de cada una de estas magnitudes es siempre la misma.

* Desde 1967 el segundo ha sido definido por medio de un reloj de cesio, que es un reloj atómico controlado por transiciones electrónicas del cesio. Asimismo, el metro se define actualmente como 1 650 763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la luz anaranjada emitida por el criptón al ser excitado eléctricamente.

1.3. PRECISIÓN, CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y ERROR EXPERIMENTAL

Existe un límite en la precisión de una medida cualquiera, que depende del equipo utilizado y de la habilidad del experimentador. Por ejemplo, si para medir el tamaño de este libro se utilizase una regla graduada en centímetros y décimas de centímetro, es decir, milímetros, el resultado tendría una precisión de 0,1 cm, la división más pequeña de la regla. Si se hubiese de medir la longitud de una habitación, la precisión sería probablemente más pequeña porque la regla tendría que deslizarse a lo largo del suelo, como mostraba la Fig. 1.1. En cada paso se ha de marcar sobre el suelo la posición del extremo de la regla, lo cual introduce en la medida una fuente adicional de error.

La determinación de la precisión de una medida es tan importante como la medida misma, y cada experimentador debería dar el resultado de su medida y una estimación de su precisión. Una medida del tamaño de este libro podría expresarse como 24,2 ± 0,1 cm. El símbolo ± (que se lee «más o menos») quiere decir que la longitud real se cree que está comprendida entre 24,1 y 24,3 cm. La cantidad 0,1 cm es la *incertidumbre* o *error* en la *medida.*

Existen dos clases distintas de error que pueden entrar en una medida, errores *accidentales* y errores *sistemáticos*. Se introduce un error accidental cada vez que la regla graduada se desliza por el suelo al medir la longitud de la habitación. La marca hecha en el suelo para indicar el extremo de la regla no puede ponerse nunca exactamente en el extremo, sino que quedará más bien un poquito a un lado u otro. Una vez que la regla se desplaza, se introduce otro error accidental cuando la parte delantera de la regla se alinea con la marca trazada. Otra vez la regla quedará ligeramente a un lado u otro de la marca. La característica de un error accidental es que tan probable es hacer el resultado final demasiado grande como demasiado pequeño. Los errores accidentales son inevitables, pero con un trabajo bastante penoso se pueden hacer muy pequeños. Así, repitiendo una medida un gran número de veces y promediando los resultados, disminuiremos mucho los errores accidentales.

Normalmente, un error sistemático es el resultado de un defecto en el equipo o en el procedimiento experimental. Al medir la longitud de la habitación habrá un error sistemático si la regla graduada es un poco más larga que 1 m (instrumento defectuoso) o si la marca se hace de tal manera que queda siempre delante de la regla (procedimiento defectuoso). En cualquiera de los dos casos, la medida daría una longitud menor que la verdadera longitud de la habitación por muchas veces que la repitiéramos. El único modo de detectar y eliminar los errores sistemáticos en un experimento es comprobar una y otra vez los instrumentos y el procedimiento.

A veces, el error indicado por un experimentador es únicamente su estimación del error accidental. No hay procedimiento razonable para hacer la estimación de un error sistemático ya que si se sospecha que existe uno, el experimentador, de ordinario, volvería atrás y repetiría su trabajo hasta eliminarlo.

A menudo no es necesario indicar explícitamente el error asociado a un número medido puesto que, por convenio, la cantidad de dígitos empleados para expresar el número indica aproximadamente el error.

Si la longitud de este libro se da como 24,2 cm sin la estimación del error, habría que suponer que la longitud verdadera se halla probablemente entre 24,15 y 25,25 cm, es decir, que el error es del orden de 0,05 cm. Aunque en este caso el error es en realidad de 0,1 cm, la diferencia entre estos dos tipos de estimación del error carece de importancia en la mayoría de los casos. De ordinario es suficiente conocer el número de *cifras significativas* en una medida.

El número de cifras significativas es el número de dígitos dignos de confianza en la medida. Hay tres cifras significativas en la longitud 24,2 cm, puesto que incluso se sabe que el último dígito es 1, 2 o 3, y no, con toda seguridad, 5, 6 o 7. Sería incorrecto dar como resultado 24,20 cm, porque esto implicaría que la medida era exacta hasta cuatro cifras significativas. Pero en este caso nada se sabe acerca del último dígito, que podría ser tanto 3 (p. ej., 24,23) como 7 (por ejemplo, 24,17).

Cuando se trata de grandes números, puede surgir un problema al indicar el número de cifras significativas de modo correcto. Por ejemplo, la distancia desde la Tierra al Sol es de unos 149 500 000 km. ¿Cuántas cifras son significativas? La distancia no se conoce con seguridad hasta el medio kilómetro (de modo que no todos los ceros pueden ser significativos), pero se puede conocer dentro del intervalo ± 5000 km (así que el primer cero después del 5 sería significativo). Para evitar malentendidos es conveniente a menudo utilizar potencias de 10 para expresar un número como el anterior. El número se da entonces en la forma $149{,}50 \times 10^6$ km. El primer factor indica todas las cifras significativas y el segundo dice cuántos lugares hacia la derecha ha de correrse la coma decimal. (En el Apéndice I se discute el uso de las potencias de 10 con más detalle.)

En el transcurso de un cálculo, el número de dígitos puede aumentar más allá de lo significativo del resultado. En tal caso, el número final se redondearía para dejar solamente las cifras significativas.

Ejemplo. Supongamos de nuevo que como longitud de este libro se obtiene $24{,}2 \pm 0{,}1$ cm y como anchura $19{,}5 \pm 0{,}1$ cm. A partir de estas medidas se calcula el área del libro que es

$$24{,}2 \text{ cm} \times 19{,}5 \text{ cm} = 471{,}90 \text{ cm}^2$$

Sin embargo, no todos los dígitos del resultado final pueden ser significativos. En un extremo, la longitud puede ser realmente 24,3 cm y la anchura 19,6 cm, de modo que el área es unos 476 cm^2. En el otro extremo, la longitud puede ser sólo de 24,1 cm y la anchura de 19,4 cm y, así, el área es de unos 468 cm^2 solamente.

Como regla general, el resultado de un cálculo no puede tener más cifras significativas que dígitos hay en la cifra menos significativa utilizada en el cálculo. En este último ejemplo, los dos números que intervenían en el cálculo tenían cada uno tres cifras significativas, de modo que el resultado final debería redondearse a tres cifras significativas y expresarse como 472 cm^2.

OBSERVACIÓN. El uso de cifras significativas para indicar la precisión de un resultado no es tan exacto como dar los errores reales, pero es suficiente para la mayoría de nuestros fines. En el último ejemplo, pongamos por caso, es discutible si el último dígito de 472 es realmente significativo. No es necesario discutir esto aquí. El punto importante es que los dos últimos dígitos de 471,90 no son sin duda alguna significativos.

Algunas magnitudes que son fundamentales en la Física se miden de nuevo cada pocos años, cuando se dispone de nuevas técnicas para mejorar la precisión. Por ejemplo, la velocidad de la luz en el espacio vacío (el vacío) es una constante universal de la naturaleza, y su determinación exacta es importante en muchas áreas de la Física y la Astronomía. La velocidad de la luz se expresa corrientemente en kilómetros por segundo (km/s) y se halla midiendo la distancia que una vibración luminosa recorre en 1 s. En 1862 encontró Foucault que la velocidad era de 298 000 ± 500 km/s, o, como deberíamos escribirla, $(2{,}980 \pm 0{,}005) \times 10^5$ km/s. Obsérvese que el primer cero después del 8 es significativo y los otros no.

Desde 1862 la velocidad de la luz ha sido medida con precisión creciente por un gran número de investigadores. La Tabla 1.1 recoge algunas de estas medidas para mostrar cómo el número de cifras significativas ha aumentado a lo largo de los años. Las medidas más recientes no corrigen, en general, a las más antiguas sino aumentan solamente la precisión del resultado.

Una interesante excepción a esto es la medición de 1935 realizada por Michelson, Pease y Pearson. Su resultado difiere de la medición de Grosse de 1967 en 18 km/s, o sea, 9 veces su error estimado. Para reducir el error accidental a sólo 2 km/s repitieron su medida más de 2000 veces. Desgraciadamente tuvieron en su experimento un insospechado y considerable error sistemático que sólo se hizo evidente cuando en los años cincuenta se llevaron a cabo medidas aún más precisas.

TABLA 1.1. **Velocidad de la luz medida por diversos investigadores.**

Fecha	Investigador	Medición, km/s
1676	Römer	220 000 ± ?
1849	Fizeau	313 300 ± ?
1862	Foucault	298 000 ± 500
1875	Cornu	299 990 ± 200
1880	Michelson	299 910 ± 50
1883	Newcomb	299 860 ± 30
1926	Michelson	299 796 ± 4
1928	Helstaedt	299 778 ± 10
1935	Michelson, Pease y Pearson	299 774 ± 2
1941	Anderson	299 776 ± 6
1949	Aslakson	299 792 ± 3,5
1950	Essen	299 792,5 ± 1,0
1952	Froome	299 792,6 ± 0,7
1953	MacKenzie	299 792,4 ± 0,5
1957	Bergstrand	299 792,85 ± 0,16
1958	Froome	299 792,50 ± 0,10
1967	Grosse	299 792,50 ± 0,05

Todo experimento se ve rondado por la posibilidad de un serio error sistemático. Un buen investigador tiene conocimiento de esto y hace todo lo que puede para comprobar su experimento. Pero la comprobación final sólo viene después de que el experimento es repetido independientemente por alguien más.

1.4. ESCALA: UNA INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Un interesante problema biológico, que puede ser investigado por simple análisis matemático, es de qué modo está relacionado el tamaño de una estructura con su función. Por ejemplo, ¿es posible tener una sola célula tan grande como una hormiga o una hormiga tan grande como un hombre, o vienen determinados los tamaños de estas estructuras por su función? Éstas son cuestiones de *escala*, es decir, cuestiones acerca de cómo las propiedades de las estructuras dependen de su tamaño.

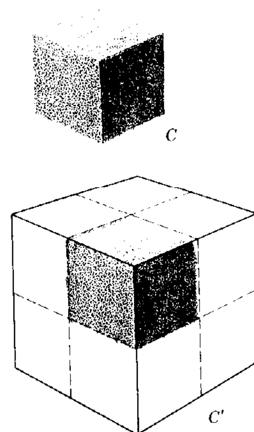


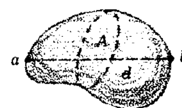
FIGURA 1.6
Dos cubos de tamaño diferente. Una arista de C' tiene dos veces la longitud de una arista de C.

La respuesta a tales preguntas requiere un conocimiento de cómo varían con el tamaño de un objeto las magnitudes geométricas básicas de longitud, área y volumen. En la Fig. 1.6 se muestran dos cubos C y C' de distinto tamaño. La longitud de una arista del cubo C' es doble de la de una arista del cubo C. Decimos que el cubo C' es mayor que el cubo C, con un *factor de escala* L, siendo L igual a 2 en este caso. El factor de escala es la razón de longitudes correspondientes en dos figuras semejantes.

Si en lugar de longitudes comparamos áreas, es evidente que una cara del cubo C' tiene 4 veces el área de una cara del cubo C: la razón de estas áreas es $L^2 = 2^2 = 4$. Por otro lado, el volumen del cubo C' es 8 veces el volumen del cubo C: la razón de estos volúmenes es $L^3 = 2^3 = 8$.

Este resultado, obvio para un cubo, es también cierto para dos figuras semejantes cualesquiera, prescindiendo de la forma. La Fig. 1.7 muestra dos figuras semejantes de distinto tamaño. El factor de escala es la razón de las longitudes correspondientes de las figuras; por ejemplo,

$$L = \frac{d'}{d}$$



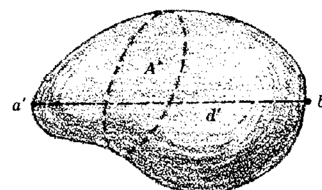


FIGURA 1.7
Dos figuras semejantes de tamaño diferente.

(Puesto que las dos figuras son semejantes, el factor de escala L es el mismo para dos longitudes correspondientes cualesquiera.) La razón de dos áreas correspondientes cualesquiera, es decir, la razón de las áreas de las secciones transversales A y A', indicadas en la Fig. 1.7, es $A'/A = L^2$. La razón de los volúmenes V y V' de las dos figuras es $V'/V = L^3$.

La importancia de estas relaciones geométricas procede del hecho de que ciertas propiedades físicas de un cuerpo dependen del volumen y otras dependen del área. La razón de tales propiedades dependerá por lo tanto del tamaño del cuerpo. Por ejemplo, el peso de un animal es proporcional a su volumen. Ello significa que los pesos W y W' de dos animales de la misma forma pueden escribirse como

$$W = aV \quad \text{y} \quad W' = aV'$$

con la misma *constante de proporcionalidad* a para cada uno. En consecuencia, la razón entre los pesos de los animales es igual al cociente entre sus volúmenes

$$W'/W = aV'/aV = V'/V = L^3$$

Fuerza relativa



FIGURA 1.8
Dos hormigas de forma semejante pero distinto tamaño.

La Fig. 1.8 muestra dos hormigas de forma y material idénticos. La hormiga gigante tiene un factor de escala $L = d/d'$ con respecto a la hormiga normal y, por consiguiente, la hormiga gigante pesa L^3 veces lo que la hormiga normal:

$$\text{Peso de una hormiga gigante} = L^3 \times \text{peso de una hormiga normal}$$

Por otro lado, la fuerza de una hormiga (o de cualquier otro organismo) depende solamente del área de la sección transversal de sus músculos. (Pensemos en un levantador de pesos. La longitud de sus brazos es normal, pero el área de la sección transversal de sus brazos es extraordinariamente grande. Todo su incremento de fuerza procede del incremento del área de la sección transversal de sus músculos.) Por lo tanto, la hormiga gigante será L^2 veces más fuerte que la hormiga normal y será capaz de levantar L^2 veces el peso que levante ésta:

$$\text{Peso que puede levantar la hormiga gigante} = L^2 \times \text{peso que puede levantar la hormiga normal}$$

La *fuerza relativa* de un animal se define como la razón del peso que el animal puede levantar al propio peso del animal. De las relaciones anteriores tenemos para estas magnitudes

$$\begin{aligned}\text{Fuerza relativa de una hormiga gigante} &= \\ &= \frac{\text{peso que puede levantar}}{\text{peso de la hormiga gigante}} \\ &= \frac{L^2 \times \text{peso que puede levantar la hormiga normal}}{L^3 \times \text{peso de la hormiga normal}} \\ &= \frac{\text{peso que puede levantar la hormiga normal}}{L \times \text{peso de la hormiga normal}} \\ &= \frac{1}{L} \times \text{fuerza relativa de una hormiga normal.}\end{aligned}$$

Esto significa que la fuerza relativa de la hormiga gigante es más pequeña que la de la hormiga normal en un factor $1/L$.

A menudo se dice que una hormiga es más fuerte que un hombre porque ésta puede levantar 3 veces su peso mientras que un hombre sólo puede levantar alrededor de la mitad de su propio peso; es decir, la fuerza relativa de una hormiga normal es 3 y la de un hombre es 0,5. Sin embargo, es erróneo llegar a la conclusión de que la hormiga es más fuerte; la hormiga tiene una fuerza relativa mayor a causa precisamente de su pequeño tamaño. Para comparar realmente la fuerza de una hormiga con la de un hombre, se debe tener en cuenta la diferencia de tamaños.

Una hormiga normal es de 1,2 cm de larga y un hombre de 180 cm. Una hormiga gigante del tamaño de un hombre tendría el factor de escala

$$L = \frac{180 \text{ cm}}{1{,}2 \text{ cm}} = 150$$

respecto a una hormiga normal. La fuerza relativa de esta hormiga del tamaño de un hombre sería solamente

$$\frac{1}{L} \times \text{fuerza relativa de una hormiga normal} = \frac{1}{150} \times 3 = \frac{1}{50}$$

que es mucho menor que la fuerza relativa de un hombre. Por consiguiente, una hormiga es intrínsecamente más débil que un hombre. De hecho, una hormiga de tamaño humano no es una criatura biológicamente viable: puesto que sólo podría levantar un cuarenta y ochoavo de su peso, o sea, no podría ni siquiera levantar sus propias patas para subir encima de pequeños obstáculos.

Lo que hemos dicho acerca de la fuerza de los músculos se aplica también a los huesos y a cualquier otro material estructural. Para un animal de forma dada, la fuerza de sus huesos con respecto a su propio peso depende de su tamaño, y cuanto mayor es el animal más pequeña es su fuerza relativa. Encontramos en la naturaleza que la forma de los animales grandes es muy diferente de la de los más pequeños. En la Fig. 1.9 se representa un perro y un elefante dibujados al mismo tamaño. El espesor de las patas del elefante es mayor que el de las del perro. Un animal del tamaño de un elefante no puede tener la forma de un perro porque la razón, fuerza de los huesos: peso del cuerpo, sería demasiado pequeña. Los huesos y músculos de los animales grandes deben ser desproporcionadamente más anchos que los huesos y músculos de los animales pequeños.

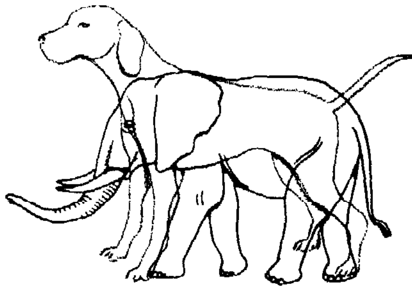


FIGURA 1.9
Un perro y un elefante dibujados al mismo tamaño.

División celular

El problema de escala de otras propiedades puede estudiarse del mismo modo. En posteriores capítulos consideraremos la dependencia del tamaño de cosas tales como la rapidez de un corredor, la velocidad

de vibración y la potencia suministrada. Ahora aplicaremos los principios de escala a otros problemas: ¿Por qué se dividen las células cuando alcanzan un cierto tamaño?

Para simplificar consideremos una célula esférica. La Fig. 1.10 muestra dos células en diferentes etapas de crecimiento. El factor de escala de la célula más vieja (la mayor) con respecto a la más joven (la más pequeña) es $L = R'/R$ donde R y R' son los radios de las dos células. El volumen de la célula más vieja es L^3 veces el volumen de la más joven. Esto quiere decir que la célula más vieja tiene L^3 veces el material de metabolismo de la más joven y que necesita por minuto L^3 veces el oxígeno (y otras sustancias vitales) que requiere la más joven:

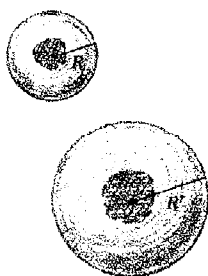


FIGURA 1.10
Dos células esféricas en diferentes etapas de crecimiento.

Necesidad de oxígeno/minuto de la célula más vieja =
= $L^3 \times$ necesidad de oxígeno/minuto de la célula más joven

Todo el oxígeno consumido por la célula debe pasar a través de la pared de la misma, de modo que la cantidad máxima de oxígeno que puede obtener la célula por minuto es proporcional al área de la pared celular. Así, la célula más vieja puede obtener a lo sumo L^2 veces el oxígeno que obtiene la más joven por minuto:

Cantidad máxima de oxígeno que obtiene por minuto la célula más vieja =

= $L^2 \times$ cantidad máxima de oxígeno que obtiene por minuto la más joven.

La razón entre la cantidad máxima de oxígeno que se puede obtener y el oxígeno necesario recibe el nombre de *factor de viabilidad*. Para que la célula sobreviva debe ser evidentemente mayor que 1. De las relaciones anteriores es fácil ver que

Factor de viabilidad de la célula más vieja =

$$= \frac{1}{L} \times \text{factor de viabilidad de la célula más joven.}$$

Una célula joven tiene un factor de viabilidad mayor que 1. La última relación muestra que cuando la célula crece, su factor de viabilidad disminuye y se aproxima a 1. A fin de evitar la asfixia, la célula debe detener su crecimiento o dividirse. Por medio de la división, la célula grande con un factor de viabilidad pequeño es reemplazada por dos células más pequeñas, cada una de ellas con un factor de viabilidad mayor.

Esta discusión de las escalas ha tenido por objeto mostrar que para comprender algunos rasgos generales de los sistemas vivos hay que tener algunos conocimientos de Matemáticas y Física. A medida que los principios de la Física se vayan desarrollando en este libro se aplicarán a otros problemas de Biología y Medicina.

PROBLEMAS

1. (*a*) Convertir 30 pies en pulgadas. (*b*) Convertir 12 m en pies. (*c*) Convertir 7,5 pulgadas en cm. (*d*) Convertir 150 gal en litros.
Resp. (*a*) 360 pulg; (*b*) 39,4 pies; (*c*) 19,0 centímetros; (*d*) 568 l.
2. (*a*) ¿Cuál es la conversión de pies cuadrados en pulgadas cuadradas, es decir, cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 pie^2? (*b*) ¿Cuál es la conversión de pies cúbicos en pulgadas cúbicas?
3. (*a*) ¿Cuál es la conversión de metros cuadrados en centímetros cuadrados? (*b*) ¿Cuál es la conversión de metros cúbicos en centímetros cúbicos?
Resp. (*a*) 1 m^2 = 10^4 cm^2; (*b*) 1 m^3 = 10^6 centímetros cúbicos.
4. (*a*) ¿Cuál es la conversión de metros cuadrados en pies cuadrados? (*b*) ¿Cuál es la conversión de metros cúbicos a pies cúbicos?
5. (*a*) ¿Cuál es el área de un círculo de 3,5 cm de diámetro? (*b*) Convertir el área en metros cuadrados.
Resp. (*a*) 9,6 cm^2; (*b*) $9{,}6 \times 10^{-4}$ m^2.
6. Una habitación tiene 14,5 pies de largo y 9,5 pies de ancho. Hallar el área de la habitación en: (*a*) pies cuadrados, (*b*) pulgadas cuadradas y (*c*) metros cuadrados.
Resp. (*a*) 138 pies^2; (*b*) $1{,}99 \times 10^4$ pulg^2; (*c*) 12,8 m^2.
7. Un pie cúbico de agua pesa 62,3 lb. (*a*) ¿Cuánto pesa una pulgada cúbica de agua? (*b*) ¿Cuánto pesa un centímetro cúbico? *Resp* (*a*) 0,0361 lb; (*b*) $2{,}20 \times 10^{-3}$ lb.
8. (*a*) ¿Cuál es el volumen de una esfera de radio 1,3 pies; (*b*) Pasar el volumen a metros cúbicos.
9. Un galón (medida norteamericana de capacidad) de agua pesa 8,33 lb. Hallar el volumen de un galón en: (*a*) pies cúbicos y (*b*) centímetros cúbicos (ver Prob. 8).
Resp. (*a*) 0,134 pies^3; (*b*) $3{,}79 \times 10^3$ cm^3.
10. (*a*) ¿Cuál es el volumen de una célula esférica de 2×10^{-3} cm de diámetro? (*b*) ¿Cuál es el peso de la célula, suponiendo que se compone sobre todo de agua? (ver Prob. 7).
11. En Hidrología (la ciencia de la distribución del agua sobre la Tierra) es común la unidad de volumen *acre-pie*, que es el volumen de agua que cubriría 1 acre con una profundidad uniforme de 1 pie. (*a*) Dado que 1 acre = 43 560 pies^2, ¿cuántos galones hay en 1 acre-pie? (ver Prob. 9). (*b*) Un chubasco local deja caer 50 acre-pies de agua. ¿Cuál es el peso de este agua?
Resp. (*a*) $3{,}25 \times 10^5$ gal; (*b*) $1{,}35 \times 10^8$ lb.
12. En el Cap. 2 se introduce una nueva unidad, el *newton* (N). (*a*) Dado que 1 N = = 0,225 lb, ¿cuál es el peso en newtons de un pie cúbico de agua? (ver Prob. 7). (*b*) ¿Cuál es el peso en newtons de un metro cúbico de agua?
Resp. (*a*) 277 N; (*b*) $9{,}78 \times 10^3$ N.
13. Un coche que se desplaza a una velocidad constante de 60 mi/h recorre 60 millas en 1 hora. (*a*) ¿Cuántos pies recorre en 1 h? (recordar, 1 mi = 5280 pies). (*b*) ¿Cuántos pies recorre en 1 s? (*c*) ¿Cuál es la conversión de millas por hora en pies por segundo?
14. (*a*) ¿Cuál es la conversión de millas por hora en kilómetros por hora? (*b*) ¿Cuál es la conversión de millas por hora en metros por segundo?
Resp. (*a*) 1 mi/h = 1,61 km/h; (*b*) 1 mi/h = = 0,448 m/s.
15. El corazón bombea sangre a un ritmo de 0,083 l/seg. (*a*) ¿Cuáles son las dimensiones de la velocidad del flujo de sangre? (*b*) Convertir la velocidad de flujo en pies cúbicos por hora, utilizando la tabla de conversiones de la contra cubierta anterior.
Resp. (*a*) [l^3/t]; (*b*) 10,5 pies^3/hora.
16. Un topógrafo desea hallar la distancia desde un punto *B* a otro *A* situado en la orilla opuesta de un río (Fig. 1.2) y para ello mide la línea base *BC* y los ángu-

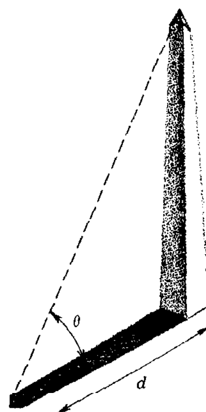


FIGURA 1.11. Problema 17.

los θ_1 y θ_2. Hacer un dibujo a escala y obtener la distancia BA, dado que $\theta_1 = 86°$, $\theta_2 = 83°$ y $BC = 0{,}15$ km

17 Un obelisco (Fig. 1.11) proyecta una sombra de longitud $d = 12$ m. Al mismo tiempo se halla que el ángulo θ es 75°. ¿Cuál es la altura del obelisco?
Resp. 45 m.

18. Un hombre camina 2 millas hacia el norte y después, tras girar 45°, camina otras 5 millas hacia el nordeste. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el comienzo y el final del paseo?

19. Al medir la altura de un hombre se obtiene 5 pies 11 pulg con una imprecisión de 0,5 pulg. Expresar su altura en pies conservando sólo las cifras significativas.
Resp. 5,92 pies.

20. Mediante medidas topográficas se han obtenido las dimensiones de una parcela rectangular: 1235 ± 25 pies de larga y 736 ± 15 pies de ancha. Calcular el área del terreno en pies cuadrados y expresar el resultado de manera que se ponga de manifiesto de forma adecuada el número de cifras significativas.

21. El censo de 1970 cifraba la población de Boston en 627 776 habitantes. Este número puede diferir en un 2 % de la población verdadera en ese año. Dar la población de Boston de modo que se indique adecuadamente el número correcto de cifras significativas.
Resp. $6{,}3 \times 10^5$.

22. En el estudio de una droga, se alimentan 50 ratones con una dieta diaria que incluye 50 mg (1 mg = 1 milígramo = 10^{-3} g) de droga X, mientras que un grupo de control de 50 ratones se alimenta con la misma dieta pero sin la droga. Diariamente se hacen medidas del peso de cada ratón. Hacer una lista de posibles fuentes de error en este experimento y señalar qué errores son accidentales y cuáles sistemáticos. No dé nada por sentado, porque en la práctica cualquier error imaginable puede ocurrir (y a menudo ocurre).

23. Una mujer de 1,55 m de alta pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?
Resp. 65 kg.

24. Una célula esférica de radio R' se divide en dos células hijas iguales de radio R cada una de ellas. (*a*) Hallar el factor de escala $L = R'/R$. (*b*) ¿Cuál es la razón, área de la superficie de las dos células hijas : área de la superficie de la célula madre? (*c*) Si el factor de viabilidad de la madre es 1, ¿cuál es el factor de viabilidad de cada célula hija?

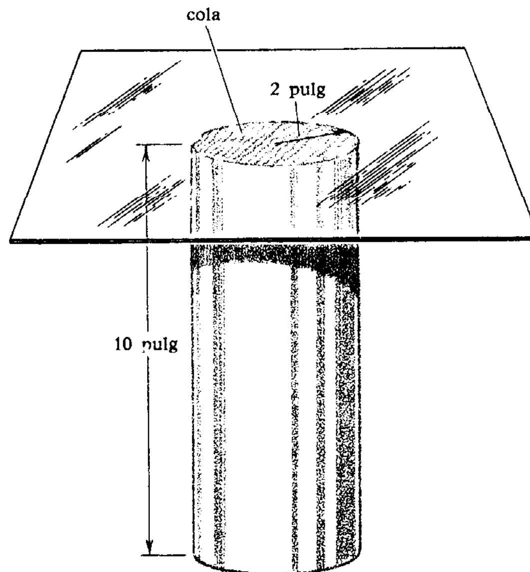


FIGURA 11.2. Problema 25.

25. Un cilindro de latón de 10 pulg de alto y 2 pulg de radio pesa 4 lb y está pegado a la cara inferior de un tablero horizontal, como se muestra en la Fig. 1.12. La cola tiene una resistencia máxima de 2 lb/pulg^2. Si a la superficie encolada se aplica una fuerza mayor que ese valor máximo, se romperá la cola. (*a*) ¿Cuál es en este caso la resistencia máxima de la superficie encolada? (*b*) ¿Cuál es el peso de un cilindro semejante de latón 10 veces más grande(es decir, con un factor de escala $L = 10$)? (*c*) ¿Puede la misma cola mantener unido a la superficie horizontal el cilindro más grueso?
Resp. (*a*) 25,1 lb; (*b*) 4000 lb; (*c*) no.

26. Los mamíferos terrestres varían de tamaño desde la musaraña enana (2 pulg de larga) al elefante de la India (130 pulg). Discutir los factores que impiden que los mamíferos sean apreciablemente más grandes o más pequeños que éstos.

27. ¿Cuál es la proporción entre los pesos máximos que pueden levantar una persona de 130 cm de altura y una de 165 cm, respectivamente? Suponer forma y estructura semejantes.
Resp. 1,19.

BIBLIOGRAFÍA

BRIDGMAN, P. W.: «The Nature of Physical Theory», Dover Publications, Inc., Nueva York, 1964. Se expone y emplea el concepto de operacionalismo como base de una filosofía positivista. Este libro analiza con profundidad qué es la verdad y cuál es el significado de la acepción.

GALILEI, Galileo: «Dialogues concerning Two New Sciences», trad. de Henry Crew y Alfonso de Salvio, The MacMillan Company, Nueva York, 1914, reimpreso por Dover Publications, Inc., Nueva York, 1954. Es el tratamiento original de las leyes de semejanza. Aunque publicado por vez primera en 1638, sigue siendo una clara y deliciosa descripción de «la imposibilidad de aumentar hasta dimensiones enormes el tamaño de las estructuras en el arte o la naturaleza».

HOYLE, Fred: «Astronomy», Doubleday & Co., Inc., Garden City, N.Y., 1962. En los capítulos 6, 9 y 10 se explican los diversos métodos directos e indirectos utilizados por los astrónomos para medir distancias.

JEANS, James: «The Growth of Physical Science», Fawcett Publications, Inc., Nueva York, 1961. Un manual muy ameno de la historia de la Física desde la antigüedad hasta el siglo XX.

PILBEAM, David and Stephen Jay GOULD: «Size and scaling in human evolution», Science, **186**, 892 (1974). Se analiza el tamaño y la forma de homínidos extintos para distinguir entre adaptaciones debidas al mero aumento de tamaño de las originadas por el cambio de función.

SARTON, George: «A History of Science: Ancient Science through the Golden Age of Greece», Harvard University Press, Cambridge Mass., 1960.

———: «A History of Science: Hellenistic Science and Culture in the Last Three Centuries B.C.», Harward University Press, Cambridge, Mass., 1959. Estos dos volúmenes constituyen un autorizado manual de la ciencia en el mundo antiguo. Escritos poco antes de la muerte del profesor Sarton, estos libros son la esencia del trabajo de toda la vida de un gran historiador.

SMITH, J. Maynard: «Mathematical Ideas in Biology», Cambridge University Press, Cambridge, 1968. El capítulo 1 de este breve pero fascinante libro aplica el concepto de semejanza a diversos problemas biológicos.

Capítulo 2 Fuerza

Los dos capítulos siguientes desarrollan las leyes de la *estática*, o sea, los requisitos bajo los cuales un objeto permanece en reposo. Estas leyes son de aplicación universal y se pueden utilizar tanto para diseñar los puntales que sostienen un puente como para entender la función de los músculos que mantienen la postura del cuerpo. El estudio de la estática constituye también una buena introducción a la fuerza, que es uno de los conceptos más importantes de la física.

2.1. PROPIEDADES DE LA FUERZA

Una *fuerza* es una influencia que al actuar sobre un objeto hace que éste cambie su estado de movimiento. En la práctica, notamos una fuerza cuando empujamos o tiramos de un objeto. A pesar de que es posible definir la fuerza de un modo operacional, describiendo las operaciones que se requieren para medirla (como se ha hecho en el Apartado 1.2 con la longitud y el tiempo), ello podría oscurecer más que aclarar las propiedades de la fuerza que deseamos poner de relieve. Por lo tanto, no nos molestaremos siquiera en definir la fuerza, sino que la consideraremos como un concepto primitivo con las cuatro propiedades siguientes.

Propiedad 1. *Una fuerza siempre es aplicada por un objeto material a otro.* Así, en la Fig. 2.1 la mano ejerce una fuerza **F** (por medio de la cuerda) sobre la caja.

Propiedad 2. *Una fuerza se caracteriza por su módulo y por la dirección en que actúa.* Es decir, tanto el módulo como la dirección son necesarios para especificar completamente una fuerza. El módulo puede expresarse en diferentes unidades, pero por ahora utilizaremos el kilopondio (kp).* (La dimensión de fuerza $[f]$ se discute en el Apartado 4.4.). La dirección de una fuerza es la dirección en la que ésta tendería a mover al objeto al que está aplicada, en ausencia de otras fuerzas. La dirección se indica mediante una flecha como la de la Fig. 2.1, la cual muestra que la fuerza ejercida por la mano está dirigida a lo largo de la cuerda. Por simple examen no siempre es evidente la dirección de una fuerza; sin embargo, las cuerdas flexibles transmiten siempre las fuerzas a lo largo de su longitud.

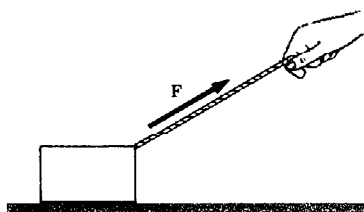


FIGURA 2.1
Una fuerza F es aplicada por la mano a la caja.

Las magnitudes caracterizadas por un módulo y una dirección reciben el nombre de *vectores*. Se puede utilizar una flecha para representar el módulo de un vector al mismo tiempo que da su dirección. En un problema dado se adopta sencillamente una escala, por ejemplo 1 cm = 4 kp, y entonces una fuerza de 8 kp se representa median-

* El kilopondio (o kilogramo-fuerza) es la fuerza con que la Tierra atrae al kilogramo patrón situado al nivel del mar y a 45° de latitud. (Ver observación p. 84.)

te una flecha de 2 cm de larga. Todo lo que se necesita conocer de una fuerza viene representado de manera conveniente por tales flechas. El vector **F** de la Fig. 2.1 indica una fuerza de 6 kp en la escala 1 cm = 5 kp, pues tiene una longitud de 1,2 cm.
El símbolo de una fuerza se representa en negritas (**F**) para destacar que se trata de una magnitud vectorial. El mismo símbolo en cursiva (*F*) se refiere sólo al módulo de la fuerza.

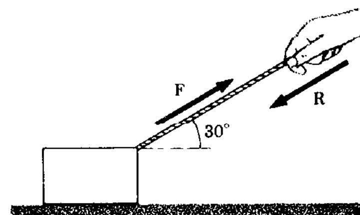


FIGURA 2.2
La fuerza R aplicada por la caja a la mano es la reacción a la fuerza F aplicada por la mano a la caja.

Propiedad 3 (Tercera ley de Newton del movimiento). *Cuando un objeto A ejerce una fuerza* **F** *sobre un objeto B, el objeto B ejerce simultáneamente una fuerza* **R** *sobre el objeto A.* La fuerza **R** es de igual módulo pero de dirección opuesta a **F**. Puede decirse, entonces, que las fuerzas siempre actúan por parejas.
Por ejemplo, mientras la mano de la Fig. 2.2 aplica una fuerza **F** sobre la caja, ésta aplica simultáneamente la fuerza **R** sobre la mano. Ambas fuerzas tienen el mismo módulo (6 kp), pero apuntan en direcciones opuestas.
Las dos fuerzas de cada par se designan a veces como fuerzas de *acción* y *reacción*. Esta terminología es algo engañosa, ya que implica que una de las fuerzas aparece en respuesta a la otra. No es éste el caso, porque las fuerzas aparecen simultáneamente, y es arbitrario el que a una fuerza se denomine acción o reacción. En general, la fuerza que actúa sobre el objeto de interés principal recibe el nombre de acción, pero esto no es más que un convenio arbitrario. Si en la Fig. 2.2 fuese la caja el objeto de interés principal, **F** sería la acción y **R** la reacción; pero si la mano fuese el centro de nuestra atención, **R** podría llamarse la acción y **F** la reacción.

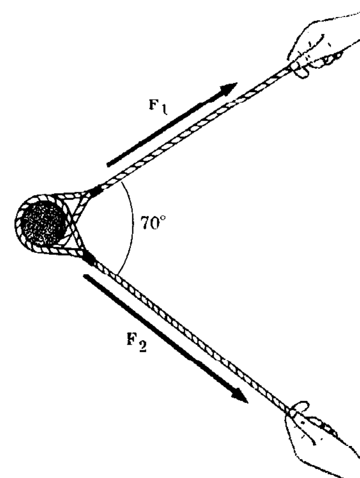


FIGURA 2.3
Un objeto sometido a las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

OBSERVACIÓN. *Es de gran importancia* darse cuenta de que *las fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre dos objetos diferentes.* La propiedad 1 establece que una fuerza siempre es aplicada por un objeto a otro. La tercera ley de Newton (propiedad 3) va más allá y dice que cada objeto ejerce una fuerza sobre el otro.

Propiedad 4. *Si dos (o más) fuerzas actúan simultáneamente sobre el mismo objeto, su efecto es el mismo que el de una fuerza única igual* a la suma vectorial *de las fuerzas individuales.*
La Fig. 2.3 muestra un objeto sometido a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. La suma vectorial **S** de estas fuerzas se halla de la siguiente manera (Fig. 2.4). Dibujar una flecha para representar a $\mathbf{F}_1$ y a partir del extremo de $\mathbf{F}_1$ dibujar una segunda flecha para representar a $\mathbf{F}_2$. Unir el origen de $\mathbf{F}_1$ con el extremo de $\mathbf{F}_2$ por medio de una tercera flecha. Esta tercera flecha representa la suma vectorial **S** de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. En otras palabras, el significado de la ecuación

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

es que los tres vectores **S**, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ forman un triángulo cuando se dibujan como se indica en la Fig. 2.4.

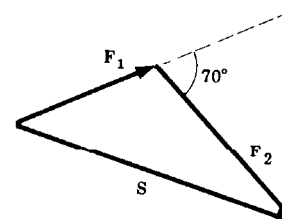


FIGURA 2.4
La fuerza S es la suma vectorial de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

OBSERVACIÓN. Al pasar de la Fig. 2.3 a la Fig. 2.4 se ha trasladado el vector $\mathbf{F}_2$ de modo que su origen toque el extremo de $\mathbf{F}_1$. Con el fin de sumar vectores se puede desplazar un vector desde una posición a otra, siempre que no se cambien su longitud y dirección.

La Propiedad 4 nos permite hallar el efecto combinado de varias fuerzas que actúan sobre un objeto. De hecho, aún no hemos dicho cual es el efecto de una fuerza, o sea, lo que hace una fuerza. Esta información viene dada en las leyes primera y segunda de Newton. La primera ley, que es la base de la estática, es suficiente para permitirnos resolver un cierto número de problemas interesantes. La segunda ley, que es la base de la dinámica, se estudia en el Cap. 4.

Primera ley de Newton del movimiento (caso particular). *Para que un objeto permanezca en reposo, o sea, esté en equilibrio, es necesario que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él sea cero.* Esto es sólo una condición necesaria para que un objeto esté en reposo, es decir, que si un objeto ha de permanecer en reposo, la fuerza neta que actúa sobre él debe ser nula, y si la fuerza neta no es nula, el objeto no puede permanecer en reposo. Sin embargo, un objeto se puede mover aún cuando la fuerza neta ejercida sobre él sea cero, dado que existe otra condición que también debe cumplirse para que un objeto permanezca en reposo. Esto se discute más adelante en el Apart. 3.1.

Sólo después de estudiar cómo se aplican a problemas específicos es posible lograr una completa comprensión de estas propiedades de las fuerzas y de las leyes de Newton del movimiento. El resto de este capítulo está dedicado a la aplicación de estas propiedades y de la primera ley de Newton a situaciones diversas. Mientras se estudian estas aplicaciones deberíamos remitirnos constantemente a los enunciados de estas propiedades y a la ley de Newton para estar seguros de su relación con el problema que tratemos.

OBSERVACIÓN. Las tres leyes del movimiento fueron enunciadas por primera vez por Isaac Newton (1642-1727) en su gran obra «Principia Mathematica», publicada en 1687. Hemos preferido enunciar la tercera ley del movimiento como una propiedad de las fuerzas, ya que no depende del movimiento de los objetos a que se refiere.

2.2. ALGUNAS FUERZAS ESPECÍFICAS

El apartado anterior ha tratado de propiedades muy generales, comunes a todas las fuerzas. En este otro discutimos algunas fuerzas cotidianas y sus rasgos peculiares.

Fuerza de la gravedad

El nombre de *gravedad* se da a la fuerza con que la Tierra atrae a todos los objetos. Para un objeto material dado, por ejemplo, un bloque de plomo, esta fuerza tiene aproximadamente el mismo valor en cualquier punto de la superficie terrestre. Puede variar en un 0,5 % entre el polo y el ecuador, pero para nuestros fines puede despreciarse esta pequeña diferencia.

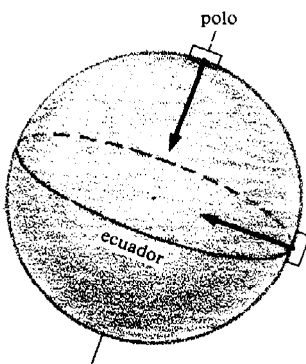


FIGURA 2.5
La fuerza de la gravedad sobre un bloque de plomo en el polo y en el ecuador.

La dirección de la fuerza apunta al centro de la Tierra y de este modo la dirección de la fuerza de la gravedad sobre el bloque de plomo en el polo es diferente de la dirección en el ecuador (ver Figura 2.5). Se dice que el bloque de plomo es atraído hacia el centro de la Tierra por la fuerza de la gravedad. Entonces, de acuerdo con

la tercera ley (de Newton), el bloque debe atraer a la Tierra con una fuerza de igual módulo y dirección opuesta a la fuerza ejercida por la Tierra sobre el bloque.

Este último punto es algo más que una mera fantasía intelectual, ya que implica que el bloque posee también la facultad de atraer de modo gravitacional. Así, la atracción gravitacional no puede ser una propiedad especial de la Tierra sino que debe estar presente en todos los objetos. Volveremos a esta interesante conclusión en el Apart. 5.3. Por ahora, sin embargo, restringimos el significado de gravedad a la fuerza que ejerce la Tierra sobre los objetos.

En el sistema inglés de unidades, la unidad de fuerza es la libra (lb), que puede considerarse como la fuerza de gravedad sobre un bloque determinado de metal que previamente se ha escogido como patrón. En realidad, sin embargo, la unidad SI † de fuerza, el Newton (N), se define más bien en términos de la segunda ley de Newton del movimiento más que por la fuerza de gravedad, como se explica en el Apart. 4.4. La libra se define en términos del newton por la relación

$$1 \text{ lb} = 4{,}45 \text{ N}$$

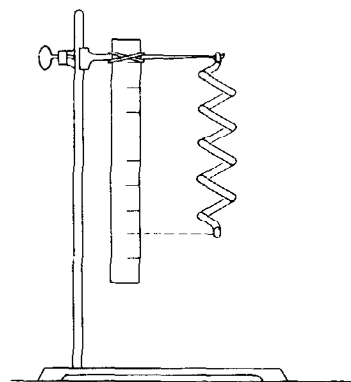


FIGURA 2.6
Muelle sin estirar.

Fuerza de un muelle

La Fig. 2.6 muestra un muelle suspendido de una barra y colgando verticalmente a lo largo de una regla. Cuando se engancha en el extremo inferior del muelle un peso de 1 kp, el muelle se alarga una cierta distancia, por ejemplo 0,75 cm (Fig. 2.7). Cuando se engancha un peso de 2 kp, el muelle se alarga 1,5 cm, o sea, el doble que en el caso anterior. Se observa, en general, que la cantidad que se alarga el muelle (hasta un límite) es proporcional a la fuerza de la gravedad sobre el peso. El módulo F_g de esta fuerza está por lo tanto relacionado con la distancia x que se alarga el muelle, por medio de

$$F_g = kx$$

donde k es una constante característica del muelle. En el caso que nos ocupa

$$k = \frac{1 \text{ kp}}{0{,}75 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ kp}}{1{,}5 \text{ cm}} = 1{,}33 \text{ kp/cm}$$

Puesto que un bloque pendiente de un muelle está evidentemente en equilibrio, la primera ley (de Newton) establece que la fuerza total sobre él debe ser nula. Pero la Tierra está ejerciendo sobre el bloque una fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$ dirigida hacia abajo, de aquí que deba existir sobre él otra fuerza $\mathbf{F}_k$ que anule a $\mathbf{F}_g$. Esta fuerza la ejerce el muelle y tiene su origen en las reordenaciones moleculares producidas en el metal cuando el muelle se alarga.

La fuerza del muelle se obtiene de la siguiente manera. La primera ley dice que la suma vectorial de $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_k$ es cero, puesto que el bloque está en equilibrio. Esto puede escribirse así

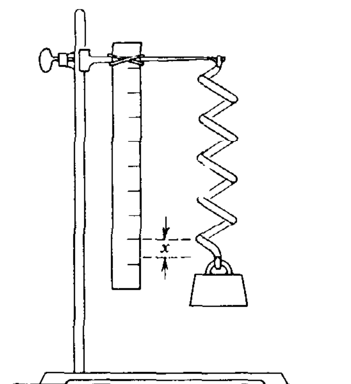


FIGURA 2.7
Muelle estirado una distancia x por un peso suspendido de él.

† Una unidad SI es una unidad en el Sistema Internacional de Unidades. Este sistema se discute más ampliamente en el Apart. 4.4 y en el Apéndice V.

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_k = 0 \qquad 2.1$$

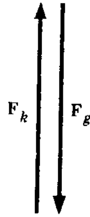


FIGURA 2.8
La suma de las fuerzas $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_k$ es cero.

Para sumar estas fuerzas, la Propiedad 4 dice que $\mathbf{F}_k$ debe dibujarse con su origen en el extremo de $\mathbf{F}_g$. La suma de estos vectores es entonces el vector trazado desde el origen de $\mathbf{F}_g$ al extremo de $\mathbf{F}_k$. Dado que esta suma ha de ser cero, el origen de $\mathbf{F}_g$ debe coincidir con el extremo de $\mathbf{F}_k$. La Fig. 2.8 muestra esto: $\mathbf{F}_k$ debe tener el mismo módulo que $\mathbf{F}_g$ y en direcciones opuestas.

Para despejar $\mathbf{F}_k$ de la Ec. 2.1 se pueden emplear las reglas ordinarias del álgebra. El resultado obvio es

$$\mathbf{F}_k = -\mathbf{F}_g$$

Lo que no es tan evidente es el significado del signo menos delante de un vector. En este caso sabemos que $\mathbf{F}_k$ es igual en módulo y opuesto en dirección a $\mathbf{F}_g$. Esto sugiere la siguiente regla general: *para cualquier fuerza* **F**, *la fuerza* **—F** *tiene el mismo módulo que* **F** *y dirección opuesta.*

Los muelles se utilizan para hacer toscos dispositivos de medida de fuerzas, apropiados para sencillas experiencias de cátedra pero no lo bastante precisos para fines comerciales. Sin embargo, con un dinamómetro se pueden medir fuerzas distintas de la de la gravedad. En la Fig. 2.9 se representa un dinamómetro midiendo la fuerza ejercida por la mano.

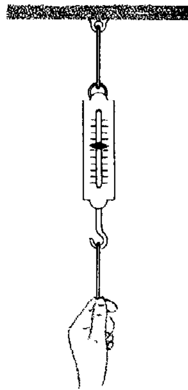


FIGURA 2.9
Un dinamómetro midiendo la fuerza ejercida por una mano.

Fuerza de contacto

Un bloque en reposo sobre una mesa (o un estudiante sentado en su silla) está evidentemente en equilibrio y de nuevo, por la primera ley, debe actuar sobre él otra fuerza además de la fuerza de la gravedad. La superficie de la mesa es ligeramente deformada por el bloque y, como consecuencia, ejerce sobre él una fuerza hacia arriba $\mathbf{F}_c$. Esta fuerza, que es perpendicular a la superficie que la produce, se llama *fuerza de contacto.* Puesto que la suma de $\mathbf{F}_g$, la fuerza de la gravedad sobre el bloque, y $\mathbf{F}_c$, la fuerza de contacto, es nula de acuerdo con la primera ley, se deduce que $\mathbf{F}_c$ debe ser de dirección opuesta a $\mathbf{F}_g$, o sea

$$\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_g \qquad 2.2$$

Las fuerzas de contacto las ejercen los cuerpos sólidos sobre otros objetos en contacto con ellos. Son fuerzas reales y van acompañadas de pequeñas distorsiones en las superficies de los cuerpos que las producen. De hecho, una fuerza de contacto se diferencia de la de un muelle sólo por el grado de distorsión que tiene lugar. Un muelle se diseña para producir un cambio notable de forma cuando se le aplica una fuerza, en tanto que en la superficie de un cuerpo sólido que ejerce una fuerza de contacto sólo ocurren cambios insignificantes. Por lo tanto, un cuerpo sólido actúa en cierto modo como un muelle muy tenso y, por consiguiente, puede ejercer fuerzas de contacto diferentes en circunstancias diversas sin experimentar un cambio notable en su aspecto. Sin embargo, esto no debería engañarnos creyendo que estas fuerzas son menos reales.

La Fig. 2.10 representa las dos fuerzas $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_c$ que actúan sobre el bloque situado encima de la mesa. Dado que estas fuerzas tienen igual módulo y dirección opuesta, los estudiantes (y muchos textos) llaman a veces a $\mathbf{F}_c$ la reacción a $\mathbf{F}_g$. *Esto es un error espantoso.* La relación $\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_g$ es una consecuencia de la primera ley y del hecho de que el bloque está en equilibrio. Además, las dos fuerzas implicadas actúan sobre el mismo objeto, mientras que las fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre objetos diferentes.

La reacción a $\mathbf{F}_g$ es la fuerza gravitacional $\mathbf{R}_g$ que ejerce el bloque sobre la Tierra: actúa sobre la Tierra (en su centro). La fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ también tiene una fuerza de reacción $\mathbf{R}_c$, que es una fuerza de contacto y actúa sobre todo lo que está produciendo $\mathbf{F}_c$. Puesto que es la mesa la que da lugar a $\mathbf{F}_c$, la reacción a esta fuerza es la fuerza $\mathbf{R}_c$ que el bloque ejerce sobre la mesa. La Fig. 2.11 muestra todas estas fuerzas. Recuérdese que, al aplicar la primera ley, sólo las fuerzas que actúan sobre el objeto en cuestión deben sumar cero.

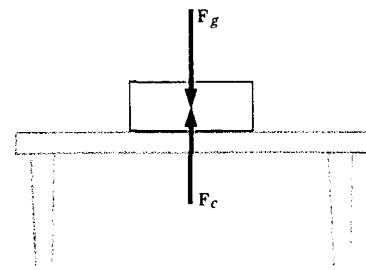


FIGURA 2.10
La fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$ y la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ actuando sobre un bloque en reposo sobre una mesa.

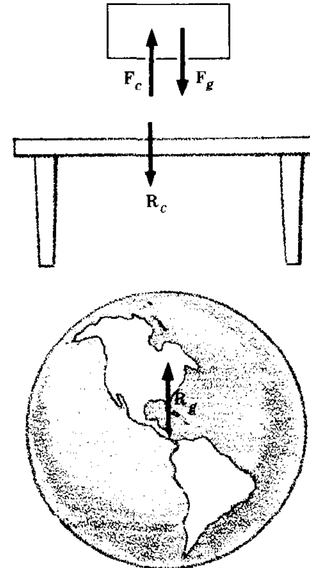


FIGURA 2.11
La reacción a $\mathbf{F}_g$ es una fuerza $\mathbf{R}_g$ que actúa sobre la Tierra, y la reacción a $\mathbf{F}_c$ es una fuerza $\mathbf{R}_c$ que actúa sobre la mesa.

Fuerza de rozamiento

El rozamiento, tal como la fuerza de contacto, es una fuerza aplicada por una superficie a un objeto en contacto con ella. Sin embargo, la fuerza de rozamiento es siempre paralela a la superficie, en tanto que la fuerza de contacto es siempre perpendicular a la misma. La fuerza de rozamiento actúa generalmente oponiéndose a cualquier fuerza aplicada exteriormente. Consideremos, pues, de nuevo un bloque sobre una mesa e imaginemos que se le aplica una pequeña fuerza $\mathbf{F}_a$, paralela a la superficie de la mesa (Fig. 2.12). Si $\mathbf{F}_a$ es suficientemente pequeña, el bloque no se mueve, de modo que ha de haber alguna otra fuerza $\mathbf{F}_f$ actuando sobre el bloque. Mientras el bloque permanece en reposo, la primera ley de Newton exige que $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_a$.

La suma de las fuerzas de contacto y de rozamiento, $\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_f$, es la *fuerza total* $\mathbf{F}_s$ que la superficie ejerce sobre un objeto (Fig. 2.13). El módulo de $\mathbf{F}_f$ puede cambiar para ser igual a F_a, tal como el módulo de $\mathbf{F}_c$ puede cambiar para valer F_g. Sin embargo, existe un valor máximo del módulo de $\mathbf{F}_f$, tal que si F_a excede dicho valor no puede ser contrarrestada por la fuerza de rozamiento, de modo que el bloque se pone en movimiento. ($\mathbf{F}_c$ tiene también un valor máximo, que es aquél por encima del cual la superficie se rompe. Este valor no se acostumbra a alcanzar en la vida cotidiana, a no ser, por ejemplo, que una persona muy corpulenta se siente en una silla endeble.)

La fuerza máxima de rozamiento depende de la naturaleza de las dos superficies que intervienen. Es mayor para un bloque de madera sobre una mesa también de madera que para un esquí encerado sobre hielo. En general, depende también del módulo de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$. Para problemas sencillos suponemos que la fuerza de rozamiento máxima es precisamente proporcional a F_c:

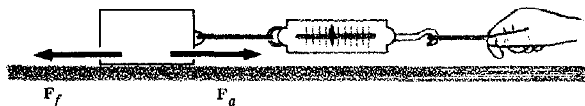


FIGURA 2.12
La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_f$ sobre el bloque se opone a una fuerza $\mathbf{F}_a$ aplicada paralelamente a la superficie.

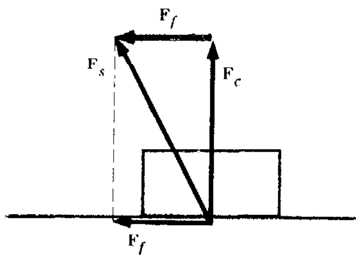


FIGURA 2.13
La fuerza superficial $\mathbf{F}_s$ es la suma de las fuerzas de contacto $\mathbf{F}_c$ y la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_f$.

$$\text{Fuerza máxima de rozamiento} = \mu_s F_c \qquad 2.2$$

Mientras un cuerpo permanezca en reposo, la fuerza real de rozamiento sobre él será menor que (o igual a) ésta, de modo que

$$F_f \leq \mu_s F_c \qquad 2.3$$

El símbolo ≤ significa «menor que o igual a», y la Ec. 2.3 expresa que la fuerza de rozamiento es menor que, o igual a, una cierta fracción de la fuerza de contacto.
La constante μ_s* recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento (o de fricción) estático*, y la Tabla 2.1 da su valor para ciertos materiales ordinarios.

TABLA 2.1
Coeficiente de rozamiento estático de algunos materiales

Material	Coeficiente de rozamiento estático μ_s
Hielo sobre hielo	0,05-0,15
Cuero, sobre madera	0,3-0,4
Sobre metal	0,6
Esquí encerado sobre nieve seca	0.04
Acero sobre acero en seco	0,6
Lubricado	0,10
Madera sobre madera, en seco	0.25-0.50
Sobre metal,en seco	0,2-0,6

Ejemplo 1. Un bloque de hielo de 50 kp reposa sobre un lago helado. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie vale 0,05, ¿cuál es la fuerza máxima de rozamiento estático entre el bloque y la superficie? ¿Se pondrá el bloque en movimiento si se le aplica una fuerza horizontal de 2 kp?
Como el bloque está en reposo, la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ que la superficie ejerce sobre él mismo es igual a $-\mathbf{F}_g$, de modo que $F_c = 50$ kp. Entonces, por la ecuación 2.2, la máxima fuerza de rozamiento estático es

$$F_{f,\,max} = \mu_s F_c = (0{,}05)\,(50\ \text{kp}) = 2{,}5\ \text{kp}$$

Si se aplica al bloque una fuerza horizontal de 2 kp, la fuerza real de rozamiento será de 2 kp opuesta a la fuerza aplicada, de modo que el bloque no se moverá. Si la fuerza aplicada sobrepasa los 2,5 kp, la fuerza de rozamiento alcanzará su valor máximo 2,5 kp, de modo que la fuerza horizontal total no será nula y el bloque no permanecerá en reposo.
El término estático se refiere al hecho de que la Ec. 2.3 se cumple solamente mientras el cuerpo está en reposo. Una vez que F_a excede de $\mu_s F_c$, el cuerpo no está ya en equilibrio y empezará, por lo tanto, a deslizar. La fuerza de rozamiento cambia ahora de carácter y depende de la velocidad del objeto. En problemas sencillos se desprecia esta dependencia, y el rozamiento móvil se toma como constante, proporcional asimismo a F_c. Para cuerpos móviles tenemos

$$F_f = \mu_k F_c \qquad 2.4$$

donde μ_k, el coeficiente de rozamiento móvil, o *coeficiente de rozamiento cinético*, es generalmente menor que μ_s. La Tabla 2.2 da el coeficiente de rozamiento cinético de algunas sustancias ordinarias.

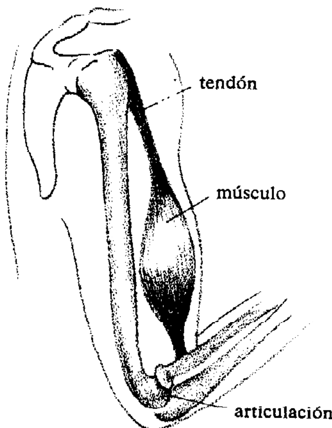


FIGURA 2.14
Un músculo conectado a dos huesos a través de una articulación.

Fuerza muscular

La postura y el movimiento de los animales están controlados por fuerzas producidas por los músculos. Un músculo consta de un gran número de *fibras* cuyas células son capaces de contraerse al ser estimuladas por impulsos que llegan a ellas procedentes de los nervios. Un músculo está generalmente unido en sus extremos a dos huesos diferentes por medio de *tendones* (Fig. 2.14). Los dos huesos están

* μ es la letra griega mu.

enlazados por una conexión flexible llamada *articulación*. La contracción del músculo produce dos pares de fuerzas que actúan sobre los dos huesos y los músculos en el punto donde están ligados los tendones. Éstas son las fuerzas de acción-reacción entre cada hueso y el músculo.
La fuerza máxima que puede ejercer un músculo depende del área de su sección transversal, y en el hombre es de unos 3 a 4 kp/cm². Esto es, para producir una fuerza muscular F_m de 60 kp se necesita un músculo con una sección transversal de 15 o 20 cm². Esta idea fue ya empleada en el Apart. 1.4 cuando decíamos que la fuerza crecía como L^2. Un animal cuyo tamaño (lineal) es L veces el de un animal más pequeño de forma semejante posee músculos de sección transversal L^2 veces la del animal más pequeño y por lo tanto el animal mayor tiene L^2 veces la fuerza del más pequeño.
El estudio del funcionamiento de las fuerzas musculares para producir movimiento y equilibrio en el hombre recibe el nombre de *cinesiología o biomecánica*. Es de particular importancia para atletas y terapeutas físicos, quienes necesitan saber qué fuerzas se requieren para producir movimientos específicos del cuerpo. Ciertos aspectos de este tema se estudiarán en los ejemplos y problemas de este libro.

TABLA 2.2. Coeficiente de rozamiento cinético de algunos materiales.

Material	Coeficiente de rozamiento cinético μ_k
Latón sobre hielo	0,02
Hielo sobre hielo	0,02
Goma sobre cemento	1,02
Madera encerada:	
Sobre nieve seca	0,04
Sobre nieve húmeda	0,14

Compresión y tensión

Un bloque sólido que tiene dos fuerzas opuestas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ presionándole a uno y otro lado (Fig. 2.15) estará en equilibrio. Sin embargo, difiere netamente en cierto sentido de un bloque sobre el que no actúan fuerzas. Cuando actúan fuerzas opuestas se dice que el bloque está *comprimido* o en un estado de *compresión*; el módulo C de la compresión es igual al módulo de una u otra de las fuerzas que actúan sobre él, es decir, $C = F_1 = F_2$. (Recuérdese que empleamos los símbolos en cursiva para indicar sólo el módulo de la fuerza.)
Asimismo, un bloque en equilibrio podría tener dos fuerzas opuestas tirando de él, como en la Fig. 2.16. En este caso se dice que el bloque se encuentra en un estado de *tensión*, y el módulo T de la tensión es igual de nuevo al módulo de una u otra de las fuerzas que actúan sobre él ($T = F_1 = F_2$).



FIGURA 2.15
Un bloque comprimido por dos fuerzas opuestas que presionan sobre él.



FIGURA 2.16
Un bloque en tensión por dos fuerzas opuestas que tiran de él.

Cuerda flexible y tendones

Una cuerda flexible, tal como una cinta, cordel o tendón, posee varias propiedades especiales:
1. Puede hallarse en un estado de tensión pero no de compresión.
2. Sólo puede transmitir una fuerza en sentido longitudinal. (Esto contrasta con un bastón sólido, por ejemplo, un palo de golf o un bate de beisbol, que puede ejercer una fuerza tanto longitudinal como perpendicularmente.)
3. Si no existe rozamiento, la tensión es la misma en todos los puntos a lo largo de la cuerda.

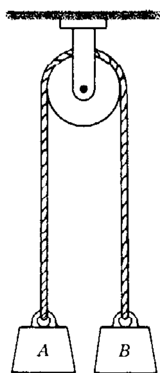


FIGURA 2.17
Dos pesos unidos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento.

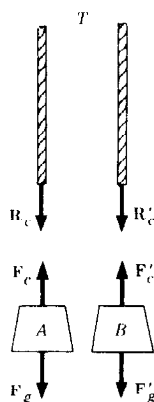


FIGURA 2.18
Las fuerzas que actúan sobre los dos pesos y la cuerda de la Fig. 2.17.



FIGURA 2.19
Dos fuerzas con la misma dirección.



FIGURA 2.20
La suma de las dos fuerzas de la Fig. 2.19.



FIGURA 2.21
Dos fuerzas en dirección opuesta.

Ejemplo 2. La Fig. 2.17 muestra dos pesos *A* y *B*, unidos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. Supongamos que todo el sistema está en equilibrio y sea $\mathbf{F}_g$ la fuerza de la gravedad sobre el peso *A*. ¿Cuál es la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}'_g$ sobre el peso *B*?

De acuerdo con la primera ley, la cuerda debe ejercer una fuerza $\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_g$ sobre *A* dirigida hacia arriba y, por la tercera ley, el peso ejerce entonces la fuerza de reacción $\mathbf{R}_c = -\mathbf{F}_c = -(-\mathbf{F}_g) = \mathbf{F}_g$ sobre la cuerda y hacia abajo (Fig. 2.18). Aunque $\mathbf{R}_c$ es igual a la fuerza de la gravedad ejercida sobre el peso, en sí no es una fuerza de gravitación.

Con la fuerza $\mathbf{R}_c$ aplicada a un extremo, la cuerda posee una tensión $T = R_c = F_g$. Esta tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda (puesto que la polea carece de rozamiento), y de este modo la fuerza $\mathbf{R}'_c$ que ejerce hacia abajo el peso *B* sobre la cuerda también es igual en módulo a $T = F_g$. La reacción a $\mathbf{R}'$ es $\mathbf{F}'_c = -\mathbf{R}'_c$, que es una fuerza hacia arriba que actúa sobre el peso *B* (Fig. 2.18). De nuevo por la primera ley, la fuerza total sobre *B* debe ser cero, luego la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}'_g$ es igual a $-\mathbf{F}'_c = \mathbf{R}'_c$ y posee un módulo igual a $T = F_g$. Por lo tanto, los dos pesos deben ser iguales en el equilibrio.

Esta larga discusión muestra que una cuerda puede ser empleada para cambiar la dirección de una fuerza sin modificar su módulo. Esto es muy importante en biomecánica, donde los tendones se utilizan para cambiar la dirección de la fuerza de un músculo. Estos tendones pasan por encima de los huesos a guisa de poleas. Los fluidos lubricantes reducen casi a cero el rozamiento entre el tendón y el hueso.

2.3. EJEMPLOS DE FUERZAS ALINEADAS

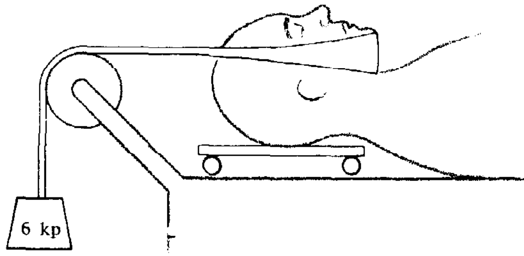
Se dice que dos fuerzas están alineadas si tienen la misma dirección o direcciones opuestas. Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de la Fig. 2.19 tienen la misma dirección y la Fig. 2.20 muestra que el módulo de su suma $\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es igual a la suma de los módulos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Esto es, si el módulo de $\mathbf{F}_1$ es 8 kp y el de $\mathbf{F}_2$ es 5 kp, el módulo de $\mathbf{S}$ es 13 kp.

La Fig. 2.21 muestra dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que poseen direcciones opuestas. En este caso el módulo de su suma $\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es igual a la *diferencia* de los módulos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (Fig. 2.22). Esto es, si el módulo de $\mathbf{F}_1$ es 8 kp y el de $\mathbf{F}_2$ es 5 kp, el módulo de $\mathbf{S}$ es 3 kp.

Si las dos fuerzas no están alineadas, su suma no es igual ni a la suma ni a la diferencia de los módulos de las fuerzas individuales, como puede verse en la Fig. 2.4. Aplazamos hasta el Apart. 2.5 la discusión de este caso más complicado y ahora consideramos algunos ejemplos de problemas en los que las fuerzas están todas alineadas.

Ejemplo 1. ¿Cuánto vale la tensión T_n ejercida sobre las vértebras del cuello de un paciente en el dispositivo de tracción de la Fig. 2.23?

El dispositivo consiste en una fina correa conectada a una cuerda que pasa por la polea y que tiene en su extremo un peso de 6 kp. (La cabeza reposa sobre una plataforma móvil para eliminar el rozamiento entre la cabeza y la mesa.) La finalidad de este dispositivo es aplicar una tensión sobre las estructuras cervicales (las siete vértebras del cuello). Como el peso de 6 kp está en reposo, la tensión T_c en la cuerda es 6 kp.



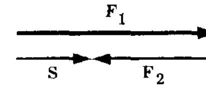


FIGURA 2.22
La suma de las dos fuerzas de la Fig. 2.21.

FIGURA 2.23
Un paciente en tracción de cuello.

Esto se deduce de argumentos idénticos a los utilizados en la discusión de las Figs. 2.17 y 2.18. Por la misma naturaleza de una cuerda flexible (Apart. 2.2), esta tensión es la misma en ambos extremos, de aquí que la cabeza deba ejercer sobre la cuerda una fuerza de 6 kp dirigida hacia la derecha. La reacción a ésta es una fuerza de 6 kp hacia la izquierda, $\mathbf{F}_a$, ejercida por la cuerda sobre la cabeza. Toda la finalidad del peso, polea, cuerda y barboquejo es aplicar esta fuerza $\mathbf{F}_a$ a la cabeza. Desde un punto de vista intuitivo, puede resultar obvio al lector que sea esto lo que hace el dispositivo de tracción, pero recordemos que la fuerza gravitacional de 6 kp actúa sólo sobre el peso. Debemos volver a utilizar las leyes primera y tercera para deducir que la fuerza aplicada por la cuerda a la cabeza (que no es una fuerza gravitacional) es también de 6 kp.



Yendo un poco más lejos, podemos analizar las fuerzas sobre la cabeza. Puesto que la cabeza está en equilibrio, la fuerza total sobre ella debe ser cero. Por consiguiente, debe existir otra fuerza sobre la cabeza igual a $-\mathbf{F}_a$, como se indica en la Fig. 2.24. El único objeto al que puede aplicarse esa fuerza es el cuello, y de este modo concluimos que existe una fuerza de contacto $\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_a$ ejercida por el cuello sobre la cabeza. La reacción a $\mathbf{F}_c$ es la fuerza de contacto $\mathbf{R}_c = -\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_a$ que la cabeza aplica al cuello. Por lo tanto, haciendo uso de nuevo de la primera y de la tercera ley llegamos a la conclusión de que existe una fuerza de módulo 6 kp que tira del cuello hacia la izquierda.

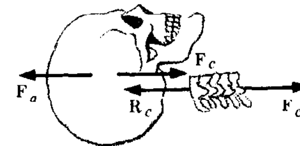


FIGURA 2.24
Las fuerzas y la cabeza del paciente en tracción de cuello sin rozamiento.

Puesto que el cuello está también en equilibrio, hay una fuerza de 6 kp hacia la derecha ejercida sobre el cuello por el resto de la columna vertebral. El cuello está, por consiguiente, en tensión y el módulo de esta tensión T_n es 6 kp.

OBSERVACION. Este resultado no es muy sorprendente. De hecho, podíamos haber sabido la respuesta desde el comienzo y nos preguntamos por qué ha sido necesario semejante razonamiento para obtenerlo. Lo importante es que las leyes primera y tercera, cuando se utilizan de manera adecuada, conducen a resultados en concordancia con lo que esperábamos. Tales resultados ayudan a consolidar la confianza en la validez de estas leyes.

Ejemplo 2. ¿Qué valor marca la balanza de la Fig. 2.25 cuando el bloque *B*, que pesa 10 kp, se coloca sobre el bloque *A*, que pesa 5 kp?

OBSERVACION. Todo el mundo sabe que la balanza marcará 15 kp. El mismo principio se aplica cuando alguien se sube a la balanza. Ésta indica la suma de las fuerzas gravitatorias sobre todas las partes del cuerpo, aunque sólo los pies estén en contacto directo con la balanza. Cuanto más se piensa en estas experiencias cotidianas, más misteriosas parecen. Ha de haber al-

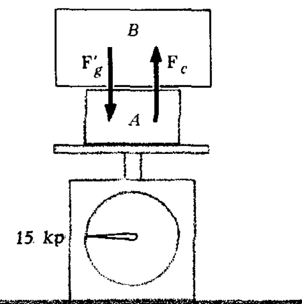


FIGURA 2.25
Las fuerzas que actúan sobre *B*, el peso de 10 kp.

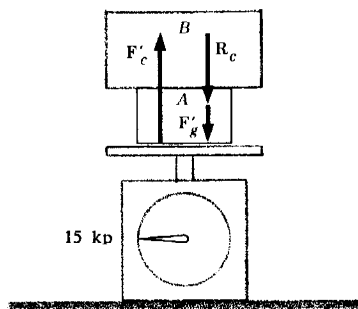


FIGURA 2.26
Las fuerzas que actúan sobre A, el peso de 5 kp.

guna ley fundamental de la naturaleza que dé cuenta de ellas. Esta ley es la tercera ley de Newton del movimiento. Tal como se ha dicho en el Apart. 2.1, la verificación de esta ley es su capacidad de explicar algunas de las experiencias más corrientes de la vida cotidiana.

Para analizar el caso de los dos pesos sobre la balanza empecemos considerando B, el peso de 10 kp (Fig. 2.25). Puesto que existe una fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$ de 5 kp que actúa sobre él hacia abajo, de acuerdo con la primera ley debe haber una fuerza hacia arriba también de 10 kp. La única fuente posible de esta segunda fuerza es la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ que ejerce A sobre B. Por lo tanto $\mathbf{F}_c$ es una fuerza de 10 kp dirigida hacia arriba.

Sobre el peso A actúan la fuerza gravitacional de 5 kp $\mathbf{F'}_g$ y la fuerza de contacto hacia arriba $\mathbf{F'}_c$ ejercida por la balanza (Fig. 2.26). Sin embargo, el módulo de $\mathbf{F'}_c$ en este caso no es igual a 5 kp porque $\mathbf{F'}_g$ y $\mathbf{F'}_c$ no son las únicas fuerzas que actúan sobre A. La tercera ley establece que existe una fuerza de reacción a $\mathbf{F}_c$, $\mathbf{R}_c$, que es una fuerza de contacto que B ejerce sobre A. La primera ley exige que la suma $\mathbf{F'}_g + \mathbf{F}_c + \mathbf{R}_c$ sea cero. La suma $\mathbf{F'}_g + \mathbf{R}_c$ es una fuerza de 15 kp dirigida hacia abajo, luego $\mathbf{F'}_c$ es una fuerza de 15 kp dirigida hacia arriba. Por último, y también según la tercera ley, la reacción a $\mathbf{F'}_c$, $\mathbf{R'}_c$, es una fuerza de 15 kp ejercida por A hacia abajo sobre la balanza. Es esta fuerza la que registra la balanza. La tercera ley es la que garantiza que la fuerza sobre la balanza (que es una fuerza de contacto y no una fuerza gravitacional) sea igual en módulo a la fuerza gravitacional total sobre todos los objetos colocados en la balanza.

Es particularmente importante señalar que en este último ejemplo la fuerza de contacto $\mathbf{F'}_c$ sobre el peso inferior A es mayor que la fuerza de contacto también hacia arriba $\mathbf{F}_c$, ejercida sobre el peso superior B. Es evidentemente cierto que en una estructura vertical la fuerza de contacto sobre una parte próxima a la base de la estructura es mayor que la fuerza de contacto sobre una parte próxima a la cúspide, ya que cada parte soporta el peso total de todas las otras partes situadas más arriba. En muchas estructuras, naturales y artificiales, las partes inferiores son más anchas que las superiores para ser suficientemente resistentes y soportar una fuerza mayor. Por ejemplo, en la columna vertebral del hombre, las vértebras aumentan de tamaño continuamente de arriba a abajo por esta razón (Fig. 2.27).



FIGURA 2.27
Las vértebras de la columna vertebral aumentan de tamaño de arriba abajo.

Ejemplo 3. La Fig. 2.28 muestra dos bloques de 12 N conectados por una cuerda. El coeficiente de rozamiento estático μ_s entre los bloques y la mesa es 0,4. ¿Cuál es la fuerza mínima $\mathbf{F}_a$ que se ha de aplicar al bloque A para mover todo el conjunto? ¿Cuál será la tensión en la cuerda de unión entre ambos bloques cuando éstos empiezan a moverse?

Para analizar este problema consideremos por separado las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques. Sobre el bloque A actúan 5 fuerzas (Fig. 2.29): la fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$ ejercida hacia abajo por la Tierra, la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ dirigida hacia arriba por la mesa, la fuerza aplicada $\mathbf{F}_a$ ejercida hacia la derecha por un agente externo,

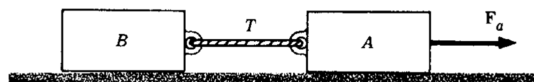


FIGURA 2.28
Dos bloques conectados por una cuerda y accionados por una fuerza aplicada $\mathbf{F}_a$.

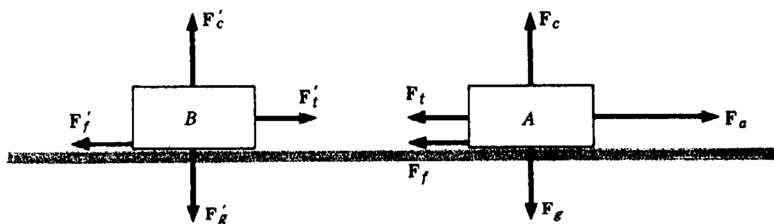


FIGURA 2.29
Fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques de la Fig. 2.28.

la fuerza de rozamiento F_f ejercida por la mesa hacia la izquierda y la fuerza $\mathbf{F}_t$ ejercida por la cuerda hacia la izquierda. La Fig. 2.29 muestra también las cuatro fuerzas ($\mathbf{F}'_g$, $\mathbf{F}'_c$, $\mathbf{F}'_f$ y $\mathbf{F}'_t$) que actúan sobre el bloque *B*.

A pesar de que estas fuerzas no están sobre la misma línea, las fuerzas horizontales y las verticales pueden tratarse por separado. Por lo tanto, como ninguno de los bloques se mueve verticalmente, las fuerzas verticales sobre cada uno deben sumar cero. En consecuencia, la fuerza de contacto sobre cada bloque tiene el mismo módulo que el peso del cuerpo, 12 N en este caso. La fuerza máxima de rozamiento que la mesa puede ejercer sobre cada bloque puede calcularse ahora a partir de la Ec. 2.2:

$$F_{f,\max} = \mu_s F_c = (0{,}4)(12\ \mathrm{N}) = 9{,}6\ \mathrm{N}$$

A medida que aumenta la fuerza aplicada $\mathbf{F}_a$, también crece la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_f$, manteniendo el bloque en reposo. A un cierto valor crítico de F_a, la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo; si se aumenta aún F_a, los bloques se ponen en movimiento. Este valor crítico viene dado por la condición de que las fuerzas horizontales sobre cada bloque se anulen cuando F_f es máximo.

Para el bloque *A* esta condición es

$$F_a - F_t - 9{,}6\ \mathrm{N} = 0$$

Para el bloque *B*, la condición es

$$F'_t - 9{,}6\ \mathrm{N} = 0$$

La segunda condición nos dice que la cuerda ejerce una fuerza F'_t de 9,6 N sobre el bloque *B*. Pero la cuerda ejerce la misma fuerza en el otro extremo, de modo que $F_t = 9{,}6$ N también, y la fuerza aplicada es

$$F_a = 9{,}6\ \mathrm{N} + F_t = 19{,}2\ \mathrm{N}$$

Como la tensión en la cuerda es igual a F_t, $T = 9{,}6$ N.

Adviértase que la fuerza total de 19,2 N aplicada al bloque *A* se reduce por el rozamiento sobre el bloque *A* a una fuerza de sólo 9,6 N aplicada al bloque *B*.

2.4. COMPONENTES DE LA FUERZA

A veces es conveniente reemplazar en un problema una fuerza **F** por dos *fuerzas perpendiculares* $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ cuya suma vectorial es igual a **F**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

Las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se denominan las *componentes* de **F** y la operación de obtener $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ recibe el nombre de resolución de **F** en sus componentes.

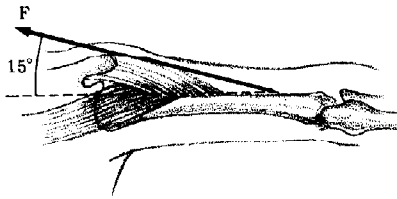


FIGURA 2.30
La fuerza ejercida sobre el húmero por el músculo deltoides.

La Fig. 2.30 muestra la fuerza **F** ejercida por el músculo deltoides sobre el húmero cuando el brazo se mantiene en posición horizontal. Por medio de estudios de rayos X se ha observado que el músculo ejerce esta fuerza a 15° aproximadamente del húmero. En el Cap. 3 veremos cómo puede calcularse el módulo de esta fuerza, pero ahora supondremos que es exactamente 30 kp. Esta fuerza lleva a cabo dos funciones distintas: (1) *sostener* el brazo contra la fuerza de la gravedad y (2) *estabilizar* la articulación tirando del húmero contra el omóplato. El módulo de la fuerza implicada en cada una de estas funciones se halla resolviendo **F** en sus componentes paralela y perpendicular al húmero. Dichas componentes pueden hallarse sea por el método *trigonométrico*, sea por el método *gráfico.*

Método gráfico

Dicho método utiliza una construcción gráfica, análoga al método empleado en el Apart. 1.2 para hallar la distancia de una orilla a otra del río:

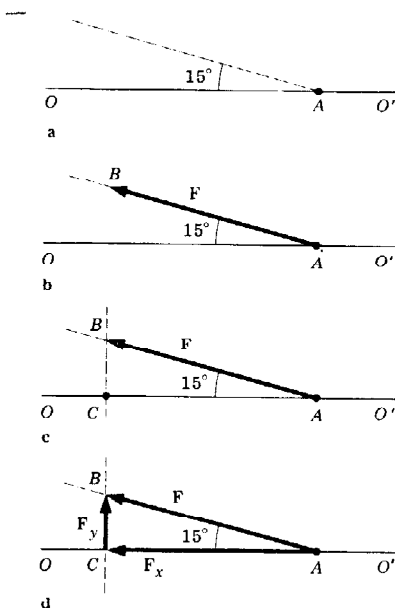


FIGURA 2.31
Procedimiento gráfico para hallar los componentes de un vector dado.

1. Trazar una línea horizontal *OO'* para representar la dirección del húmero y, por medio de un transportador, dibujar una línea de trazos que forme un ángulo de 15° con *OO'* (Fig. 2.31*a*). Esta línea de trazos se dibuja a partir de un punto arbitrario *A* sobre *OO'* y representa la dirección de **F**.
2. Usando una escala conveniente (por ejemplo, 2 kp = 1 cm), dibujar sobre la línea de trazos un vector de longitud apropiada (15 cm) que represente a **F** (Fig. 2.31*b*).
3. Desde el extremo de **F** (punto *B*) trazar una línea perpendicular a *OO'* (Fig. 2.31*c*). Sea *C* el punto de intersección de esta línea con *OO'*.
4. Trazar un vector $\mathbf{F}_x$ desde *A* a *C* y un vector $\mathbf{F}_y$ desde *C* a *B* (Fig. 2.31*d*). Éstas son las componentes pedidas de **F** puesto que son paralela y perpendicular al húmero *(OO')* y su suma vectorial es **F**.

Los módulos de $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se hallan midiendo las longitudes *AC* y *CB* con una regla. En este caso, con la escala 2 kp = 1 cm, la longitud de *AC* sería de unos 14,5 cm y la longitud de *CB* de unos 3,9 cm. Por lo tanto obtenemos

$$F_x = 14{,}5 \text{ cm} \times 2 \text{ kp/cm} = 29 \text{ kp}$$

y

$$F_y = 3{,}9 \text{ cm} \times 2 \text{ kp/cm} = 7{,}8 \text{ kp}$$

OBSERVACIÓN. La suma de los módulos F_x y F_y es mayor que el propio módulo *F*. Esto es debido a que las dos fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ no están alineadas. Recordemos que, en general, la adición vectorial implica módulo y dirección, no sólo módulo.

Este método gráfico de hallar las componentes de un vector es directo y fácil de aprender. Con un cuidado razonable dará resultados bastante precisos para la mayoría de nuestros fines. Sin embargo, resulta algo pesado y de precisión limitada, especialmente si el ángulo es próximo a 0 o 90°. Es más rápido y más preciso hacer uso de la trigonometría para hallar el módulo de las componentes.

Método trigonométrico

En el método trigonométrico solamente necesitamos hacer un croquis aproximado de **F** y sus componentes, teniendo cuidado de que **F** sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo. El croquis se parecerá a la Fig. 2.31*d*, a partir de la cual es evidente que el seno* de 15° es F_y/F,

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{F_y}{F}$$

de donde

$$F_y = F \times \operatorname{sen} 15^\circ = 30\,\text{kp} \times 0{,}259 = 7{,}75\ \text{kp}$$

Del mismo modo, el coseno de 15° es F_x/F,

$$\cos 15^\circ = \frac{F_x}{F}$$

luego

$$F_x = F \times \cos 15^\circ = 30\,\text{kp} \times 0{,}966 = 28{,}98\ \text{kp}$$

Suma de vectores usando componentes

Pueden usarse componentes para efectuar sumas de vectores porque cada componente de la suma $\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ de dos (o más) vectores es igual a la suma de los correspondientes componentes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Ello puede verse en la Fig. 2.32, que muestra que

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{F}_{1x} + \mathbf{F}_{2x} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{S}_y = \mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y}$$

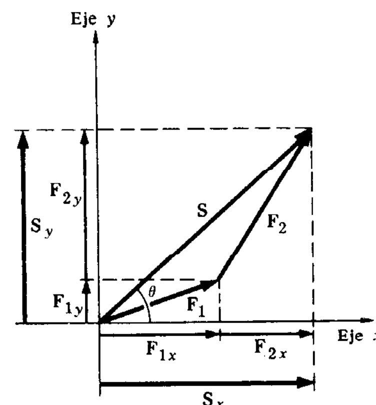


FIGURA 2.32
Las componentes de la suma **S** de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son la suma de los componentes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$

En cada suma, los componentes están sobre la misma línea, por lo cual sólo se necesita la suma habitual.
Una vez se conocen los componentes de un vector, puede reconstruirse fácilmente el vector mismo. En la Fig. 2.33 vemos que **S** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados $\mathbf{S}_x$ y $\mathbf{S}_y$; en consecuencia, por el teorema de Pitágoras, el módulo de **S** vale

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

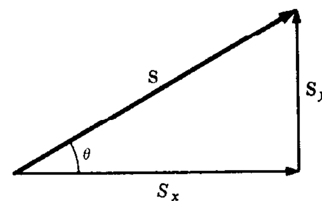


FIGURA 2.33
Un vector **S** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los componentes de **S**.

* Para un repaso de la trigonometría ver el Apéndice II y para una tabla de senos y cosenos, la contratapa posterior del libro.

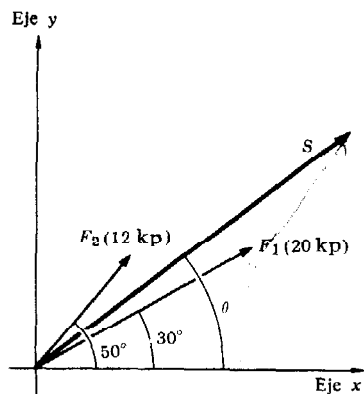


FIGURA 2.34
Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y su suma **S**.

El ángulo θ que **S** forma con $\mathbf{S}_x$ está dado por

$$\tan\theta = \frac{S_y}{S_x} \qquad \text{o} \qquad \theta = \arctan\frac{S_y}{S_x}$$

Ejemplo. ¿Cuál es el módulo y la dirección de la suma **S** de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de la Fig. 2.34?
Los módulos de los componentes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son

$$\begin{aligned} F_{1x} &= (20\ \text{kp})(\cos 30°) = 17{,}3\ \text{kp}\\ F_{1y} &= (20\ \text{kp})(\text{sen}30°) = 10{,}0\ \text{kp}\\ F_{2x} &= (12\ \text{kp})(\cos 50°) = 7{,}7\ \text{kp}\\ F_{2y} &= (12\ \text{kp})(\text{sen}50°) = 9{,}2\ \text{kp}\end{aligned}$$

Las componentes de la suma **S** de dichas fuerzas son

$$S_x = F_{1x} + F_{2x} = 25{,}0\ \text{kp}; \qquad S_y = F_{1y} + F_{2y} = 19{,}2\ \text{kp}$$

y por lo tanto el módulo de **S** es

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(25{,}0)^2 + (19{,}2)^2} = 31{,}5\ \text{kp}$$

y el ángulo θ que **S** forma con el eje x es

$$\theta = \arctan\frac{S_y}{S_x} = \arctan 0{,}768 = 37{,}5°$$

Este último resultado se obtiene buscando en la columna de la tangente de las tablas de funciones trigonométricas (ver contracubierta posterior) el valor de 0,768. En este caso cae entre tan 37° y tan 38°, de modo que θ = 37,5°.

2.5. EJEMPLOS DE FUERZAS EN UN PLANO

Un problema típico de Mecánica es hallar algunas de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo cuando nos dan todas las otras. El problema se resuelve utilizando la primera ley (Propiedad 5) y la regla de la adición vectorial de las fuerzas (Propiedad 4). Si las fuerzas están en un plano y no precisamente alineadas, se pueden hallar por este procedimiento dos magnitudes desconocidas. Estas pueden ser el módulo y la dirección de una sola fuerza, el módulo de dos fuerzas, o (menos frecuentemente) la dirección de dos fuerzas.

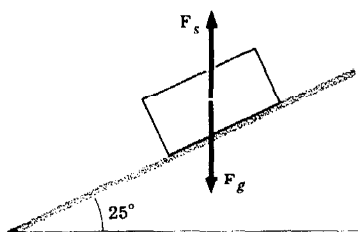


FIGURA 2.35
Un bloque en reposo sobre un plano inclinado 25° con respecto a la horizontal.

Ejemplo 1. ¿Cuánto valen los módulos de las fuerzas de rozamiento y de contacto que actúan sobre un bloque de 8 kp colocado sobre un tablón que tiene una inclinación de 25° respecto de la horizontal (Figura 2.35)? ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano para impedir que el bloque se deslice?
La fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$ sobre el bloque es una fuerza de 8 kp dirigida verticalmente hacia abajo. Como el bloque permanece en reposo, la fuerza de superficie $\mathbf{F}_s$ sobre éste ha de ser una fuerza de 8 kp dirigida verticalmente hacia arriba. Por definición, las fuerzas de contacto y de

rozamiento, $\mathbf{F}_c$ y $\mathbf{F}_f$, son las componentes de $\mathbf{F}_s$ perpendicular y paralela al plano inclinado (Fig. 2.36).

Los módulos de $\mathbf{F}_c$ y $\mathbf{F}_f$ pueden hallarse fácilmente por los métodos del Apart. 2.4 una vez conocido el ángulo θ entre $\mathbf{F}_s$ y $\mathbf{F}_c$. Un teorema de geometría establece que si los lados correspondientes de dos ángulos son perpendiculares, los ángulos son iguales (Teorema 3, Apéndice III). De este modo, puesto que $\mathbf{F}_s$ es perpendicular a la horizontal y $\mathbf{F}_c$ es perpendicular a la superficie inclinada, el ángulo θ entre ellas es igual al ángulo de 25° entre el plano inclinado y la horizontal. Entonces a partir de la Fig. 2.36 vemos que

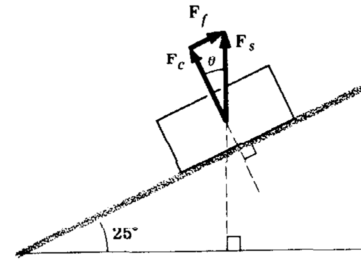


FIGURA 2.36
La fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ y la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_f$ son las componentes perpendicular y paralela al plano inclinado de la fuerza superficial $\mathbf{F}_s$.

$$F_c = F_s \times \cos\theta = 8\ \mathbf{kp} \times \cos 25° = 7{,}25\ \mathbf{kp}$$
$$F_f = F_s \times \operatorname{sen}\theta = 8\ \mathrm{kp} \times \operatorname{sen} 25° = 3{,}38\ \mathrm{kp}$$

Podríamos comprobar estos resultados hallando $\mathbf{F}_c$ y $\mathbf{F}_f$ gráficamente Con este resultado la desigualdad (Ec. 2.3)

$$F_f \leq \mu_s F_c$$

se convierte en

$$3{,}38\ \mathbf{kp} \leq \mu_s \times 7{,}25\ \mathbf{kp}$$

Dividiendo los dos miembros de esta desigualdad por 7,25 kp, obtenemos

$$\mu_s \geq \frac{3{,}38\ \mathbf{kp}}{7{,}25\ \mathbf{kp}} = 0{,}466$$

Es decir, μ_s ha de valer como mínimo 0,466 para que el bloque no se deslice sobre el plano inclinado.

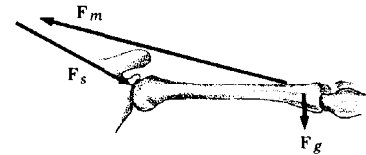


FIGURA 2.37
Las fuerzas que actúan sobre un brazo estirado.

Ejemplo 2. Consideremos de nuevo el brazo extendido de la Fig. 2.30. La Fig. 2.37 muestra las tres fuerzas que actúan sobre él: la fuerza muscular $\mathbf{F}_m$ ejercida por el músculo deltoides, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ y la fuerza superficial $\mathbf{F}_s$ aplicada al húmero en la articulación. Suponiendo que el brazo pesa 3,4 kp y que el módulo de $\mathbf{F}_m$ sea 30 kp, ¿cuál es el módulo y la dirección de $\mathbf{F}_s$? Es decir, ¿cuál debe ser $\mathbf{F}_s$ para que la suma de las tres fuerzas sea cero?

Para responder a esto, debemos hallar primero la suma de las fuerzas conocidas, $\mathbf{F}_m$ y $\mathbf{F}_g$. Se escoge una escala conveniente (por ejemplo, 2 kp = 1 cm) y se traza una línea de longitud apropiada (1,7 cm) para representar $\mathbf{F}_g$ (Fig. 2.38*a*). Se traza con un transportador una *línea que pase por el extremo de* $\mathbf{F}_g$ *y forme un ángulo con ella de 75°*, el ángulo entre $\mathbf{F}_m$ y $\mathbf{F}_g$ en la Fig. 2.37. Desde el extremo de $\mathbf{F}_g$ se dibuja un vector de longitud apropiada (15 cm) a lo largo de esta línea para representar a $\mathbf{F}_m$ (Fig. 2.38*b*). Entonces el vector dibujado desde el origen de $\mathbf{F}_g$ al extremo de $\mathbf{F}_m$ es la suma de $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_m$. Cuando se suma la fuerza superficial a $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m$ debe resultar una fuerza total nula. Esto sólo es posible si $\mathbf{F}_s$ es igual a $-(\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m)$, es decir, si es de dirección opuesta a la suma de $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_m$. Esto se muestra en la Fig. 2.38*b*: la suma de los tres vectores $\mathbf{F}_g$, $\mathbf{F}_m$ y $\mathbf{F}_s$ es cero.

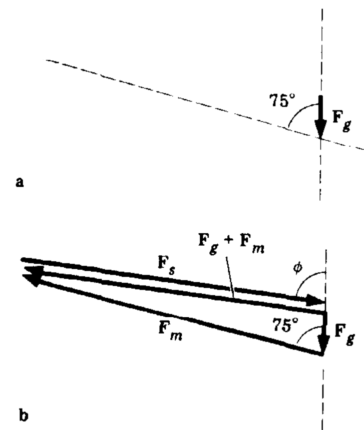


FIGURA 2.38
Procedimiento gráfico para hallar la fuerza $\mathbf{F}_s$ que actúa sobre el brazo de la Fig. 2.37

El módulo y la dirección de $\mathbf{F}_s$ se obtiene a partir del dibujo a escala midiendo su longitud y el ángulo que forma con $\mathbf{F}_g$. Podríamos hacer tal dibujo y hallaríamos que el módulo de $\mathbf{F}_s$ es de unos 29,3 kp y que el ángulo ϕ que forma con la vertical es de unos 81°.

OBSERVACIÓN. *A la fuerza en la articulación se le ha llamado fuerza superficial porque, a partir de la información dada, no hay modo de determinar si se trata de una fuerza de contacto pura o no. Para ser una fuerza de contacto pura debe ser perpendicular a la superficie del húmero en el punto donde este hueso alcanza la articulación. Si no es exactamente perpendicular, entonces sólo su componente perpendicular a la superficie del húmero es una fuerza de contacto y su componente paralela a esta superficie es una fuerza de rozamiento. Sin embargo, sabemos por la fisiología que el coeficiente de rozamiento entre los huesos de una articulación es extremadamente pequeño, de modo que existe muy poca fricción. Por consiguiente,* $\mathbf{F}_s$ *es casi perpendicular a la superficie del húmero y está muy cerca de ser una fuerza de contacto pura.*

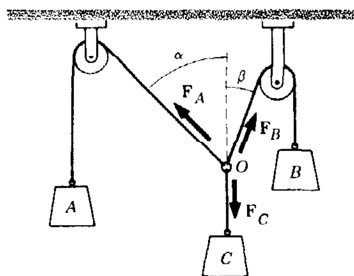


FIGURA 2.39
Sistema para aplicar tres fuerzas a un punto común *O*.

Ejemplo 3. Consideremos el dispositivo representado en la Fig. 2.39, que consta de tres cuerdas unidas en un punto común *O*. Los otros extremos de las cuerdas aparecen unidos a tres pesos diferentes *A*, *B* y *C*. Si *C* pesa 20 N y los ángulos α y β son 45° y 20° respectivamente, ¿cuánto valen *A* y *B*?
Cada peso ejerce una tensión sobre su cuerda igual a la fuerza de la gravedad que actúa sobre el peso, y cada cuerda ejerce sobre el punto *O* una fuerza de módulo igual a su tensión. De este modo, cada cuerda ejerce sobre *O* una fuerza de igual módulo que el peso colgado de ella. Las dos poleas permiten modificar las direcciones de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ hasta que *O* esté en equilibrio.

OBSERVACIÓN. Este dispositivo se emplea a menudo para demostrar la primera ley de Newton y la adición vectorial de fuerzas. En una experiencia se miden los pesos *A* y *B* y se comparan con los valores obtenidos de un cálculo como el que a continuación se muestra.
$\mathbf{F}_c$ es una fuerza cuyo módulo es 20 N y está dirigida verticalmente hacia abajo y $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ son fuerzas de dirección conocida y módulo desconocido. Es importante reconocer que esta situación es muy parecida a la del problema del bloque sobre el plano inclinado. Aquí, como allí, se conoce la suma de las fuerzas incógnitas:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_C$$

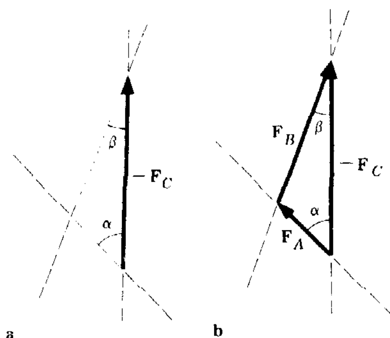


FIGURA 2.40
Procedimiento gráfico para hallar los módulos de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ de la Fig. 2.39.

Para hallar los módulos de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, se dibuja un vector que representa a $-\mathbf{F}_C$. Ésta es una fuerza de 20 N dirigida verticalmente hacia arriba, y con una escala de 1 N = 1 cm sería de 20 cm de larga (Fig. 2.40*a*). A partir del origen de $-\mathbf{F}_C$ se dibuja una línea de trazos que forme con ella un ángulo α = 45° y por el extremo de $-\mathbf{F}_C$ se dibuja otra línea de trazos con un ángulo β = 20°. Estas líneas están en las direcciones de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, y su punto de intersección determina los módulos de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ (Fig. 2.40*b*). Si hiciésemos esta construcción encontraríamos que $\mathbf{F}_A$ = 7,5 N y $\mathbf{F}_B$ = 16 N.
Este problema también puede resolverse por componentes. Los valores de las componentes horizontales (*x*) de las fuerzas se obtienen de la geometría de la Fig. 2.39:

$$F_{Ax} = F_A \cos(90° - \alpha) = F_A \cos 45° = 0{,}707F_A$$
$$F_{Bx} = F_B \cos(90° - \beta) = F_B \cos 70° = 0{,}342F_B$$
$$F_{Cx} = F_C \cos 90° = (20\ \text{N})(0) = 0$$

Como la suma de las componentes horizontales ha de ser nula, tenemos

$$-0{,}707F_A + 0{,}342F_B + 0 = 0$$

o bien

$$F_A = 0{,}484F_B \qquad 2.5$$

Obsérvese que al sumar las componentes hemos de restar el módulo de $\mathbf{F}_{Ax}$, ya que su sentido es opuesto a $\mathbf{F}_{Bx}$.
Análogamente, las componentes verticales *(y)* de las fuerzas son

$$F_{Ay} = F_A \operatorname{sen}(90° - \alpha) = F_A \operatorname{sen}45° = 0{,}707F_A$$
$$F_{By} = F_B \operatorname{sen}(90° - \beta) = F_B \operatorname{sen}70° = 0{,}940F_B$$
$$F_{Cy} = F_C \operatorname{sen}90° = (20\ \text{N})(1) = 20\ \text{N}$$

De nuevo, la suma de las componentes verticales ha de ser nula y, por lo tanto, tenemos

$$0{,}707F_A + 0{,}940F_B - 20\ \text{N} = 0 \qquad 2.6$$

Las ecuaciones 2.5 y 2.6 se han de resolver ahora simultáneamente para hallar F_A y F_B. Utilizamos la Ec. 2.5 para sustituir F_A en la Ec. 2.6, obteniendo

$$(0{,}707)(0{,}484F_B) + 0{,}940F_B = 20\ \text{N}$$

o

$$F_B = \frac{20\ \text{N}}{1{,}28} = 15{,}6\ \text{N}$$

Con este valor de F_B, la Ec. 2.5 da

$$F_A = (0{,}484)(15{,}6\ \text{N}) = 7{,}55\ \text{N}$$

Estos resultados concuerdan con los obtenidos por el método gráfico dentro de los límites de precisión de que es capaz dicho método.

Este último ejemplo muestra cómo puede usarse la trigonometría para resolver problemas de fuerzas complicados. Cuando se maneja con soltura, el método trigonométrico es más fácil y más preciso que el método gráfico, pero el método gráfico da resultados aceptables y habría de utilizarse mientras se aprende el método trigonométrico.

PROBLEMAS

1. Un bloque de 7 kp cuelga de una cuerda atada a un gancho en el techo. El gancho pesa 0,1 kp y se puede despreciar el peso de la cuerda. Dar el módulo y la dirección de las siguientes fuerzas: (*a*) fuerza de la gravedad sobre el bloque, (*b*) fuerza de contacto ejercida por la cuerda sobre el bloque, (*c*) fuerza de contacto ejercida por la cuerda sobre el gancho, (*d*) fuerza de la gravedad sobre el gancho, (*e*) fuerza de contacto ejercida por el gancho sobre la cuerda y (*f*) fuerza de contacto ejercida por el bloque sobre el gancho. (*g*) De estas fuerzas, ¿cuáles son pares acción-reacción? (*h*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

Resp. (*a*) 7 kp hacia abajo; (*b*) 7 kp hacia arriba; (*c*) 7 kp hacia abajo; (*d*) 0,1 kp hacia abajo; (*e*) 7 kp hacia arriba (*f*) 0 kp; (*g*) las de (*c*) y (*e*); (*h*) 7 kp.

2. Encima de un bloque de 4 kp colocado en una balanza se pone otro bloque de 12 kp. Dar el módulo y la dirección de las siguientes fuerzas: (*a*) fuerza de la gravedad sobre el bloque de 4 kp, (*b*) fuerza de contacto ejercida por la balanza sobre el bloque de 4 kp, (*c*) fuerza de contacto ejercida por el bloque de 12 kp sobre el de 4 kp, (*d*) fuerza de contacto ejercida por el bloque de 12 kp sobre la balanza y (*e*) fuerza de contacto ejercida por el bloque de 4 kp sobre el de 12 kp. (*f*) De estas fuerzas, ¿cuáles son pares acción-reacción?
3. ¿Cuáles son las tensiones T_1 y T_2 de las cuerdas de las Fig. 2.41?
Resp. 3 y 11 kp.

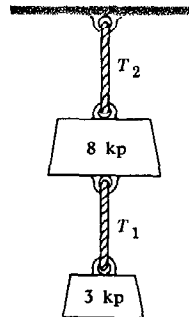


FIGURA 2.41 Problema 3.

4. ¿Cuál es la tensión de la cuerda de la Fig. 2.42?

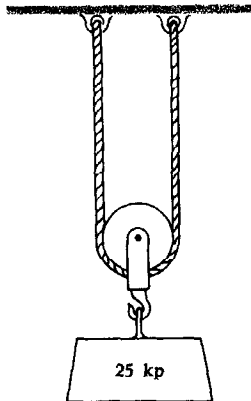


FIGURA 2.42 Problema 4.

5. (*a*) Hallar las tensiones T_1, T_2 y T_3 de las tres cuerdas de la Fig. 2.43. (*b*) ¿Qué fuerza debe aplicarse a la cuerda por la mano para sostener el peso de 50 kp
Resp. (a) 75, 50 y 25 kp; (*b*) 25 kp.

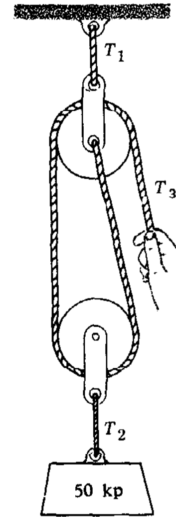


FIGURA 2.43 Problema 5.

6. Hallar las tensiones T_1, T_2 y T_3 de las tres cuerdas de la Fig. 2.44?

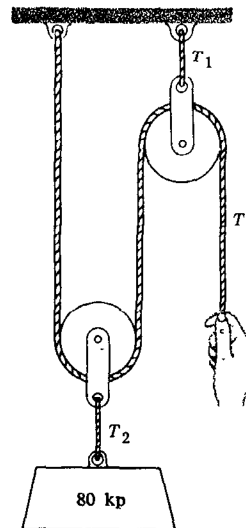


FIGURA 2.44 Problema 6.

7. La Fig. 2.45 representa un hombre de 70 kp de pie con los pesos de diferentes partes de su cuerpo indicados. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de contacto que sostiene la cabeza y el cuello? (Ésta la ejerce principalmente la séptima vértebra cervical.) (*b*) ¿Cuál es la fuerza que sostiene a un brazo? (Esta fuerza es ejercida por los músculos y ligamentos que abrazan la articulación del hombro.) (*c*) ¿Cuál es la fuerza total que sostiene al tronco en las dos articulaciones de la cadera? (Si el hombre está de pie y derecho, alrededor de la mitad de esta fuerza se ejerce en cada articulación.) (*d*) ¿Cuál es la fuerza de contacto total en las articulaciones de las rodillas? (*e*) Si el hombre se apoya en un pie, ¿cuál es la fuerza de contacto de la articulación de la rodilla sobre la que está apoyado? (*f*) ¿Cuál es la fuerza en la articulación de la rodilla que sostiene la pierna que no se apoya en el suelo?
Resp. (*a*) 5 kp; (*b*) 3,5 kp; (*c*) 49 kp; (*d*) 62 kp; (*e*) 66 kp; (*f*) 4 kp.

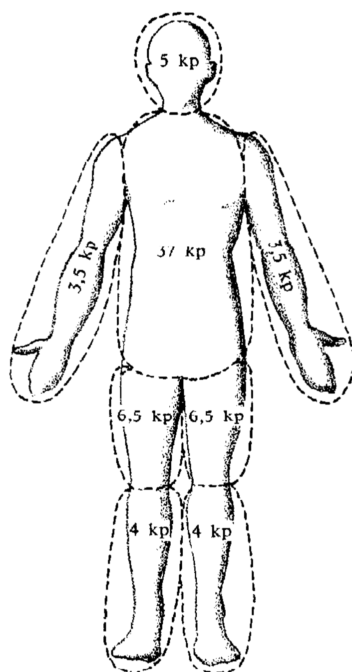


FIGURA 2.45 Problema 7.

8. ¿Cuál es el módulo de la fuerza horizontal necesaria para empujar por el suelo una canasta de 120 kp si el coeficiente de rozamiento estático entre la canasta y el suelo es 0,45?
9. Un bloque de madera de 2 kp colocado sobre una mesa también de madera se dispone a deslizar cuando se le aplica una fuerza horizontal de 0,8 kp. (*a*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa? (*b*) Encima del bloque se coloca un peso de 5 kp. ¿Cuál es el módulo de la fuerza horizontal necesario para mover ahora el bloque?
Resp. (*a*) 0,40; (*b*) 2,8 kp.
10. Un esquiador de 55 kp necesita un impulso de 3 kp para comenzar a desplazarse sobre una superficie horizontal cubierta de nieve. ¿Cuál es el módulo del impulso necesario para poner en movimiento a un esquiador de 90 kp?
11. Dos bloques están conectados por una cuerda, como se muestra en la Fig. 2.28. El bloque *A* pesa 20 N y el coeficiente de rozamiento estático entre éste y la superficie es 0,4; el bloque *B* pesa 10 N y el coeficiente de rozamiento estático entre él y la superficie es 0,5. (*a*) ¿Qué fuerza mínima F_a debe aplicarse al bloque *B* para desplazar todo el conjunto? (*b*) ¿Cuál será la tensión *T* de la cuerda de unión en el instante mismo en que el conjunto empieza a desplazarse?
Resp. (*a*) 13 N; (*b*) 5 N.
12. Un bloque de 10 kp está encima de uno de 20 kp que descansa sobre una mesa. El coeficiente de rozamiento estático es de 0,30 entre ambos bloques y de 0,50 entre el bloque de 20 kp y la mesa. (*a*) ¿Cuál es la fuerza mínima que ha de aplicarse sobre el bloque de 20 kp para que ambos bloques empiecen a deslizarse sobre la mesa? (*b*) ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicarse sobre el bloque de 10 kp sin que deslice sobre el bloque de 20 kp?
13. La longitud de un muelle aumenta 2 cm cuando se cuelga de él un peso de 3 kp. (*a*) ¿Cuál es la constante del muelle? (*b*) Cuando otro objeto se suspende del muelle, éste se alarga 3 cm. ¿Cuál es el peso del objeto?
Resp. (*a*) 1,5 kp/cm; (*b*) 4,5 kp.
14. La constante elástica efectiva de un bloque de madera es 2×10^6 kp/cm. (*a*) ¿Cuánto se comprime el bloque al colocarle encima un peso de 10 kp? (*b*) ¿Cuánto se compri-

me el bloque cuando se le pone encima un peso de 1000 kp?

OBSERVACIÓN. Este último problema muestra que la deformación de un objeto sólido, al igual que la de un muelle, varía con la fuerza aplicada. Sin embargo, la deformación es tan pequeña que pasa normalmente inadvertida.

15. La Fig. 2.46 muestra tres fuerzas. Usar el método gráfico para hallar *(a)* la suma de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$; *(b)* la suma de $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$; *(c)* la suma de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$; *(d)* las componentes x e y de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$.
Resp. *(a)* 7,13 kp; *(b)* 7,88 kp; *(c)* 2,27 kp; *(d)* 5,0, 8,66 kp; 2,07, —7,73 kp; —5,0, 0 kp.

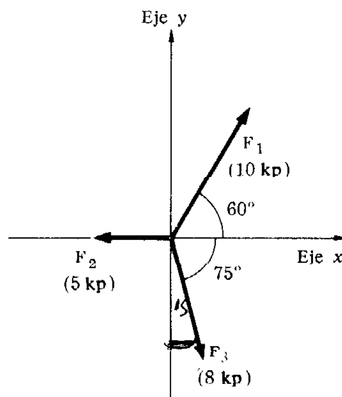


FIGURA 2.46
Problemas 15 y 16.

16. Usar el método trigonométrico para hallar *(a)* las componentes x e y de cada uno de los tres vectores de la Fig. 2.46; *(b)* las componentes de la suma $\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$; *(c)* el módulo de $\mathbf{S}$; *(d)* el ángulo que $\mathbf{S}$ forma con el eje de las x.
17. Un bloque de 30 N está sobre un plano inclinado 28° con respecto a la horizontal. *(a)* Hallar los módulos de la fuerza de contacto y de la de rozamiento sobre el bloque. *(b)* Dado que el bloque está en reposo, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano? Resp. *(a)* 26,5 N; 14,1 N; *(b)* 0,53
18. Un método para determinar el coeficiente de rozamiento μ_s entre un bloque y una superficie es inclinar la superficie hasta que el bloque empieza a deslizarse. Demostrar que el ángulo θ que forma la superficie inclinada con la horizontal cuando el bloque empieza a deslizarse está relacionado con μ_s por $\mu_s = \tan\theta$.
19. El tendón del bíceps de la Fig. 2.47 ejerce una fuerza $\mathbf{F}_m$ de 7 kp sobre el antebrazo. El brazo aparece doblado de tal manera que esta fuerza forma un ángulo de 40° con el antebrazo. Hallar las componentes de $\mathbf{F}_m$ *(a)* paralela al antebrazo (fuerza estabilizadora) y *(b)* perpendicular al antebrazo (fuerza de sostén).
Resp. *(a)* 5,4 kp; *(b)* 4,5 kp.

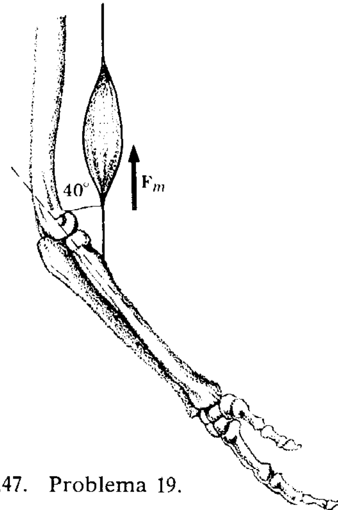


FIGURA 2.47. Problema 19.

20. Un lápiz provisto de goma de borrar está en contacto con la superficie de una mesa formando un ángulo de 25° (Fig. 2.48). Hacia abajo y a lo largo del lápiz se ejerce una fuerza de 1 kp. Despreciar el peso del propio lápiz. *(a)* ¿Cuáles son las componentes vertical y horizontal de la fuerza aplicada? *(b)* Si el coeficiente de rozamiento estático entre el lápiz y la mesa es 0,40, ¿cuál es la fuerza máxima de rozamiento que puede ejercer la mesa contra el lápiz? *(c)* ¿Se moverá el lápiz? *(d)* Repetir las partes *(a)* y *(b)* con un ángulo de 70°.

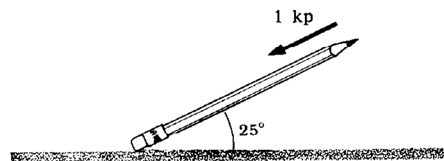


FIGURA 2.48. Problema 20.

Ahora hallaríamos que el lápiz no se mueve. ¿Qué fuerza debe aplicarse a lo largo del lápiz para lograr que se mueva? Probar con un lápiz como el de la Fig. 2.48.

21. Las partes posterior y anterior del músculo deltoides elevan el brazo al ejercer las fuerzas $\mathbf{F}_p$ y $\mathbf{F}_a$ que muestra la Fig. 2.49. ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza total sobre el brazo y qué ángulo forma con la vertical?
Rep. 8,2 kp; 13,0°.

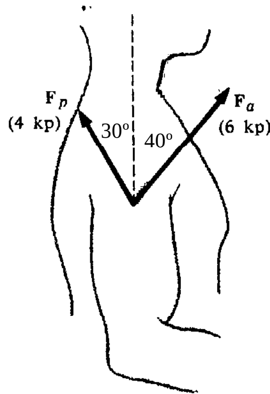


FIGURA 2.49. Problema 21.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

22. La Fig. 2.50 muestra una cuerda elástica atada a dos muelas y estirada hasta pasar por un incisivo. El fin de este dispositivo es aplicar una fuerza **F** al incisivo.

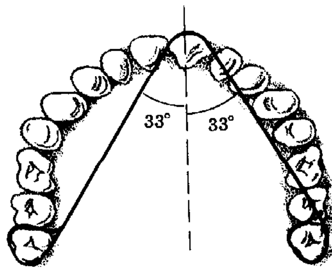


FIGURA 2.50. Problema 22.

(La figura ha sido simplificada llevando la cuerda recta desde el incisivo a las muelas.) Si la tensión de la cuerda es 0,25 kp, ¿cuál es el módulo y la dirección de la fuerza **F** aplicada al incisivo?

23. La Fig. 2.51 muestra la forma del tendón del cuádriceps al pasar por la rótula. Si la tensión T del tendón es 140 kp, ¿cuál

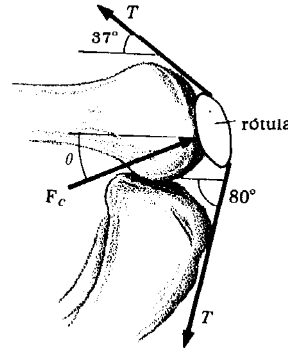


FIGURA 2.51. Problema 23.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

es (*a*) el módulo y (*b*) la dirección de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ ejercida por el fémur sobre la rótula?
Resp. (*a*) 146 kp; (*b*) 21,5°.

24. El abductor de la cadera, que conecta la cadera al fémur, consta de tres músculos independientes que actúan a diferentes ángulos. La Fig. 2.52 muestra los resultados de medidas de la fuerza ejercida por separado por cada músculo. Hallar la fuerza total ejercida por los tres músculos juntos.

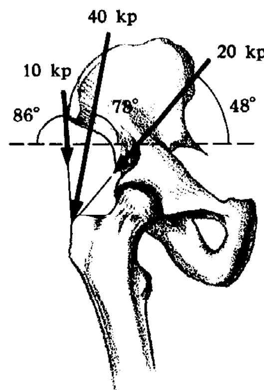


FIGURA 2.52. Problema 24.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

25. Hallar la fuerza total aplicada a la cabeza del paciente por el dispositivo de tracción de la Fig. 2.53.
Resp. 2,8 kp.

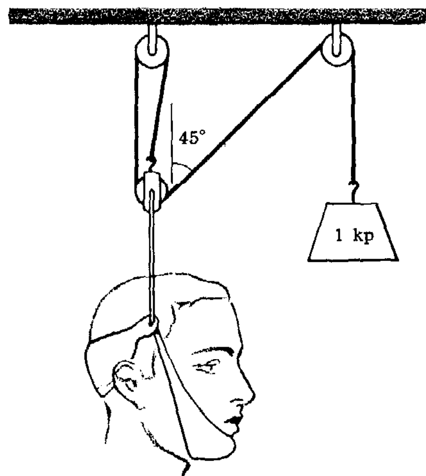


FIGURA 2.53. Problema 25.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

26. Hallar el ángulo θ y la tensión T de la cuerda que sostiene la polea de la Fig. 2.54.

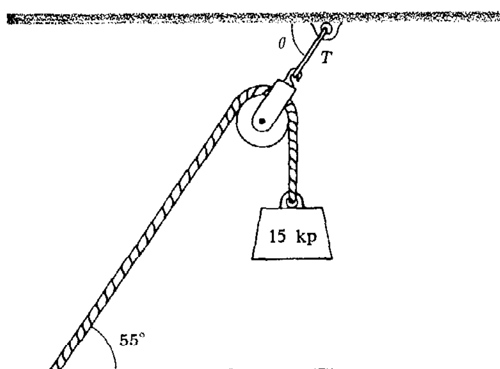


FIGURA 2.54. Problema 26.

27. Hallar la fuerza que ejerce sobre el pie el dispositivo de tracción de la Fig. 2.55.
Resp. 4,6 kp.
28. Mediante dos dinamómetros se suspende un peso de 12 kp del modo que indica la Fig. 2.56. Uno de ellos señala 10 kp y está inclinado 35° respecto de la vertical. Hallar la lectura del otro dinamómetro y el ángulo θ que forma con la vertical.

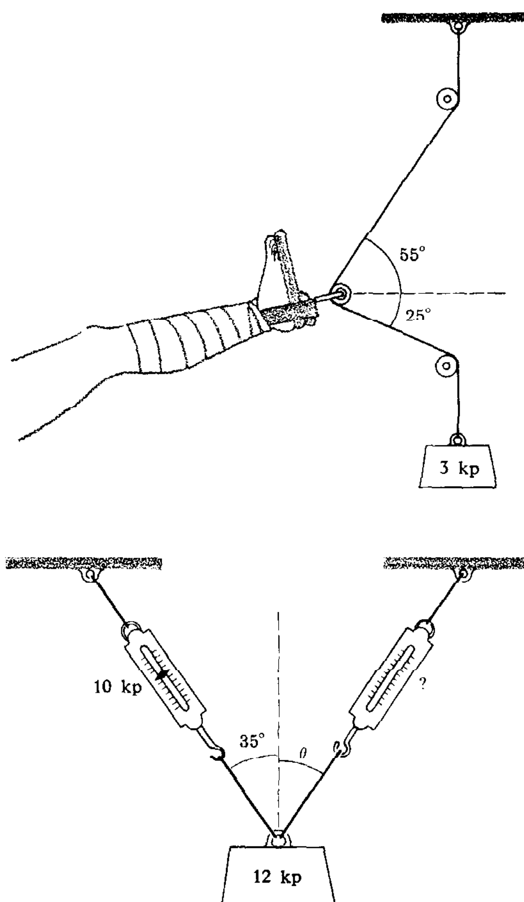


FIGURA 2.56. Problema 28.

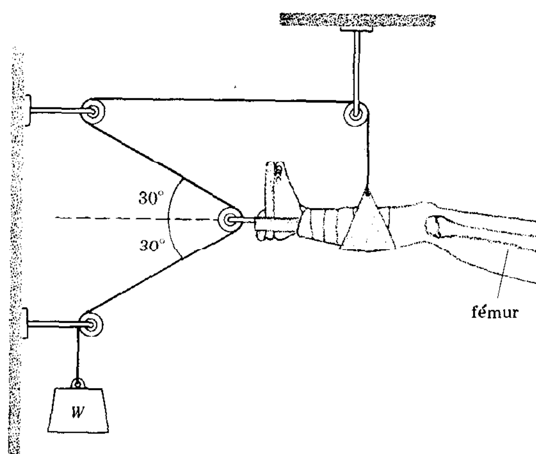


FIGURA 2.57. Problema 29.

29. La Fig. 2.57 representa un aparato de tracción de Russell para fijación femoral. (*a*) Hallar la fuerza total $\mathbf{F}_a$ aplicada a la pierna por este aparato cuando se cuelga de él un peso *W* de 4 kp. (*b*) Si la pierna pesa 4 kp, ¿cuál es la fuerza $\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_g$ sobre ella? (*c*) ¿Cuál es la fuerza $\mathbf{R}_c$ ejercida sobre el fémur por la pierna más baja?
Resp. (*a*) 8 kp; (*b*) 7 kp; (*c*) 7 kp; obsérvese que $\mathbf{R}_c$ es horizontal.
30. La Fig. 2.58 representa la cabeza de un estudiante inclinada sobre su libro. La cabeza pesa 4,5 kp y está sostenida por la fuerza muscular $\mathbf{F}_m$ ejercida por los extensores del cuello y por la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ ejercida en la articulación atlanto-occipital. Dado que el módulo de $\mathbf{F}_m$ es 5,4 kp y que está dirigida 35° por debajo de la horizontal, hallar (*a*) el módulo y (*b*) la dirección de $\mathbf{F}_c$.

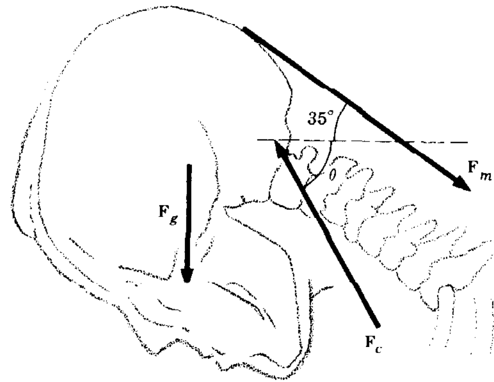


FIGURA 2.58. Problema 30.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

BIBLIOGRAFÍA

STEINDLER, Arthur: «Kinesiology of the Human Body», Charles C. Thomas, Publisher, Springfield, Ill., 1970. Un detallado y a la vez autorizado tratamiento de la Física y la Fisiología del movimiento humano.

WELLS, Katharine y Janet WESSEL: «Kinesiology», 5.ª ed., W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1971. Un libro de texto para terapeutas físicos.

WILLIAMS, Marian y Herbert R. LISSNER: «Biomechanics of Human Motion», W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1962. Los principios de la Mecánica aplicados a una variedad de problemas de anatomía y tratamiento funcional. El libro está fundamentalmente dirigido a estudiantes de terapéutica física y educación física.

Capítulo 3 Momento

La primera ley de Newton del movimiento (Sec. 2.1) es una condición necesaria para que un objeto esté en equilibrio. En el capítulo anterior hicimos uso de ella para calcular las fuerzas en una determinada situación física. En este capítulo vamos a introducir una segunda condición necesaria para el equilibrio (la condición del momento) que utilizaremos para determinar algo más acerca de las fuerzas. La primera ley de Newton y la condición del momento juntas constituyen las condiciones necesarias y suficientes para que un objeto esté en equilibrio.

3.1. EQUILIBRIO ROTACIONAL

Se ha subrayado en el Apart. 2.1 que la primera ley de Newton es solamente una condición necesaria para que un objeto esté en equilibrio. Consideremos, por ejemplo, las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan sobre el bloque de la Fig. 3.1. Incluso si $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, de modo que la fuerza total sobre el bloque es cero, dicho bloque se moverá. De hecho, efectuará una rotación. La condición $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 = 0$ sólo asegura que un punto del bloque (su centro de gravedad) permanece en reposo. Se necesita una segunda condición para asegurar que el bloque no se pone a girar alrededor de este punto.

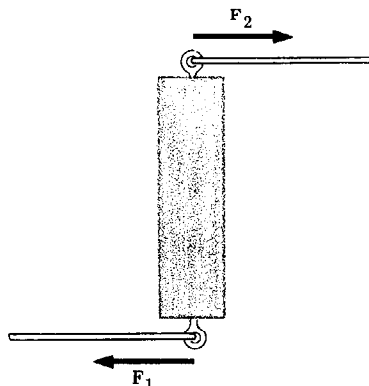


FIGURA 3.1
Dos fuerzas iguales y opuestas actuando sobre un bloque.

La tendencia de una fuerza a originar una rotación alrededor de un punto depende del módulo de la fuerza y de su distancia al punto. Este hecho está de acuerdo con la experiencia que poseemos de un columpio. Cuando dos niños se sientan, cada uno en un extremo de un columpio, la fuerza que ejerce cada uno sobre la tabla tiende a girarla en sentidos opuestos (Fig. 3.2). A partir de las leyes primera y tercera de Newton y de la discusión del Apartado 2.3 sabemos que si

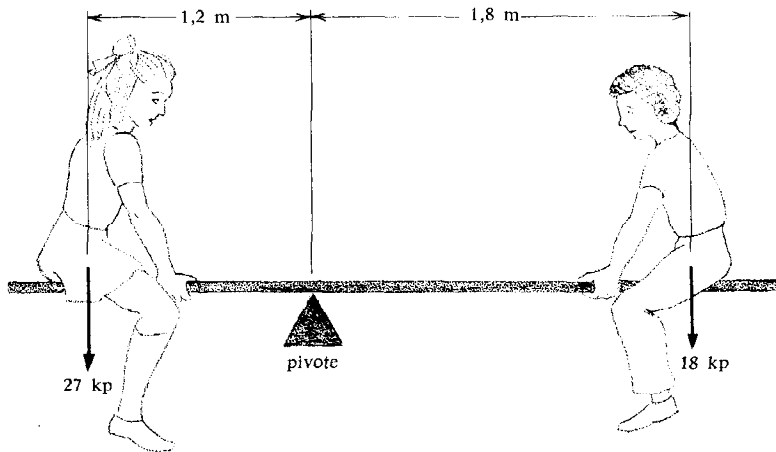


FIGURA 3.2
Un niño de 18 kp y una niña de 27 kp columpiándose.

el chico de 18 kp de la derecha está en reposo, ejerce hacia abajo una fuerza de 18 kp sobre la tabla. Esta fuerza es la reacción a la fuerza de contacto que la tabla ejerce sobre el chico, y tiende a girar la tabla en el sentido de las agujas de un reloj. Asimismo, la fuerza de 27 kp que la chica de 27 kp ejerce sobre la tabla tiende a girarla en sentido contrario a las agujas del reloj. A pesar de la desigualdad de estas fuerzas, el columpio puede mantenerse en equilibrio si el chico se sienta más lejos del eje que la chica.

La regla es que el columpio se balancea (está equilibrado) si la fuerza que ejerce el chico multiplicada por su distancia al eje es igual a la fuerza que ejerce la chica multiplicada por la distancia que la separa del eje. De este modo, si el chico se sienta a 1,8 m del eje, puede balancear a la chica sentada a 1,2 m del eje, puesto que

$$18 \text{ kp} \times 1{,}8 \text{ m} = 32{,}4 \text{ kp-m} = 27 \text{ kp} \times 1{,}2 \text{ m}$$

Para extender esta regla a situaciones más complejas se introduce el concepto de *momento*, al considerar la fuerza **F** y el punto de apoyo *O* mostrados en la Fig. 3.3. En ésta y en todas las figuras siguientes, el eje de rotación se supone perpendicular al plano de la figura.

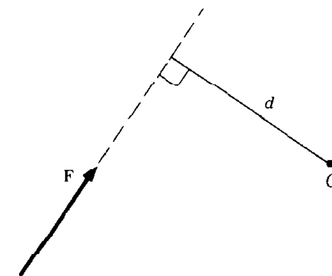


FIGURA 3.3
Una fuerza **F** ejerciendo un momento alrededor de un punto *O*.

Definición. El *momento* τ* ejercido por una fuerza **F** alrededor de un punto *O* es igual al módulo de **F** multiplicado por su distancia *d* a *O* medida perpendicularmente:

$$\tau = Fd \qquad 3.1$$

El signo de τ se considera positivo si **F** tiende a producir una rotación alrededor de *O* en sentido contrario a las agujas de un reloj, y negativo si la rotación tiene lugar en el sentido de las agujas

* τ es la letra griega tau.

de un reloj. El momento es una medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza a producir rotación alrededor de un punto. Su unidad es el kilopondio metro (kp-m).

Existen dos características muy importantes del momento: (1) el módulo y el signo del momento producido por una fuerza dada depende del punto O alrededor del cual se calcula, y (2) la distancia d que aparece en la Ec. 3.1 es la distancia perpendicular desde el punto O a la *línea de acción* de la fuerza. La línea de acción es la recta en la dirección de la fuerza que pasa por el punto donde se aplica la fuerza.

Ejemplo 1. ¿Cuánto valen los momentos alrededor de la muñeca, el codo y el hombro cuando una persona sostiene con el brazo extendido un peso de 5 kp (Fig. 3.4)?

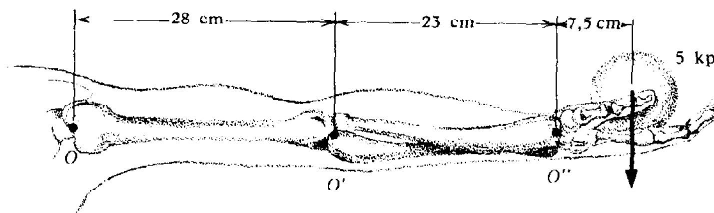


FIGURA 3.4
Brazo extendido sosteniendo un peso de 5 kp.

El peso ejerce sobre la mano una fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ de 5 kp hacia abajo, y de este modo la línea de acción de la fuerza es una vertical que pasa por la mano. La distancia perpendicular desde la muñeca (punto O'') a esta línea es 7,5 cm, luego el momento ejercido alrededor de la muñeca es

$$\tau_c'' = -5 \text{ kp} \times 7{,}5 \text{ cm} = -5 \text{ kp} \times 0{,}075 \text{ m} = -0{,}375 \text{ kp-m}$$

El signo es negativo porque $\mathbf{F}_c$ tiende a girar la mano alrededor de la muñeca en el sentido de las agujas de un reloj.

El momento ejercido por esta misma fuerza alrededor del codo (punto O') es

$$\tau_c' = -5 \text{ kp} \times 30{,}5 \text{ cm} = -5 \text{ kp} \times 0{,}305 \text{ m} = -1{,}525 \text{ kp-m}$$

ya que la distancia perpendicular de O' a la línea de acción de $\mathbf{F}_c$ es 30,5 cm. De nuevo el signo es negativo porque $\mathbf{F}_c$ tiende a girar el antebrazo alrededor del codo en el sentido de las agujas de un reloj.

Del mismo modo, el momento alrededor del hombro (punto O) es $-2{,}9$ kp-m. Por lo tanto, el valor del momento depende del punto alrededor del cual se calcula. El significado físico de esto es que la tendencia de una fuerza a producir rotación alrededor de un punto aumenta con la distancia perpendicular desde el punto a la fuerza.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el momento alrededor del codo cuando se sostiene un peso de 5 kp en la mano de un brazo que forma con el cuerpo un ángulo de 30° (Fig. 3.5*a*)?

Cuando el brazo se mantiene a 30° del cuerpo (Fig. 3.5*a*), los momentos alrededor de la muñeca, codo y hombro son diferentes de los momentos cuando el brazo está horizontal. Esto es debido a que las distancias perpendiculares desde estos puntos a la línea de acción de

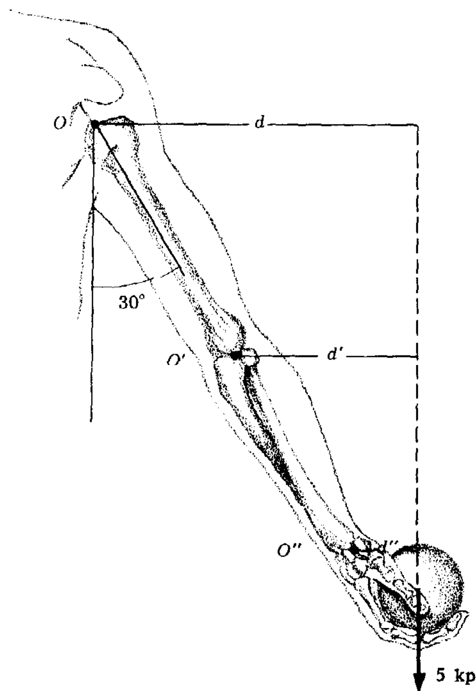


FIGURA 3.5*a*
Brazo a 30° de la vertical sujetando un peso de 5 kp.

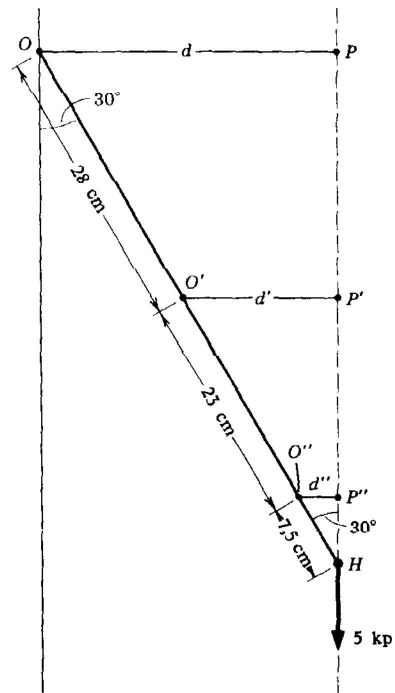


FIGURA 3.5*b*
Relaciones geométricas del brazo de la Fig. 3.5*a*.

la fuerza no son ya las distancias medidas a lo largo del brazo. Por ejemplo, para obtener el momento alrededor del codo, debe hallarse la distancia perpendicular *d'* desde *O'* a la fuerza. Esto puede hacerse por medio de un dibujo a escala y midiendo *d'*, o bien, utilizando un poco de trigonometría. La Fig. 3.5*b* muestra las importantes relaciones geométricas existentes sin atender al detalle anatómico, no esencial en este caso. La línea vertical continua representa el cuerpo y la paralela de trazos representa la línea de acción de la fuerza. El brazo aparece representado por la línea *OH*, que está inclinada 30° con respecto al cuerpo y a la línea de acción.

La línea *O'H* desde el codo a la mano tiene una longitud de 30,5 cm, y es la hipotenusa del triángulo rectángulo *HP'O'*. La distancia *d'* es el lado de este triángulo opuesto al ángulo de 30°, luego

$$\text{sen } 30° = \frac{d'}{O'H} = \frac{d'}{30{,}5\,\text{cm}}$$

Por lo tanto, la distancia *d'* es

$$d' = 30{,}5 \text{ cm} \times \text{sen } 30° = 15{,}25 \text{ cm}$$

y el momento producido por $\mathbf{F}_c$ alrededor de O' es

$$\tau'_c = -5 \text{ kp} \times 0{,}1525 \text{ m} = -0{,}7625 \text{ kp-m}$$

El momento alrededor de O' es ahora menor que cuando el brazo estaba en posición horizontal porque la distancia perpendicular es menor. Los momentos alrededor de O y O'' se pueden calcular de manera similar.

Un objeto que no tiene tendencia a ponerse a girar se dice que está en *equilibrio rotacional.* La condición necesaria para el equilibrio rotacional viene dada por la condición del momento.

La condición del momento. *Para que un objeto esté en equilibrio rotacional, la suma de los momentos producidos por todas las fuerzas que actúan sobre el objeto ha de ser nula.*

Por la primera ley de Newton sabemos que si la suma de las fuerzas que actúan sobre un objeto es cero, el objeto permanecerá en reposo. Un objeto que permanece en reposo y que no tiende a girar se dice que está en equilibrio estático. Entonces, han de satisfacerse las siguientes condiciones para que un objeto se encuentre en equilibrio estático.

Condiciones de equilibrio estático. *Para que un objeto se encuentre en equilibrio estático, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto ha de valer cero (primera ley de Newton) y la suma de todos los momentos que se ejercen sobre el mismo ha de valer cero.*

Al aplicar la condición del momento, todos los momentos deben calcularse alrededor del mismo punto. Sin embargo, si el objeto está en equilibrio no importa dónde esté localizado este punto.

Ejemplo 3. Demuéstrese que las condiciones de equilibrio estático se satisfacen para el columpio de la Fig. 3.2.

Para aplicar las condiciones de equilibrio estático debemos determinar primero cuál es el objeto y cuáles son las fuerzas que actúan sobre él. En este caso, el objeto es la tabla, y las fuerzas son las de contacto ejercidas sobre ella por los niños y el eje (Fig. 3.6). El momento alrededor del eje (punto O) producido por la fuerza F_1 (ejercida por el chico sobre la tabla) es

$$\tau_1 = -F_1 \times 1{,}8 \text{ m} = -18 \text{ kp} \times 1{,}8 \text{ m} = -32{,}4 \text{ kp-m}$$

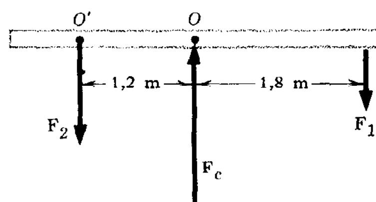


FIGURA 3.6
Fuerzas en el columpio de la Fig. 3.2.

El momento alrededor de O producido por la fuerza $\mathbf{F}_2$ (ejercida por la chica sobre la tabla) es

$$\tau_2 = F_2 \times 1{,}2 \text{ m} = 27 \text{ kp} \times 1{,}2 \text{ m} = -32{,}4 \text{ kp-m}$$

El momento alrededor de O producido por la fuerza $\mathbf{F}_c$ (ejercida sobre la tabla por el eje) es cero, puesto que la línea de acción de esta fuerza pasa por O. Esto es, la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de $\mathbf{F}_c$ es cero, luego

$$\tau_c = F_c \times 0 = 0$$

La suma de estos tres momentos es evidentemente cero, como se exige para que la tabla esté en equilibrio.

La única ventaja en el cálculo de los momentos alrededor de O es que no se necesita el conocimiento de $\mathbf{F}_c$. Sin embargo, sabemos, a partir de la primera ley, que $\mathbf{F}_c = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$, luego $\mathbf{F}_c$ es una fuerza de 45 kp dirigida hacia arriba. Por lo tanto es igualmente fácil calcular los momentos alrededor de cualquier otro punto. Por ejemplo, alrededor del punto O', donde se sienta la chica, los momentos son

$$\tau'_1 = -18 \text{ kp} \times 3 \text{ m} = -54 \text{ kp-m}$$
$$\tau'_2 = 27 \text{ kp} \times 0 = 0$$
$$\tau'_c = 45 \text{ kp} \times 1{,}2 \text{ m} = 54 \text{ kp-m}$$

y de nuevo su suma es cero. Así, mientras los momentos individuales varían cuando varía el punto alrededor del cual se calculan, la suma de los momentos es cero cualquiera que sea el punto elegido.

OBSERVACIÓN. Debemos estar seguros de haber entendido lo que acabamos de decir. Para aplicar la condición del momento en una situación de equilibrio hay que calcular todos los momentos alrededor del mismo punto, pero puede utilizarse cualquier punto.

3.2. CENTRO DE GRAVEDAD

El problema de calcular el momento τ_g producido por la fuerza de la gravedad sobre un objeto extenso requiere una especial consideración porque la gravedad actúa sobre cada punto del objeto. Así, en el caso del brazo extendido de la Fig. 3.7, existen fuerzas gravitacionales sobre la mano, los huesos de la muñeca, el antebrazo y, de hecho, sobre cada

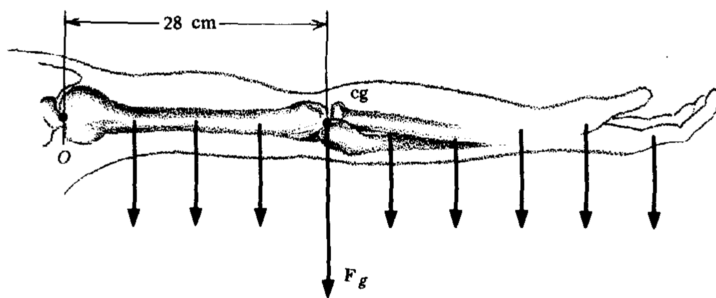


FIGURA 3.7
La fuerza de la gravedad sobre un brazo extendido.

célula y cada átomo del brazo. Cada una de estas fuerzas tiene su propia línea de acción y produce su propio momento. La suma de to-

das estas fuerzas es la fuerza total de la gravedad $\mathbf{F}_g$ sobre el brazo, y la suma de estos momentos es el momento total τ_g debido a la gravedad.

El momento gravitatorio τ_g producido por la fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$ sobre un objeto extenso se calcula en términos de $\mathbf{F}_g$ y de la posición de un punto especial del objeto llamado centro de gravedad.

Definición. El *centro de gravedad* de un objeto es el punto donde puede suponerse que actúa la fuerza total de la gravedad $\mathbf{F}_g$, a efectos del cálculo del momento gravitatorio τ_g. Por ejemplo, el centro de gravedad (cg) *del brazo extendido de la Fig. 3.7 está localizado cerca* del codo, a 28 cm de la articulación del hombro (punto O). Así, la distancia d desde O a la línea de acción de $\mathbf{F}_g$ es 28 cm, y si el brazo pesa 3 kp, el momento alrededor de O producido por la fuerza de la gravedad sobre el brazo es

$$\tau_g = -F_g \times d = -3 \text{ kp} \times 0{,}28 \text{ m} = -0{,}84 \text{ kp-m}$$

OBSERVACIÓN. Todos los momentos calculados en el Apart. 3.1 fueron producidos por fuerzas de contacto que actuaban sobre un objeto. Aquí hemos calculado el momento producido por la fuerza de la gravedad sobre el objeto mismo.

Un cierto número de rasgos característicos del centro de gravedad se desprenden directamente de su definición y de los ejemplos tratados. Aquí los resumimos por comodidad.

1. *La fuerza de gravedad sobre un objeto produce un momento nulo alrededor de su centro de gravedad.* Esto es evidente porque, por definición, la línea de acción de la fuerza de la gravedad pasa por el centro de gravedad y, así, la distancia del centro de gravedad a esta línea es cero. Esta propiedad proporciona un método para localizar el centro de gravedad de objetos simples.

Ejemplo. *Localizar el centro de gravedad del objeto de la Fig. 3.8 que consiste en dos pesos A y B conectados por una barra de peso despreciable.*

Supongamos que el centro de gravedad está situado a una distancia x del peso A. Entonces, los momentos alrededor del centro de gravedad debidos a las fuerzas gravitatorias individuales de A y B son

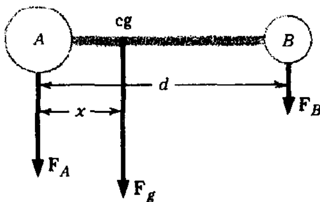
$$\tau_A = F_A x \qquad \text{y} \qquad \tau_B = -F_B(d - x)$$

Como el momento total alrededor del centro de gravedad debido a las fuerzas gravitatorias es nulo, se obtiene

$$F_A x - F_B(d - x) = 0$$

o

$$x = \frac{F_B}{F_A + F_B} d \qquad 3.2$$



Localización del centro de gravedad de dos pesos unidos por una barra sin peso.

Entonces, si A y B valen respectivamente 50 kp y 25 kp, y d vale 3 m, el centro de gravedad está situado a

$$x = \frac{25 \text{ kp}}{50 \text{ kp} + 25 \text{ kp}} (3 \text{ m}) = 1 \text{ m}$$

a partir de A.

2. *El centro de gravedad de un objeto rígido es el punto de equilibrio.* Si se sitúa un solo soporte directamente bajo el centro de gravedad de un objeto (Fig. 3.9), la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ que ejerce sobre el objeto es igual a $-\mathbf{F}_g$, y de aquí que la fuerza total sobre el objeto sea cero. Además, tanto $\mathbf{F}_g$ como $\mathbf{F}_c$ producen momentos nulos alrededor del centro de gravedad, ya que sus líneas de acción pasan por él. Por consiguiente, el momento total alrededor del centro de gravedad es cero y el objeto está, pues, en equilibrio.

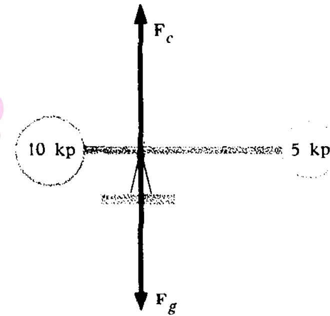


FIGURA 3.9
Un objeto suspendido de un solo soporte directamente debajo de su centro de gravedad.

Esta propiedad también puede usarse para localizar el centro de gravedad de objetos complicados. Por ejemplo, el centro de gravedad de un transportador puede hallarse colgándolo primero, junto con una plomada, de un punto (Fig. 3.10). La fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ actúa verticalmente hacia arriba en el punto de suspensión. Como es la única fuerza sobre el objeto, aparte de la gravitatoria, ha de producir un momento nulo alrededor del centro de gravedad. Por consiguiente, el centro de gravedad ha de estar sobre la línea de acción de $\mathbf{F}_c$, es decir, sobre la línea de la plomada (Fig. 3.11). Dicha línea se marca sobre el cuadrante, y éste se cuelga entonces de un segundo punto que no esté en la primera línea de plomada (Fig. 3.11). El centro de gravedad del transportador se halla en la intersección de las dos líneas de plomada.

3. *En un objeto rígido el centro de gravedad es un punto fijo con respecto al objeto, aunque no esté necesariamente localizado en el objeto mismo.* El centro de gravedad de la barra y los pesos es un punto fijo de la barra y no varía su posición cuando la barra se desplaza. El centro de gravedad de un semicírculo transportador (Fig. 3.11) está localizado en la parte hueca.
4. *En un objeto flexible, como el cuerpo humano, la posición del centro de gravedad varía cuando el objeto cambia de forma.* El centro de gravedad de un hombre, que permanece de pie y derecho, está localizado al nivel de la segunda vértebra sacra sobre una línea vertical que toca el suelo a unos 3 cm por delante de la articulación del tobillo (Fig. 3.12). Si el hombre levanta los brazos sobre su cabeza, el centro de gravedad subirá varios centímetros. Durante un salto de altura (Fig. 3.13) el centro de gravedad queda totalmente fuera del cuerpo. La capacidad para variar la posición del centro de gravedad del cuerpo es de importancia crítica para mantener el equilibrio mientras caminamos y en la ejecución, con éxito, de muchas acciones atléticas.

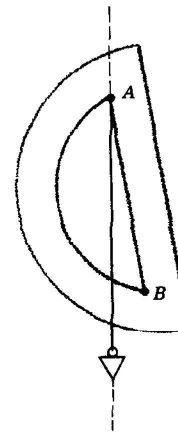


FIGURA 3.10
Un transportador suspendido por el punto *A* cuelga con su centro de gravedad situado en la vertical definida por la línea de plomada.

3.3. EQUILIBRIO

Para que un objeto esté en equilibrio, la suma de las fuerzas y la suma de los momentos que actúan sobre él deben ser cero por separado. Si el momento total no es cero, el objeto está *sin equilibrar* y girará en el sentido del momento total, distinto de cero, que actúa sobre él. Un objeto en contacto con una superficie sólida deja de estar equilibrado cuando la línea de acción de la fuerza total de contacto ejercida sobre él por la superficie no pasa ya por su centro de gravedad.
Por ejemplo, consideremos el libro sobre la mesa de la Fig. 3.14. La

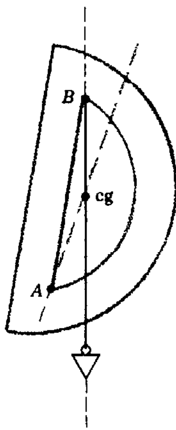


FIGURA 3.11
El transportador se suspende por un segundo punto (B) para determinar una segunda línea sobre la cual ha de estar situado el centro de gravedad. El centro de gravedad está en la intersección de estas dos líneas.

fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ que ejerce la mesa sobre el libro está distribuida por toda el área de contacto entre el libro y la mesa, pero lo mismo que la fuerza de la gravedad, se puede considerar que la fuerza de contacto total actúa en un punto único localizado dentro de esta área. Mientras el centro de gravedad del libro esté sobre el área de contacto, el punto de aplicación de $\mathbf{F}_c$ estará situado bajo él en la misma vertical (Fig. 3.14). En este caso, tanto el momento total como la fuerza total sobre el libro son nulos y el libro está, por lo tanto, en equilibrio.

Cuando el libro se desplaza un poco más fuera de la mesa, el punto de aplicación de $\mathbf{F}_c$ se mueve hacia el borde de la mesa a fin de permanecer bajo el centro de gravedad. Sin embargo, dado que $\mathbf{F}_c$ es ejercida por la propia mesa, su punto de aplicación no se puede desplazar más allá del borde de la mesa. Cuando el centro de gravedad rebasa el borde de la mesa (Fig. 3.15), la fuerza de contacto permanece en el borde y el momento total sobre el libro ya no es cero. De hecho, el momento total alrededor del punto O es $-F_g d$. Se trata de un momento en el sentido de las agujas de un reloj que hace girar el libro en ese sentido fuera de la mesa.

Este ejemplo ilustra el *principio del equilibrio: Si* $\mathbf{F}_c$ *y* $\mathbf{F}_g$ *son las únicas fuerzas que actúan sobre un objeto, éste estará equilibrado si y solamente si, su centro de gravedad está localizado sobre el área de apoyo.* Este principio se deduce directamente de las condiciones de equilibrio de la fuerza y de la naturaleza de las fuerzas de contacto. Hacemos hincapié en ello porque es de vital importancia para comprender correctamente el equilibrio del cuerpo.

El principio del equilibrio requiere que el centro de gravedad del cuerpo en posición firme esté en la línea vertical que pasa por algún punto dentro del área de apoyo que viene definida por la posición de los pies (Fig. 3.16). Cuando una persona se inclina para tocar la punta de los pies sin doblar la rodilla, su centro de gravedad tiende a moverse hacia adelante, más allá del área de contacto. Para evitar esto, sus piernas y sus nalgas se mueven hacia atrás, con lo cual el cuerpo permanece en equilibrio sobre los pies (Fig. 3.17). El ejercicio no se puede realizar sin este movimiento hacia atrás de las extremidades inferiores. Se puede demostrar esto, intentando tocar las puntas de los pies con los talones y la espalda pegados a la pared. La pared impide que el cuerpo mantenga el centro de gravedad por encima del área de contacto y, por lo tanto, no se puede mantener el equilibrio.

En posición de firmes, el centro de gravedad del cuerpo está normalmente sobre una línea que pasa a unos 3 cm por delante de la articulación del tobillo. Según el principio del equilibrio, esto quiere decir que $\mathbf{F}_g$ y la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ en la articulación del tobillo no son las únicas fuerzas ejercidas sobre el cuerpo por encima del tobillo. Para mantener el equilibrio y evitar que el cuerpo tome un movimiento de rotación hacia adelante teniendo como eje la articulación del tobillo, hace falta una tercera fuerza. Esta fuerza la aplica a cada pierna el músculo del tendón de Aquiles, que va unido al tobillo. Los centros de gravedad de la mayoría de las secciones del cuerpo no están encima de las articulaciones de apoyo, o sea que hacen falta fuerzas musculares para mantener el equilibrio. En el apartado siguiente se trata esto con más detalle.

El problema de mantener el equilibrio mientras se anda es aún

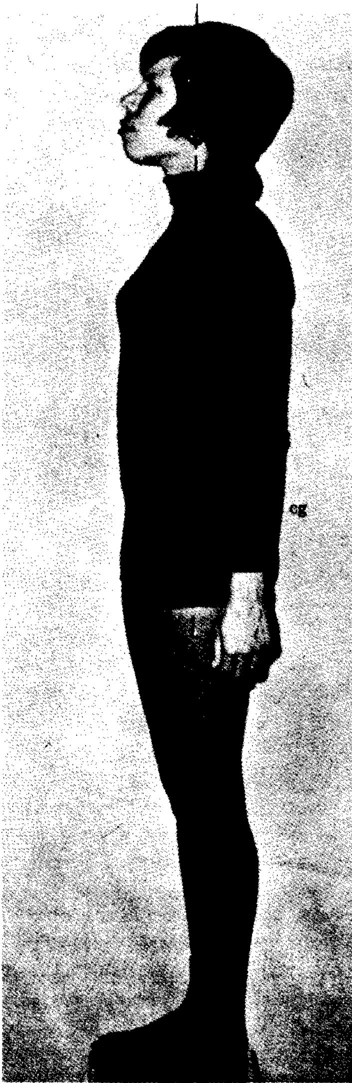


FIGURA 3.12
El centro de gravedad de una persona en posición de firmes está sobre una línea vertical que toca el suelo a 3 cm delante del punto de unión de los tobillos.

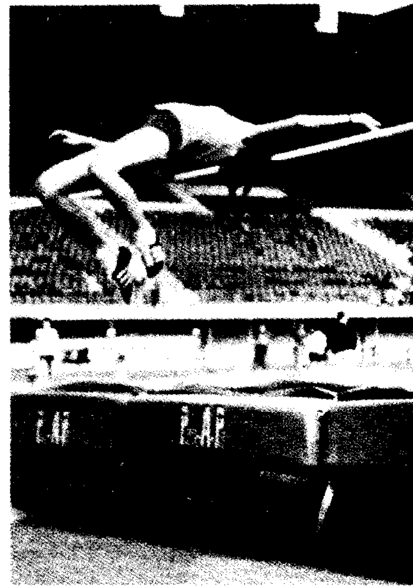


FIGURA 3.13
Cuando una saltadora de altura rebasa el listón, su cuerpo se arquea de manera que su centro de gravedad quede por debajo del listón (y fuera de su cuerpo). *(Athletic Journal, Marzo 1975.)*

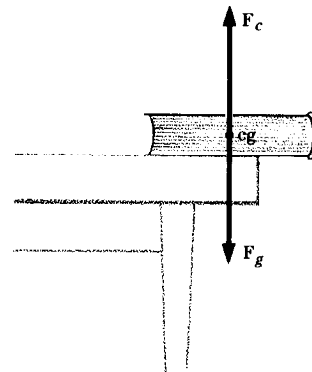


FIGURA 3.14
Fuerzas sobre un libro apoyado encima de una mesa. Siempre que el centro de gravedad del libro esté por encima de la mesa, la línea de acción de la fuerza total de contacto pasa por él.

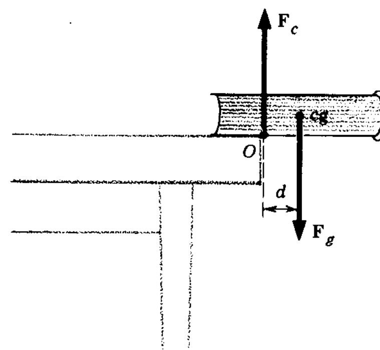


FIGURA 3.15
La línea de acción de la fuerza total de contacto sobre el libro permanece en el borde de la mesa cuando el centro de gravedad del libro se coloca más allá del borde de la mesa.



FIGURA 3.16
Área de apoyo definido por la posición de los pies.

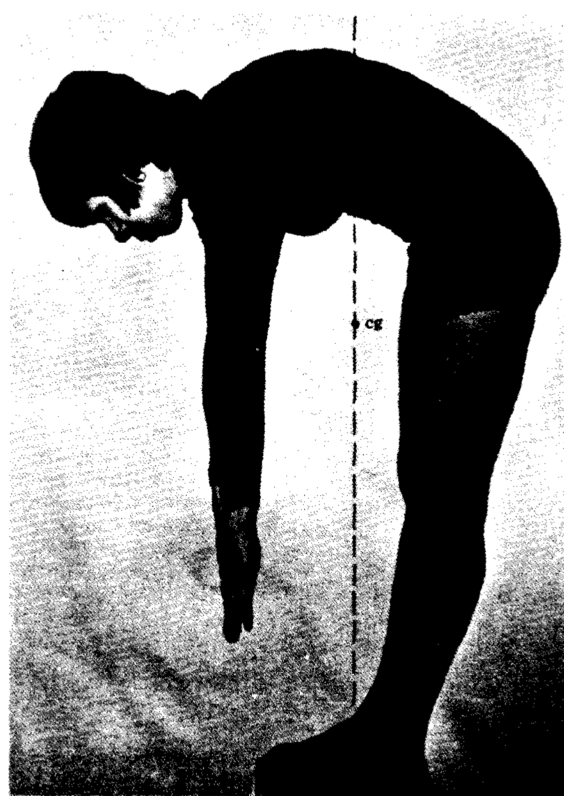


FIGURA 3.17
Cuando una persona se dobla hacia abajo, las piernas y glúteos se mueven hacia atrás para mantener el centro de gravedad sobre el área de apoyo.

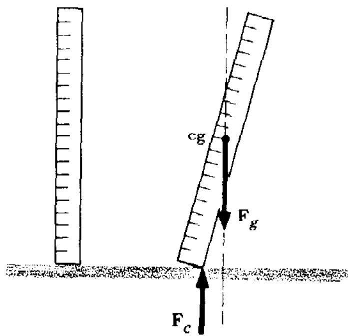


FIGURA 3.18
Un ejemplo de equilibrio inestable. Una regla, por su pequeña área de apoyo se desequilibra al sufrir la más ligera perturbación.

mayor que estando en posición de firmes. Al levantar un pie del suelo, el centro de gravedad del cuerpo tiene que desplazarse por encima del pie apoyado. Esto exige que todo el cuerpo se mueva lateralmente. Al andar, el cuerpo se bambolea continuamente de un lado a otro para mantener el centro de gravedad sobre un área de apoyo en continuo movimiento. Esto es fácil de comprobar haciendo que alguien camine hacia nosotros; observaremos que su cuerpo va de un lado a otro teniendo como punto de referencia una línea trazada en la pared que está detrás del que camina.

En la práctica, el principio del equilibrio no es suficiente para garantizar el equilibrio. Por ejemplo, sería posible mantener momentáneamente una regla en posición vertical (Fig. 3.18). Sin embargo, como su centro de gravedad está tan alto por encima de un área de apoyo muy pequeña, cualquier pequeña vibración de la mesa hace que el centro de gravedad se salga de dicha área. Tan pronto como sucede esto, el momento sobre la regla hace que ésta se caiga (Fig. 3.18). Esta clase de equilibrio, que una pequeña perturbación puede destruir de manera permanente, recibe el nombre de *inestable.* Por otro lado, una caja apoyada sobre una mesa es *estable* porque si se le inclina ligeramente de modo que ya no esté en equilibrio, el momento total sobre ella le hace volver a su posición original de equilibrio (Fig. 3.19).

Una buena estabilidad se obtiene teniendo el centro de gravedad de un objeto en una posición baja por encima de un área de sustentación grande. Para un cuadrúpedo, el área de apoyo es el área que hay entre las cuatro patas, lo cual hace que el animal tenga una gran estabilidad. Un hombre erguido tiene un área de apoyo relativamente pequeña y mecánicamente no es muy estable. Un defensa de fútbol americano adopta una posición (Fig. 3.20) con un centro de gravedad bajo y una gran área de apoyo, para aumentar su estabilidad frente a un volteo repentino.

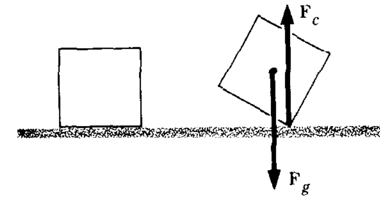


FIGURA 3.19
Un ejemplo de equilibrio estable. la caja, por su gran área de apoyo, vuelve a su posición de equilibrio al tocarla ligeramente.



FIGURA 3.20
La posición de un defensa de fútbol americano es muy estable.

Si el centro de gravedad está realmente por debajo del área de apoyo se logra una gran estabilidad. La figura de madera de la Fig. 3.21 es un juguete que se endereza maravillosamente por mucho que se le golpee. La figura lleva a ambos lados unos pesos que llegan más abajo

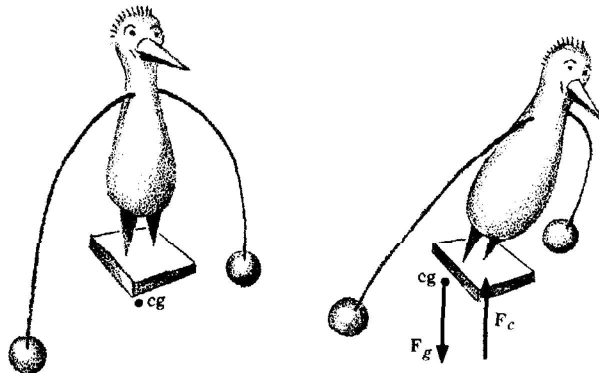


FIGURA 3.21
El muñeco siempre vuelve a la posición *vertical porque su centro* de gravedad está por debajo de su área de sustentación.

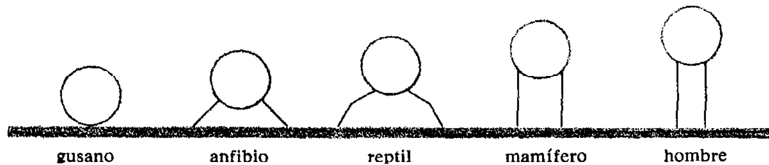
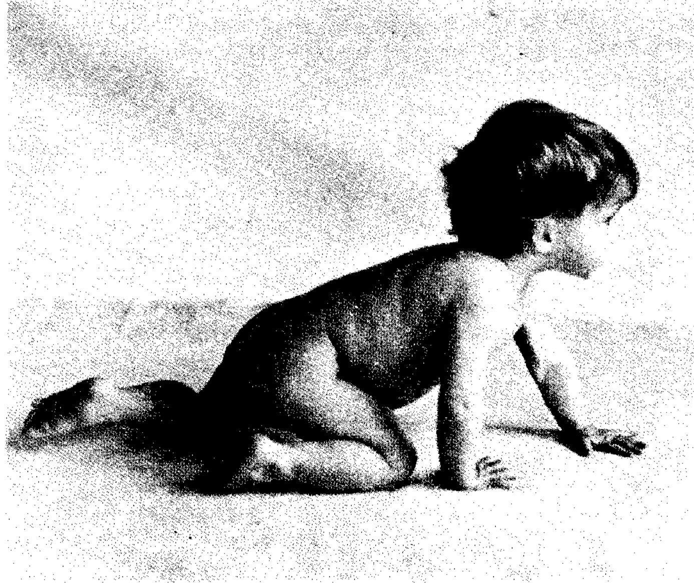
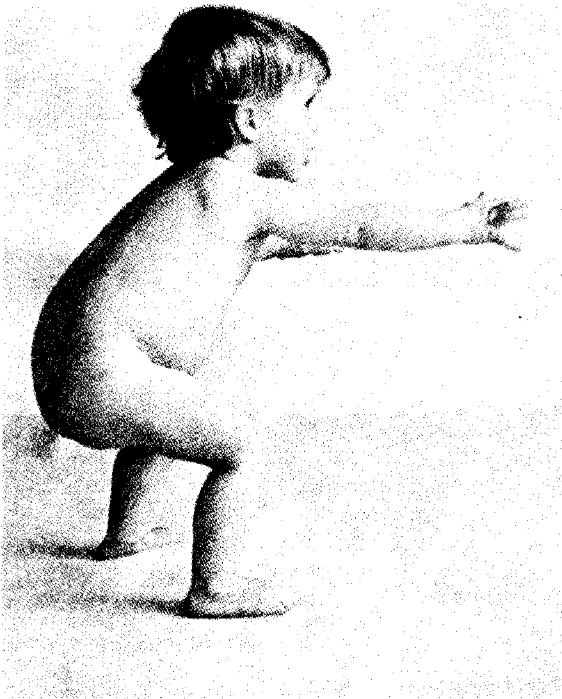


FIGURA 3.22
Representación esquemática del incremento filogénico de la altura del centro de gravedad de los animales por encima de su superficie de sustentación.



a



b



c

FIGURA 3.23
Un niño de catorce meses levantándose. A un niño le cuesta un año desarrollar el control neuromuscular necesario para mantenerse en esta postura inestable. (*BBC Publications.*)

del soporte y hacen que el centro de gravedad de toda la figura esté por debajo del soporte. Al inclinar la figura hacia adelante, el momento total sobre ella actúa siempre para hacerle volver a su posición de equilibrio.

A lo largo de la evolución los animales han desarrollado posturas cada vez más inestables. La Fig. 3.22 muestra esquemáticamente el aumento filogénico de la distancia del centro de gravedad por encima de la superficie de sustentación. La inestabilidad resultante permite a los animales moverse más rápidamente, pero requiere un control neuromuscular complejo para mantener el equilibrio. Mientras una persona está en pie, unos receptores cinestésicos detectan los pequeños cambios de posición del centro de gravedad y se hacen los necesarios ajustes en los músculos del cuerpo para que el centro de gravedad vuelva al centro del área de sustentación. La posición humana es mecánicamente tan inestable que a un niño le cuesta un año desarrollar el control neuromuscular suficiente para permanecer en pie sin ayuda (Fig. 3.23).

La posición del hombre sobre dos piernas ha evolucionado de sus orígenes cuadrúpedos en el último millón de años. Esto ha supuesto muchos cambios en la anatomía humana por las muchas dificultades físicas asociadas con la posición de no mamífero. Además de la espina dorsal terminada en punta ya mencionada (Apart. 2.3), los músculos extensores de la espalda, piernas y caderas se alargan para mantener el tronco erguido, y la rodilla tiene la singular característica (sólo compartida por el elefante) de bloquear la pierna cuando está completamente extendida. A menudo, estos cambios son inadecuados para los fines del bipedismo y el resultado es que algunos animales sufren numerosas dolencias, como, por ejemplo, dolor de espalda, por su peculiar postura.

Los pájaros han sido bípedos desde hace más de cien millones de años y, de algún modo, están mucho mejor adaptados a este tipo de apoyo que el hombre. Por ejemplo, en el hombre el centro de gravedad de la cabeza, brazos y tronco está localizado en el pecho, muy por encima de las caderas que es donde se apoya, mientras que en los pájaros el centro de gravedad de la cabeza, alas y cuerpo está debajo de las caderas (Fig. 3.24). De este modo, un pájaro pende de sus caderas de un modo muy estable, mientras que un hombre está en equilibrio muy precario sobre las suyas.



FIGURA 3.24
El centro de gravedad del cuerpo de un pájaro está por debajo de sus caderas.

3.4. EJEMPLOS EN LOS QUE INTERVIENE EL MOMENTO

Cuando la condición del momento se emplea junto con la primera ley de Newton en problemas de equilibrio, una fuerza desconocida adicional ha de determinarse en el problema. En este apartado, estas propiedades las aplicamos a algunos problemas de biomecánica. Sin embargo, las técnicas usadas aquí son bastante corrientes y pueden servir también para resolver problemas de equilibrio en ingeniería y en mecánica. Se encontrarán ejemplos de estos problemas al final del capítulo.

Ejemplo 1. Hallar las fuerzas $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{F}_L$ que ejercen sobre el suelo los pies derecho e izquierdo, respectivamente, de un hombre de 82 kp que

está en posición erecta. Su centro de gravedad se encuentra en la línea recta que pasa por el punto medio de la distancia entre sus pies, que es de 30 cm.

Por la primera ley, la suma de las fuerzas ejercidas sobre el hombre es cero,

$$\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_g = 0$$

y por lo tanto, como estas fuerzas son paralelas, sus módulos satisfacen la relación

$$F_R + F_L = 82 \text{ kp} \qquad 3.3$$

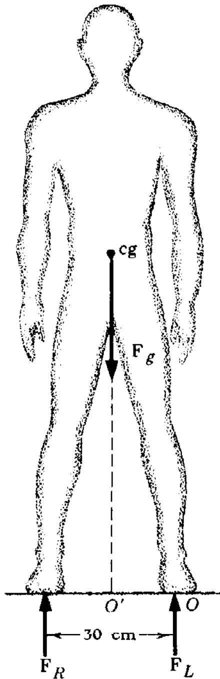


FIGURA 3.25
Fuerzas sobre un hombre en posición erecta, con su centro de gravedad a mitad de la distancia entre sus pies.

Para hallar los módulos individuales F_R y F_L hacemos uso de la Propiedad 6. Los momentos pueden tomarse alrededor de cualquier punto, pero en este caso conviene que los tomemos alrededor del punto O, que es donde F_L actúa sobre el pie izquierdo. Si la separación entre los pies del hombre es de 30 cm, los momentos en este punto son

$$\tau_L = F_L \times 0 = 0$$
$$\tau_R = -F_R \times 0{,}30 \text{ m}$$
$$\tau_g = F_g \times 0{,}15 \text{ m} = 82 \times 0{,}15 \text{ kp-m} = 12{,}3 \text{ kp-m}$$

Como su suma es cero, tenemos

$$-F_R \times 0{,}30 \text{ m} + 12{,}30 \text{ kp-m} = 0$$

por lo tanto,

$$F_R = 41 \text{ kp}$$

Poniendo este resultado en la Ec. 3.3 nos da

$$41 \text{ kp} + F_L = 82 \text{ kp}$$

por lo tanto,

$$F_L = 41 \text{ kp}$$

OBSERVACIÓN. El punto O nos conviene en este caso porque una de las dos incógnitas pasa a través de él. Esta incógnita es eliminada así de la primera parte del problema puesto que su momento alrededor de O es cero. Se necesita un poco más de álgebra si los momentos los tomamos alrededor del punto O', que está en la línea de acción de F_g.

Ejemplo 2. ¿Dónde se halla el centro de gravedad de un hombre de 82 kp cuando está en pie de modo que la fuerza sobre su pie izquierdo, herido, no sobrepase los 20 kp? Como en el ejemplo 1, se supone que los pies están a 30 cm uno del otro (Fig. 3.26).

Para averiguar dónde se halla el centro de gravedad, se repite el cálculo empezando con el conocimiento de que $F_L = 20$ kp; la distancia d del centro de gravedad al pie izquierdo es desconocida. De la Ec. 3.3

obtenemos de nuevo que $F_R = 62$ kp; por lo tanto, los momentos alrededor de O son

$$\tau_L = 20 \text{ kp} \times 0 = 0$$
$$\tau_R = -62 \text{ kp} \times 0{,}30 \text{ m} = -18{,}6 \text{ kp-m}$$
$$\tau_g = 82 \text{ kp} \times d$$

y la suma es

$$-18{,}6 \text{ kp-m} + 82 \text{ kp} \times d = 0$$

Así, la posición del centro de gravedad es

$$d = \frac{+18{,}6 \text{ kp-m}}{82 \text{ kp}} = 0{,}225 \text{ m}$$

y se aparta del pie herido en dirección al pie bueno. Esto se logra doblando el cuerpo hacia la derecha y adoptando una postura típica de cojeo (Fig. 3.26).

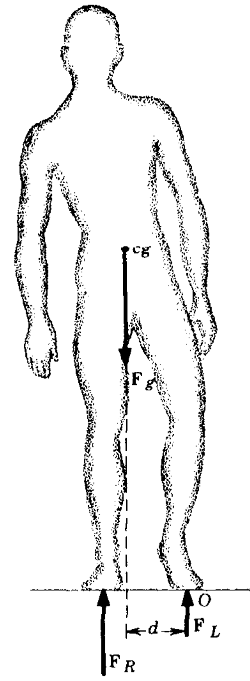


FIGURA 3.26
Un hombre con el tobillo izquierdo herido traslada su centro de gravedad hacia el pie derecho.

OBSERVACIÓN. Compárese este último ejemplo con el del columpio del Apart. 3.1. Mientras que las circunstancias son distintas, la física básica es la misma: en los dos problemas tres fuerzas paralelas, con diferentes líneas de acción, actúan sobre un objeto en equilibrio.

Ejemplo 3. La Fig. 3.27 muestra las fuerzas que actúan sobre el brazo extendido de la Fig. 3.7: la fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$, la fuerza muscular $\mathbf{F}_m$ aplicada por el músculo deltoides y la fuerza de contacto ejercida en la articulación del hombro, $\mathbf{F}_c$. Si el brazo pesa 3 kp, ¿cuál es el módulo de $\mathbf{F}_m$ y el módulo y la dirección de $\mathbf{F}_c$?
Se toman los momentos alrededor de la articulación del hombro (punto O) porque la fuerza desconocida F_c ejerce un momento cero alrededor de este punto, o sea

$$\tau_c = F_c \times 0 = 0$$

La Fig. 3.27 muestra que el centro de gravedad del brazo está en el codo, a 28 cm de O, por lo que el momento producido por $\mathbf{F}_g$ alrededor de O es

$$\tau_g = -3 \text{ kp} \times 0{,}28 \text{ m} = -0{,}84 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

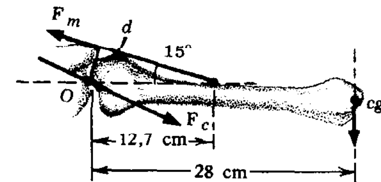


FIGURA 3.27
Fuerzas sobre un brazo extendido.

La fuerza muscular de $\mathbf{F}_m$ se halla por medio de estudios del músculo con rayos X y por investigaciones anatómicas. Se comprueba que actúa formando un ángulo de 15° con el húmero y cortando a éste a 12,70 cm de O. El momento producido por $\mathbf{F}_m$ alrededor de O es

$$\tau_m = F_m d$$

en donde d es la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de $\mathbf{F}_m$. La Fig. 3.28 muestra más claramente la construcción geométrica utilizada para calcular d. Esta distancia se puede hallar o bien dibujando a escala la Fig. 3.28, o empleando la relación trigonométrica

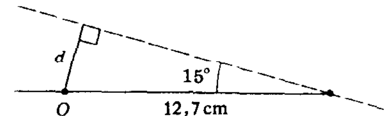


FIGURA 3.28
Construcción geométrica, basada en la Fig. 3.25, utilizada para calcular d.

$$\text{sen } 15° = \frac{d}{12{,}70 \text{ cm}}$$

por lo tanto,

$$d = 12{,}70 \text{ cm} \times \text{sen } 15° = 3{,}28 \text{ cm}.$$

Por cualquiera de los dos se obtiene

$$\tau_m = F_m \times 3{,}28 \times 10^{-2} \text{ m}$$

La suma de estos momentos es cero, por lo tanto,

$$-0{,}84 \text{ kp-m} + F_m \times 0{,}0328 \text{ m} = 0$$

Despejando F_m, tenemos

$$F_m = \frac{0{,}84 \text{ kp-m}}{3{,}28 \times 10^{-2} \text{ m}} = 25{,}6 \text{ kp}$$

Las fuerzas $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_m$ son ahora completamente conocidas; por lo tanto, se puede utilizar la primera ley para determinar $\mathbf{F}_c$. En el Apart. 2.5 (ejemplo 2) ya hicimos esto y suponíamos, para simplificar, que $\mathbf{F}_m$ eran 30 kp. De este modo, las condiciones de equilibrio nos permiten hallar tres incógnitas: los módulos de $\mathbf{F}_m$ y $\mathbf{F}_c$ y la dirección de $\mathbf{F}_c$.

Ejemplo 4. ¿Cuánto vale la fuerza muscular en el brazo extendido del ejemplo 3 cuando la mano sujeta un peso de 5 kp a una distancia de 58,5 cm de la articulación del hombro (Fig. 3.3)?
El peso ejerce sobre el brazo una fuerza de contacto de 5 kp, y su momento alrededor de O es de $-5 \text{ kp} \times 0{,}585 \text{ m} = 2{,}92 \text{ kp} \cdot \text{m}$. Este momento ha de sumarse a los que intervenían en el ejemplo 3 (Ec. 3.4). Se tiene ahora

$$-0{,}84 \text{ kp} \cdot \text{m} + F_m \times 0{,}0328 \text{ m} - 2{,}92 \text{ kp} \cdot \text{m} = 0$$

por lo tanto

$$F_m = \frac{3{,}76 \text{ kp} \cdot \text{m}}{0{,}0328 \text{ m}} = 114{,}6 \text{ kp}$$

Puesto que la distancia entre la articulación y la mano es mucho mayor que la que hay entre la articulación y el músculo, una fuerza de sólo 5 kp ejercida sobre la mano requiere que la fuerza del músculo aumente en 89 kp, lo que es imposible para el individuo medio que no soporta más de 5 kp a 7,5 kp en esta posición de brazo extendido.

Ejemplo 5. Localizar el centro de gravedad del cuerpo (menos los brazos) del atleta en la posición que muestra la Fig. 3.29. Las posiciones de los centros de gravedad de la cabeza (punto H), tronco (punto T) y piernas (punto L) se suponen conocidas a partir de estudios sobre cadáveres. Para un atleta de 1,85 m de altura y 90 kp de peso, los valores normales para los pesos de la cabeza, tronco y piernas son $W_H = 5{,}5$ kp, $W_T = 44{,}5$ kp y $W_L = 27$ kp.

La distancia y desde T al centro de gravedad común (punto A) de la cabeza (5,5 kp) y tronco (44,5 kp) es lo primero que se halla. La dis-

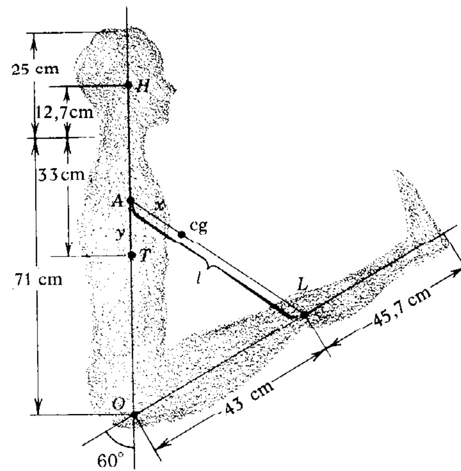


FIGURA 3.29
Localización del centro de gravedad de un atleta en posición doblada.

tancia d entre H y T es de 45,7 cm, por lo tanto la Ec. 3.2 determina que y sea

$$y = \frac{5{,}5 \text{ kp}}{50 \text{ kp}} \times 45{,}5 \times 10^{-2} \text{ m} = 5{,}0 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Entonces, el centro de gravedad común (cg) de la cabeza y tronco (50 kp) y piernas (27 kp) está sobre la línea entre A y L. La longitud l de esta línea se determina por las distancias y ángulos dados en la figura, bien sea haciendo un dibujo a escala u observando, en este caso, que AOL es un triángulo equilátero, por lo tanto $l = 43$ cm. La distancia x desde A a cg se obtiene por medio de la Ec. 3.4, siendo la cabeza y tronco una parte y las piernas la otra. El resultado es

$$x = \frac{27 \text{ kp}}{77 \text{ kp}} \times 43 \times 10^{-2} \text{ m} = 0{,}15 \text{ m}$$

por lo tanto, cg está localizado fuera del cuerpo, tal como se muestra en la Fig. 3.29.

Hay un número de gimnasia llamado posición en L en el que el gimnasta se sienta en el suelo y eleva el cuerpo apoyado en los brazos, tal como se ve en la Fig. 3.30. Como el centro de gravedad de la cabeza, tronco y piernas está enfrente del pecho, el cuerpo se inclina ligeramente hacia atrás de modo que el centro de gravedad esté directamente debajo de los hombros. Con esto se demuestra que la posición del centro de gravedad del cuerpo depende de la postura e influye en el movimiento del cuerpo.

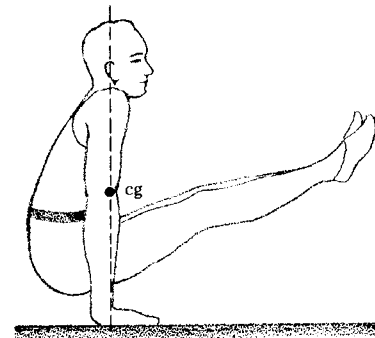


FIGURA 3.30
Cuando un gimnasta hace una media elevación, el centro de gravedad de su cabeza, tronco y piernas está sobre una línea vertical que pasa por sus hombros.

Ejemplo 6. ¿Cuánto valen la fuerza muscular $\mathbf{F}_m$ y la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ que actúan en la cadera de un hombre de 90 kp que se apoya sobre un solo pie (Fig. 3.31)?

Primeramente consideremos un hombre de 90 kp de pie y en posición erecta, de modo que su centro de gravedad está sobre una recta que

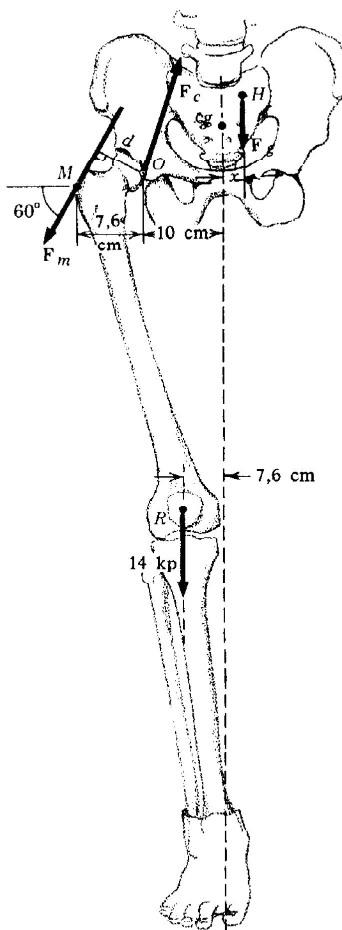


FIGURA 3.31
Las fuerzas sobre el HATL (cabeza, brazos y pierna izquierda) de un hombre de 90 kp apoyado sobre un pie. La pierna derecha (en la figura) sostiene el HATL. La pierna izquierda no se muestra. *(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)*

pasa justo por la mitad de la distancia entre sus pies. Cada una de sus piernas pesa 14 kp y su cabeza, brazos y tronco (llamados HAT para mayor brevedad) juntos pesan 62 kp. Este peso es sostenido por fuerzas de contacto de 31 kp ejercidas por cada fémur en su articulación con la cadera.

Ahora el hombre levanta el pie izquierdo del suelo. Para mantener el equilibrio, el centro de gravedad debe desplazarse hacia el pie derecho. La Fig. 3.31 lo muestra sobre una línea que pasa a 7,60 cm del centro de gravedad de la pierna derecha (punto *R*). La cabeza, brazos, tronco y pierna izquierda (llamados HATL para mayor brevedad) se pueden considerar como si fuesen un solo objeto sobre el que actúan tres fuerzas: la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$ de 76 kp, la fuerza $\mathbf{F}_m$ ejercida por los músculos abductores de la cadera y la fuerza $\mathbf{F}_c$ ejercida por el fémur sobre la cadera. Estas fuerzas se pueden calcular del mismo modo que las fuerzas que actúan sobre el brazo.

Hay una complicación. El centro de gravedad de HATL (punto *H*) no está sobre una línea vertical con el centro de gravedad de todo el cuerpo (punto cg), sino que está sobre una línea a una distancia x hacia la izquierda. La fuerza total de la gravedad sobre el cuerpo se ha dividido entre los 14 kp sobre la pierna derecha y los 75 kp de fuerza sobre el HATL. La suma de los momentos de estas dos fuerzas alrededor de cg debe ser cero, ya que estas fuerzas son equivalentes a la fuerza total de la gravedad que actúa sobre cg. O sea, x viene determinada por la condición

$$14 \text{ kp} \times 0{,}076 \text{ m} - 76 \text{ kp} \times x = 0$$

por lo tanto
$$x = \frac{1{,}064 \text{ kp-m}}{76 \text{ kp}} = 0{,}014 \text{ m} = 1{,}4 \text{ cm}$$

La línea de acción de $\mathbf{F}_m$ se conoce por estudios anatómicos y de rayos X del grupo abductor de la cadera. Forma un ángulo de 60° con la horizontal y corta al fémur en el punto *M*, tal como se ve en la Fig. 3.31. El punto de aplicación de $\mathbf{F}_c$ no se conoce exactamente, pero debe estar en algún punto de la articulación. En este cálculo interesa que sea el punto *O*, que está a 7,6 cm hacia la izquierda de *M* y a 10 cm a la derecha de la línea vertical que pasa por cg. Los momentos se toman alrededor de *O* porque $\mathbf{F}_c$ produce un momento cero alrededor de él. La distancia perpendicular *d* desde *O* a $\mathbf{F}_m$ se halla estudiando la Fig. 3.31. Es

$$d = 7{,}6 \text{ cm} \times \text{sen } 60° = 6{,}58 \text{ cm}$$

por lo que el momento total alrededor de *O* es

$$F_m \times 6{,}58 \times 10^{-2} \text{ m} - 76 \text{ kp} \times 11{,}4 \times 10^{-2} \text{ m} = 0$$

Entonces, la fuerza del músculo es

$$F_m = \frac{8{,}664 \text{ kp-m}}{6{,}58 \times 10^{-2}} = 131{,}67 \text{ kp}$$

Ahora podemos hallar la fuerza de contacto por medio de la primera ley de Newton. Las fuerzas $\mathbf{F}_m$ y $\mathbf{F}_g$ se dibujan de arriba abajo (Fig. 3.32) y $\mathbf{F}_c$ es la fuerza que, añadida a éstas, completa el triángulo. Ya se han discutido los detalles en el Apart. 2.5. Se obtiene que el módulo de $\mathbf{F}_c$ es de unos 182 kp, o sea, más de 6 veces la fuerza de contacto ejercida sobre la cadera cuando se descansa sobre ambos pies. Así, cuando una persona anda, la fuerza de contacto en la cadera cambia enormemente al apoyarse el cuerpo alternativamente sobre uno y otro pie, sometiendo a la articulación a un considerable machaqueo. Por supuesto que la articulación está hecha para absorber estos golpes sin producir daño, pero si la articulación funciona mal, este machaqueo puede producir un trauma.

OBSERVACIÓN. Los detalles de este cálculo no deberían oscurecer la razón física fundamental para el valor grande de F_c. Como el centro de gravedad del HATL está a 11,4 cm de O, la fuerza hacia abajo de la gravedad tiende a hacerlo girar en el sentido de las agujas del reloj alrededor de O. Para evitar esto, el músculo de la cadera tira hacia abajo del otro extremo de O, y como la línea de acción de $\mathbf{F}_m$ está a sólo 6,58 cm de O, su módulo debe ser mayor que F_g. Entonces para contrarrestar estas dos fuerzas hacia abajo se necesita una fuerza de contacto hacia arriba todavía más grande.

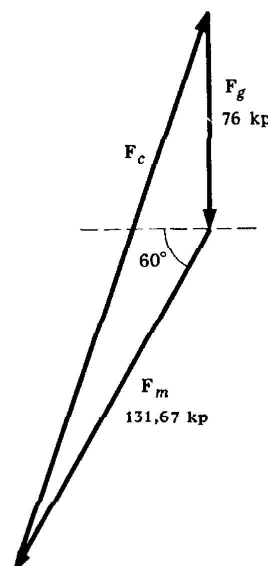


FIGURA 3.32
Diagrama de vectores usado para hallar $\mathbf{F}_c$.

PROBLEMAS

1. El antebrazo de la Fig. 3.33 está, con respecto al brazo, a 90° y sostiene en la mano un peso de 7 kp. Despréciese el peso del antebrazo. (*a*) ¿Cuál es el momento producido por el peso de 7 kp alrededor de la articulación del codo (punto *O*)? (*b*) ¿Cuál es el momento alrededor de *O* producido por la fuerza $\mathbf{F}_m$ ejercida sobre el antebrazo por el bíceps? (utilizar la condición del momento) (*c*) ¿Cuál es el módulo de $\mathbf{F}_m$?
   Resp. (*a*) —2,31 kp-m; (*b*) +2,31 kp-m; (*c*) 5,77 kp.
2. Repetir el Prob. 1 suponiendo que el antebrazo y la mano juntos pesan 3,5 kp y que su centro de gravedad está a 15 cm de *O*.

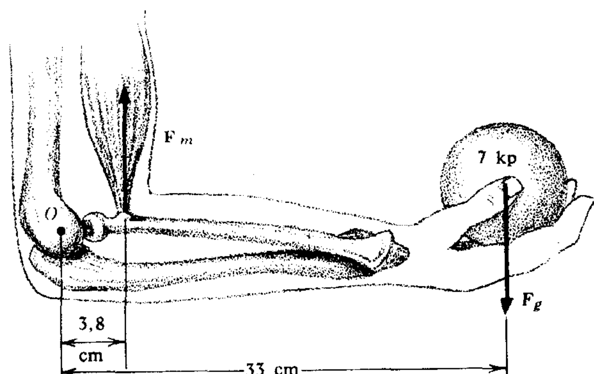


FIGURA 3.33. Problemas 1 y 2.

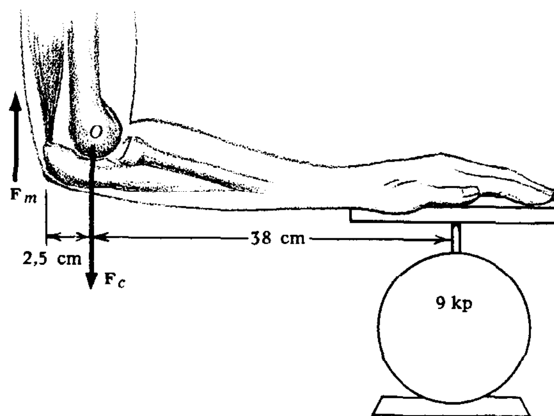


FIGURA 3.34. Problemas 3 y 4.

3. Con el antebrazo en posición horizontal, tal como aparece en la Fig. 3.34, la mano ejerce una fuerza de 9 kp sobre la balanza. Hallar los módulos de las fuerzas $\mathbf{F}_m$ y $\mathbf{F}_c$ que ejercen sobre el antebrazo el tríceps y el húmero. (Despreciar el peso del antebrazo.)
Resp. 120 y 129 kp.
4. Repetir el Prob. 3 suponiendo que el antebrazo y mano juntos pesan 2,5 kp y que su centro de gravedad está a 18 cm de *O*.
5. Los adultos jóvenes pueden ejercer una fuerza máxima de 40 kp sobre el aparato que se muestra en la Fig. 3.35. Si el aparato está a 28 cm del codo y el bíceps está unido a 5 cm del codo, ¿cuáles son los módulos de las fuerzas ejercidas por (*a*) el bíceps y (*b*) el húmero?
Resp. (*a*) 224 kp; (*b*) 184 kp.

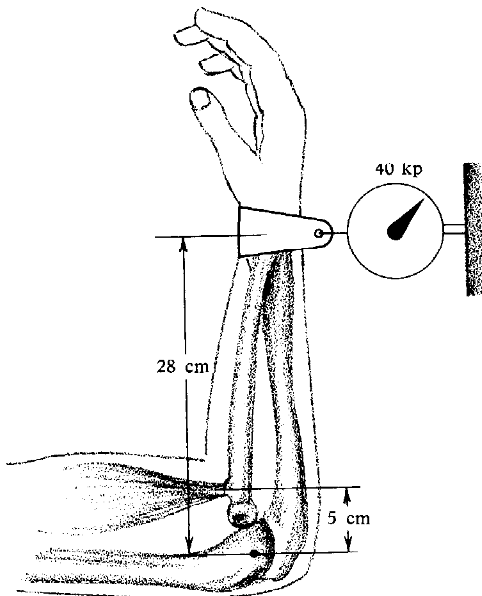


FIGURA 3.35. Problema 5.

6. Joe y Sam transportan un peso de 120 lb sobre una tabla de 10 pies, tal como aparece en la Fig. 3.36. La tabla pesa 25 lb y su centro de gravedad está en su centro. El peso de 120 lb está a 3 pies del extremo de la tabla que sujeta Joe. ¿Cuáles son los módulos de las fuerzas que deben ejercer Joe y Sam para sostener este peso?

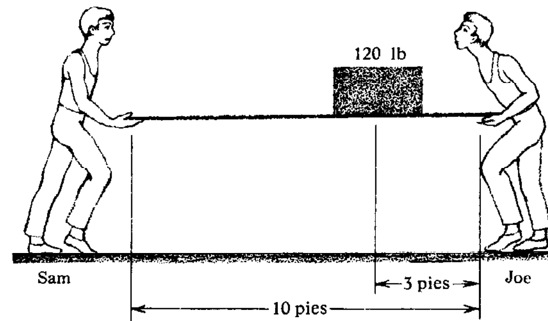


FIGURA 3.36. Problema 6.

7. La Fig. 3.37 nos muestra a un atleta preparado para dar un salto hacia arriba. Pesa 180 lb y su centro de gravedad está localizado por encima de un punto *P* que hay en el suelo a 3 pies de la punta de sus pies y a 2 pies de sus hombros. ¿Cuáles son las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las manos y pies del atleta?
Resp. 72 y 108 lb.

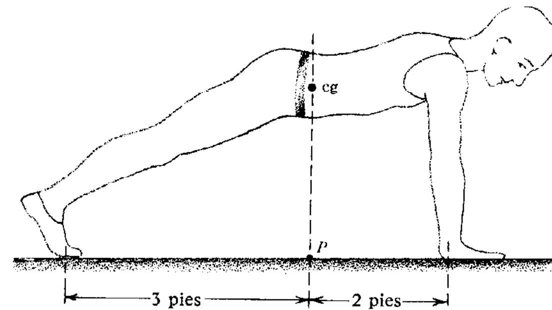


FIGURA 3.37. Problema 7.

8. Un hombre de 200 lb está de pie a 5 pies de uno de los extremos de un andamio de 20 pies (Fig. 3.38). El andamio pesa 150 lb. ¿Cuáles son las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas que sostienen el andamio?

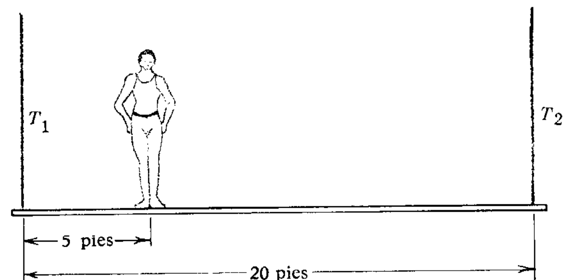


FIGURA 3.38. Problema 8.

9. Un hombre lleva una tabla de 8 pies. Con una mano empuja hacia abajo sobre uno de los extremos con una fuerza $\mathbf{F}_1$ y con la otra mano, que está a 1 pie de este extremo, empuja hacia arriba con una fuerza $\mathbf{F}_2$ (Fig. 3.39). La tabla pesa 12 kp y su centro de gravedad está en su centro. Hallar F_1 y F_2.
Resp. 38 y 50 kp.

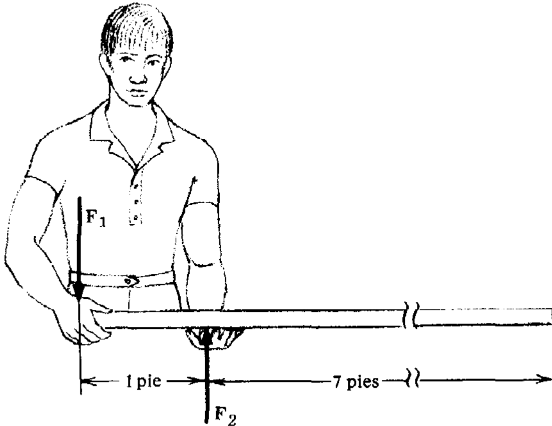


FIGURA 3.39. Problema 9.

10. La Fig. 3.40 nos muestra un móvil compuesto de cuatro adornos unidos a unas varillas ligeras por medio de unos hilos. Las distancias (en pulgadas) entre los adornos y los hilos que los sustentan, lo mismo que el peso de uno de los adornos (en libras) vienen indicados en la figura. Si el móvil ha de permanecer en equilibrio, tal como aparece en la figura, ¿cuáles son los pesos de los otros adornos? Se desprecia el peso de las varillas y de los hilos. (*Indicación:* Hallar primero el peso de *A*.)

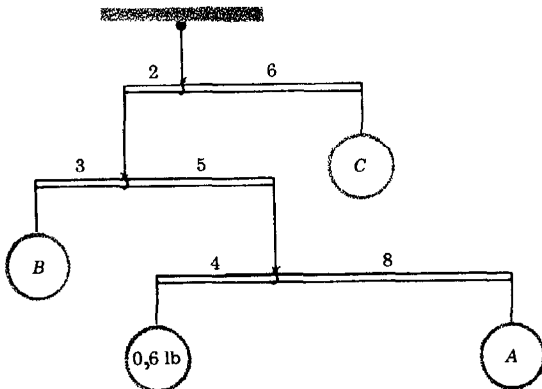


FIGURA 3.40. Problema 10.

11. El hombre de la Fig. 3.41 está a punto de poner la canoa sobre sus hombros. La canoa mide 5,4 m de longitud y pesa 38 kp; su centro de gravedad está en su centro. *¿Cuál es el módulo de la fuerza* $\mathbf{F}_1$ que aplica el hombre a la canoa mientras se halla en la posición que aparece en la figura? Su esposa, que no sabe nada de física, intenta ayudarle elevando la canoa por el punto *A*. Explicar que esto no ayuda en nada al hombre. ¿En qué punto tendría que elevarla para que le sirviese de ayuda? (Para este problema no hace falta conocer el ángulo θ, pero si se conoce se resolverá mejor; podemos suponer que es 30°.)
Resp. 28,5 kp.

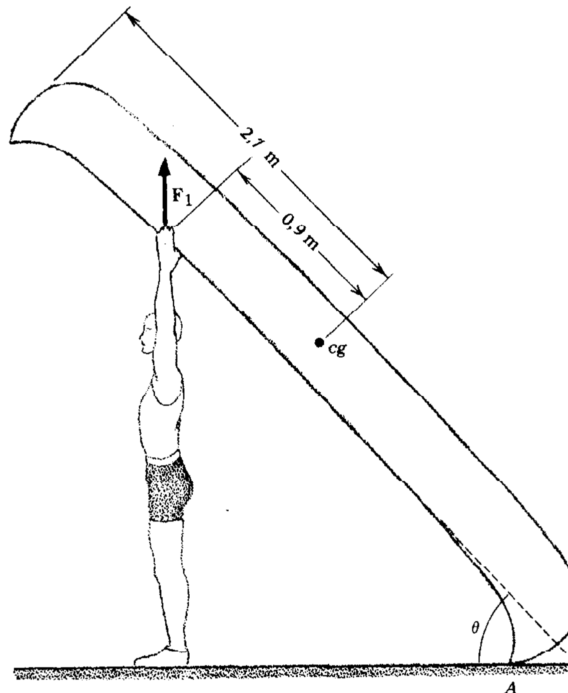


FIGURA 3.41. Problema 11.

12. La Fig. 3.42 muestra una tabla de 9 pies, sujeta por un extremo a un gozne (punto *O*) y mantenida en un ángulo de 30° con respecto a la horizontal por medio de un peso de 50 lb colgado de una cuerda que va sujeta al otro extremo de la tabla. El centro de gravedad de la tabla está a 4 pies del extremo sujeto al gozne. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza $\mathbf{F}_1$ ejer-

cida sobre la tabla por la cuerda? (*b*) ¿Cuál es el momento ejercido por $\mathbf{F}_t$ alrededor de *O*? (*c*) ¿Cuál es el peso de la tabla? (*d*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de contacto ejercida por el gozne sobre la tabla?

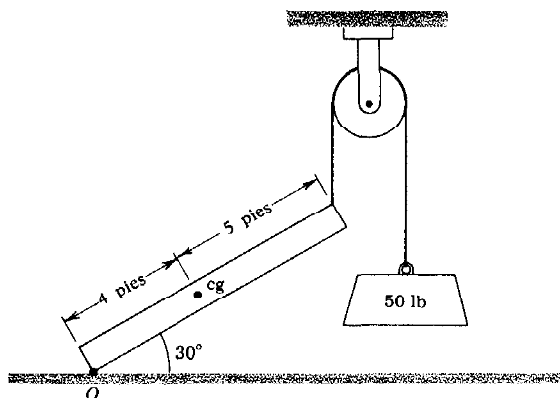


FIGURA 3.42. Problema 12.

13. Una escalera de 3,65 m está apoyada contra una pared con un ángulo de 34°, tal como se ve en la Fig. 3.43. Un pintor que pesa 90 kp está subido a ella a 91 cm de la parte superior. (*a*) ¿Cuál es el momento alrededor del punto *O* ejercido por el peso del pintor? (*b*) Supongamos que la pared no tiene rozamiento de modo que la fuerza $\mathbf{F}_1$ ejercida sobre la escalera por la pared es perpendicular a la pared. ¿Cuál es el módulo de $\mathbf{F}_1$? (Despreciar el peso de la escalera.) Averiguar (*c*) el módulo y (*d*) la dirección de la fuerza $\mathbf{F}_2$ ejercida por el suelo sobre la escalera en el punto *O*. *Resp.* (*a*) 137,9 kp-m; (*b*) 45,5 kp; (*c*) 100,9 kp; (*d*) 63°.

14. (*a*) Demostrar que el valor de la componente horizontal $\mathbf{F}_{2x}$ de la fuerza $\mathbf{F}_2$ ejercida por el suelo sobre la escalera de la figura 3.43 viene dado por

$$F_{2x} = W\left(1 - \frac{x}{3{,}65}\right) \tan \theta$$

donde *W* es el peso del operario. Despreciar el peso de la escalera. Comprobar esta fórmula con la respuesta dada en el problema 13. (*b*) Si el coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y la escalera es 0,6, ¿cuál es el mayor ángulo θ en que puede colocarse la escalera de modo que el

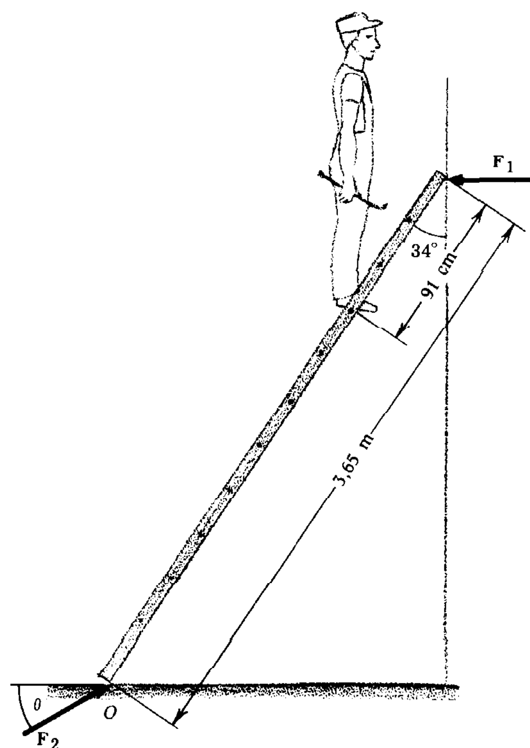


FIGURA 3.43. Problemas 13 y 14.

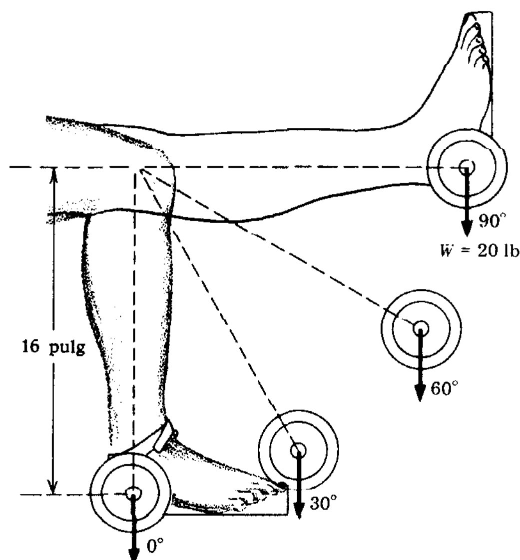


FIGURA 3.44. Problema 15.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

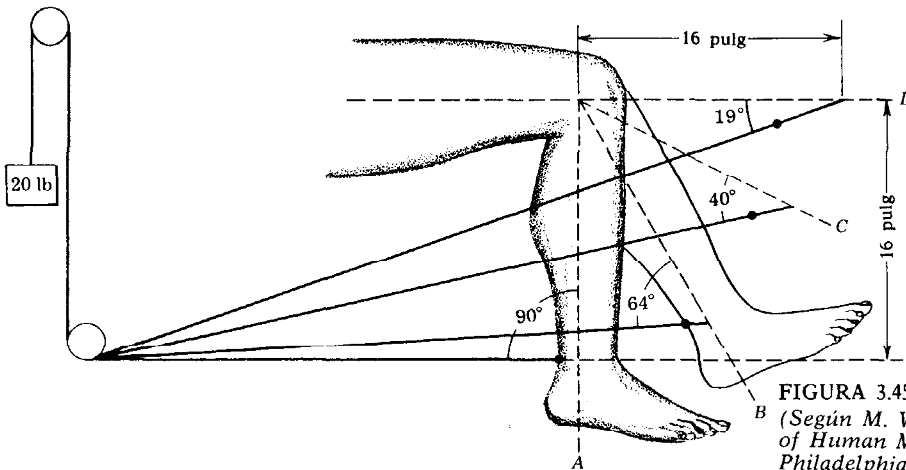


FIGURA 3.45. Problema 16.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

operario pueda permanecer con seguridad en cualquier punto de la misma?

15. En el ejercicio que aparece en la Fig. 3.44, el momento alrededor de la rodilla ejercido por el peso de 20 lb sujeto al tobillo varía con la elevación de la pierna. *(a)* Calcular el momento para las cuatro posiciones que aparecen en la figura. *(b)* Deducir la ecuación general para el momento alrededor de la rodilla para cualquier ángulo θ entre la pierna y la vertical.
Resp. (a) 0, —160, —277, —320 lb pulg; *(b)* $\tau = W$ (16 pulg) sen θ.
16. En el ejercicio que se hace con el aparato que se ve en la Fig. 3.45, el momento alrededor de la rodilla ejercido por la cuerda varía con la elevación de la pierna. *(a)* Calcular el momento para las cuatro posiciones de la figura y comparar con el problema 15. *(b)* Deducir la ecuación general para el momento alrededor de la rodilla para cualquier ángulo θ entre la pierna y la cuerda.
17. El antebrazo de la Fig. 3.46 está a 50° con respecto al brazo y sujeta en la mano un peso de 15 lb. *(a) ¿Cuál es el módulo de* la fuerza ejercida sobre el antebrazo por el bíceps? (Despreciar el peso del antebrazo.) *(b)* Hallar el módulo de la fuerza ejercida por el codo sobre el antebrazo.
(a) 120 lb; *(b)* 105 lb.
18. Repetir el Prob. 17 suponiendo que el antebrazo y la mano juntos pesan 6 lb y que su centro de gravedad está a 8 pulg del codo.
Resp. (a) 144 lb; *(b)* 123 lb.

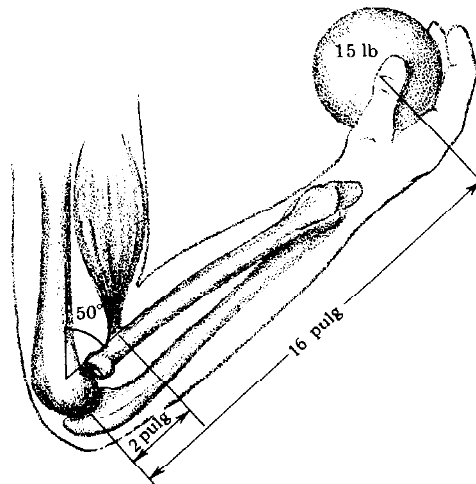


FIGURA 3.46. Problemas 17 y 18.

19. Estando en postura erecta, el centro de gravedad del cuerpo está sobre una línea que cae a 1,25 pulg delante de la articulación del tobillo (Fig. 3.47). El músculo de la pantorrilla (el grupo de músculos del tendón de Aquiles) se une al tobillo a 1,75 pulg por detrás de la articulación y sube en un ángulo de 83°. *(a)* Hallar la fuerza $\mathbf{F}_m$ en este músculo para un hombre de 150 lb de peso que esté de pie. (Recuérdese que cada pierna soporta la mitad del peso del hombre.) *(b)* ¿Cuál es la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ ejercida en la articulación del tobillo?
Resp. (a) 54,0 lb; *(b)* $F_c = 129$ lb; $\theta = 87°$.

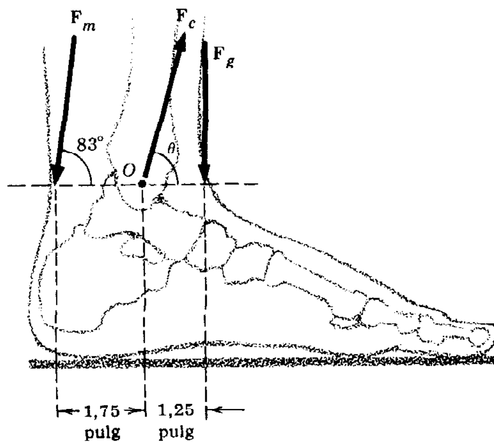


FIGURA 3.47. Problema 19.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

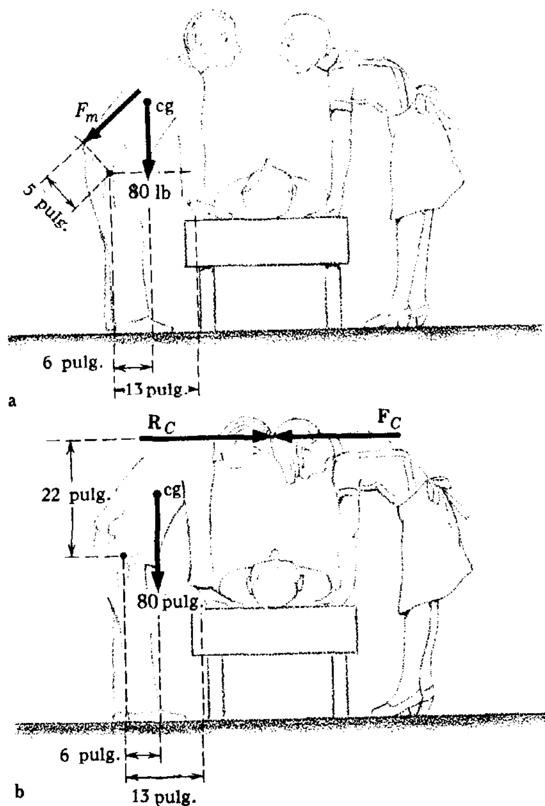


FIGURA 3.48. Problema 20.

20. La Fig. 3.48 muestra dos enfermeros que levantan un paciente de 110 lb. El peso del HAT (cabeza, brazos y tronco) de cada enfermero es 80 lb y actúa en el centro de gravedad (cg) del HAT. *(a)* ¿Cuál es el módulo de la fuerza $\mathbf{F}_m$ ejercida por los músculos de la espalda de cada enfermero cuando levantan al paciente en la forma habitual mostrada en la Fig. 3.48*a*? *(b)* La Fig. 3.48*b* muestra un recurso que a veces se utiliza para evitar esfuerzos de la espalda: los enfermeros *mantienen sus cabezas* en contacto de modo que ejercen una fuerza $\mathbf{F}_c$ de contacto el uno sobre el otro. ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{F}_c$ cuando la fuerza de los músculos de la espalda es nula?

21. La Fig. 3.49 nos muestra un aparato de ejercicios de Storm para fortalecer el cuádriceps. Consiste en una tabla con bisagra en uno de sus extremos (punto *O*) y un cable al que se le engancha una polea. El paciente se sienta en el borde de una mesa y levanta la tabla por medio de un aparejo sujeto a uno de los pies y conectado a la polea por medio de una cuerda. Para cambiar la tensión de la cuerda se puede variar el peso *W* colocado en el extremo de la tabla. Para este problema supongamos que el peso *W* es de 4 lb y que la tabla pesa 10 lb y tiene 4 pies de largo. *(a)* Calcular individualmente los momentos alrededor del gozne (punto *O*) producidos por el peso de la tabla y por el peso de 4 lb cuando la tabla está horizontal ($\theta = 0$). (El centro de gravedad de la tabla podemos suponer que está en el punto medio de la tabla.) *(b)* Calcular individualmente los momentos alrededor de *O* producidos por el peso de la tabla y por el peso de 4 lb cuando se eleva la tabla de modo que $\theta = 26°$. *(c)* Cuando la tabla se mantiene a 26°, ¿cuál es el momento alrededor de *O* producido por la fuerza $\mathbf{F}_t$ ejercida por la cuerda? ¿Es éste mayor o menor que el producido por $\mathbf{F}_t$ cuando $\theta = 0$? *(d)* Cuando $\theta = 26°$, la distancia *d* desde la polea a *O* es 3 pies, medida a lo largo de la tabla. ¿Cuál es F_t? *(e)* ¿Cuál sería el peso *W* del extremo de la tabla para una fuerza de 14 lb que se aplicara al pie cuando $\theta = 26°$?
Resp. *(a)* —20 y —16 lb-pie; *(b)* —18 y —14,4 lb-pie; *(c)* 32,4 lb-pie; *(d)* 12 lb; *(e)* 5,5 lb.

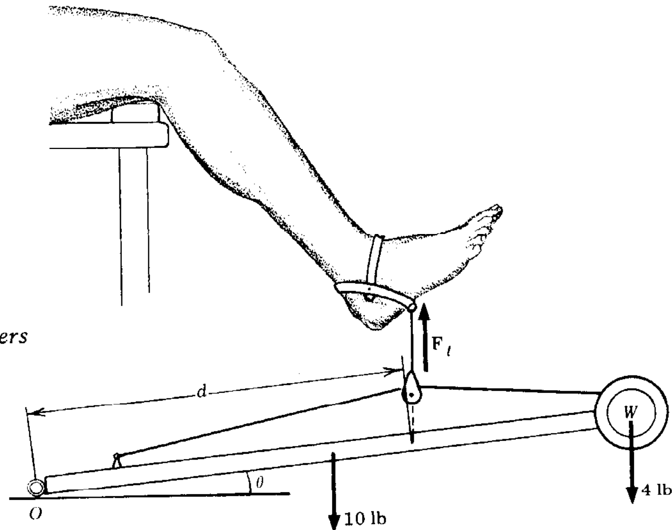


FIGURA 3.49. Problema 21.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, «Biomechanics of Human Motion», W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

OBSERVACIÓN. Cuando la tabla se eleva, el momento que debe producir $\mathbf{F}_t$ disminuye. Además, al elevarse la pierna la polea se aleja de *O*, de modo que $\mathbf{F}_t$ se aplica más allá de *O*. Estos dos factores disminuyen la fuerza que debe ejercer la pierna al alcanzar su posición extendida, donde la capacidad del músculo para ejercer una fuerza es la mínima.

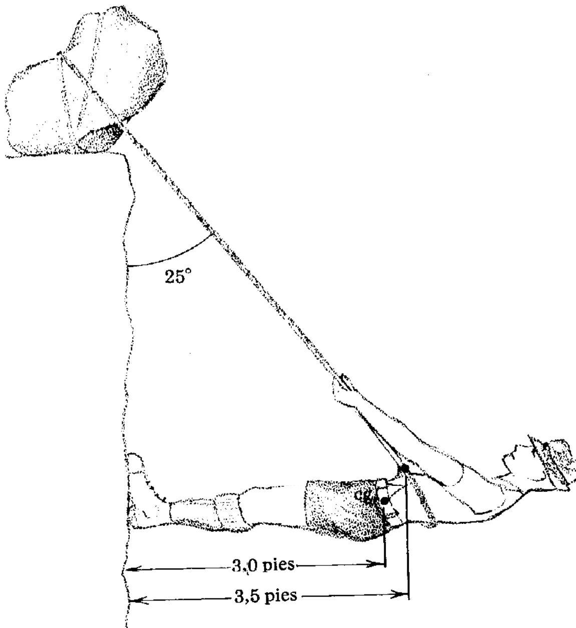


FIGURA 3.50. Problema 22.

22. En la escalada de montaña, el método más corriente para bajar es el «rappel». El escalador sujeta un extremo de una cuerda a una roca firme y el otro extremo a una hebilla especial colocada en el pecho, a 0,5 pie por encima de su centro de gravedad. (La hebilla sujeta la cuerda y permite al escalador aumentar la longitud de ésta haciendo pasar más cuerda del extremo libre por la hebilla. De este modo es capaz de descender una pared con facilidad, como se muestra en la Fig. 3.50.) El escalador de la figura pesa 180 lb, su centro de gravedad está a 3,0 pies de sus pies y la cuerda forma un ángulo de 25° con la pared. Hallar la tensión de la cuerda y el módulo y dirección de la fuerza superficial ejercida por la pared sobre sus pies.
23. La Fig. 3.51 muestra las fuerzas sobre el pie de un hombre de 90 kp en posición agachada. Determinar (*a*) el módulo de la fuerza $\mathbf{F}_m$ ejercida por el tendón de Aquiles y (*b*) el módulo y (*c*) la dirección de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ ejercida en la articulación del tobillo.
Resp. (*a*) 57,2 kp; (*b*) 93 kp; (*c*) 71°.

OBSERVACIÓN. La Figura 3.51 muestra las fuerzas sobre el pie mientras que la Fig. 3.47 muestra las fuerzas sobre el cuerpo por encima del pie.

24. La grúa de 40 pies de la Fig. 3.52 pesa 4000 lb y está levantando un peso de

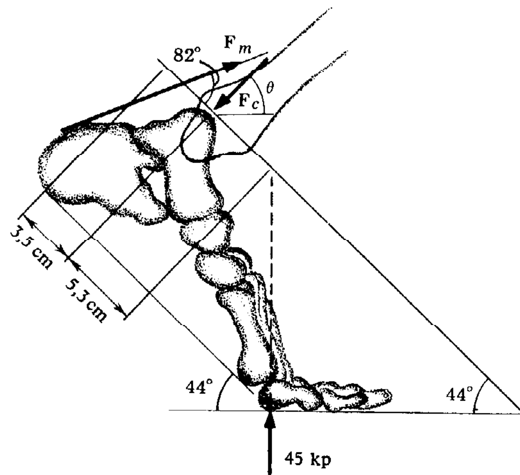


FIGURA 3.51. Problema 23.
(Según M. Williams y H. R. Lissner, "Biomechanics of Human Motion", W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962; con autorización.)

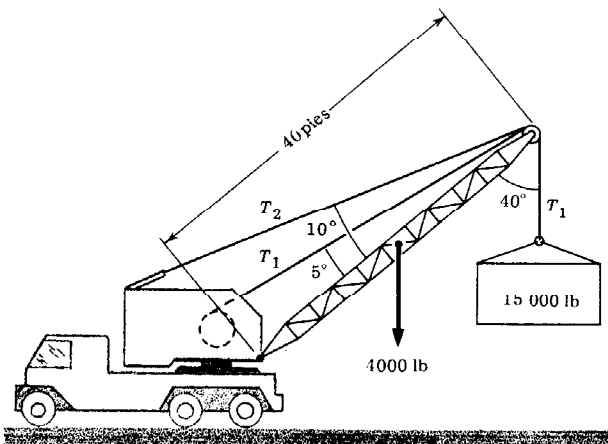


FIGURA 3.52. Problema 24.

15000 lb. El cable de elevación T_1 pasa por una polea en el extremo de la grúa y se conecta a un cabrestante eléctrico en la cabina. El cable que soporta la grúa está fijado al extremo de ésta. Hallar la tensión T_2 en el cable que soporta la grúa y la fuerza $\mathbf{F}_s$ en el pivote.

25. Un objeto está apoyado sobre dos balanzas, separada una de la otra 2 m (Figura 3.53). La balanza de la izquierda señala 20 kp y la de la derecha 12 kp. (*a*) ¿Cuál es el peso del objeto? (*b*) ¿Cuál es la distancia perpendicular *d* desde *O*

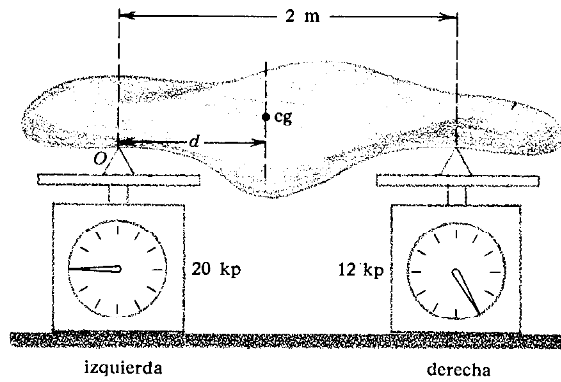


FIGURA 3.53. Problema 25.

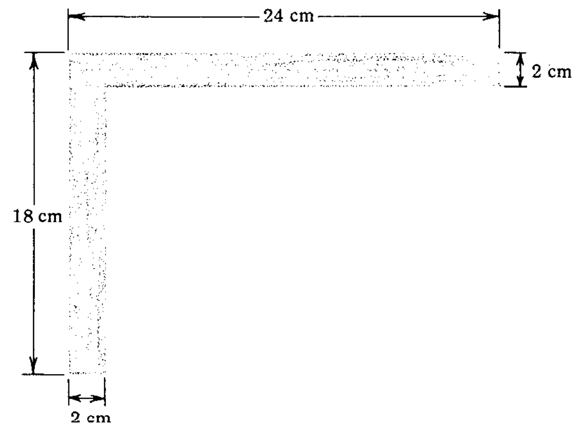


FIGURA 3.54. Problema 26.

a la línea vertical que pasa por el centro de gravedad (cg) del objeto?
Resp. (a) 32 kp; (*b*) 0,75 m.

26. El centro de gravedad de una persona se mide pesando la persona sobre una plataforma apoyada en dos balanzas (Fig. 3.55). Las balanzas se ajustan para marcar cero cuando sólo soportan la plataforma y la

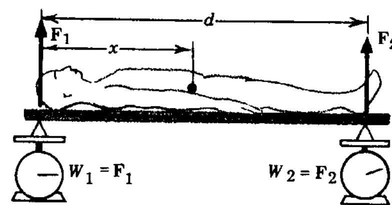


FIGURA 3.55. Problema 26.

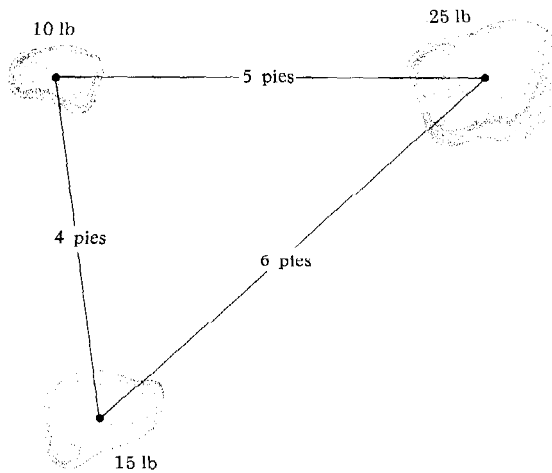


FIGURA 3.56. Problema 28.

persona se coloca con la cabeza y los pies justo sobre las balanzas. Deducir la fórmula de la distancia x del centro de gravedad a la cabeza en función de los valores W_1 y W_2 que marcan las balanzas, y de la talla d de la persona.

27. Localizar el centro de gravedad de la figura de espesor uniforme, en forma de *L*, que aparece en la Fig. 3.54.

28. Localizar la posición del centro de gravedad de los tres objetos de la Fig. 3.56.

BIBLIOGRAFÍA

BRODER, Marion R.: «Efficiency of Human Movement», W. B. Saunders Company, Filadelfia, 1960. Se utilizan las leyes básicas de la mecánica para analizar el movimiento humano. Se hace especial hincapié en el atletismo.

TRICKER, R. A. R. y B. J. K. TRICKER: «The Science of Mechanics», American Elsevier Publishing Company, Inc., Nueva York, 1967. Muchos ejemplos interesantes de biología y atletismo ilustran los principios generales de la mecánica. Los aspectos biológicos del equilibrio se discuten en varios capítulos.

WILLIAMS, Marian y Herbert R. LISSNER: «Biomechanics of Human Motion», W. B. Saunders Company, Filadelfia, 1962. Contiene muchos ejemplos resueltos de problemas de estática basados en datos médicos reales tomados de la literatura científica.

Capítulo 4 Dinámica

Los dos capítulos anteriores tratan de la estática, que es la física de los objetos en equilibrio. En este capítulo se estudia la dinámica, que es la física de los objetos en movimiento. En primer lugar generalizamos la primera ley de Newton para abarcar los objetos que se mueven con velocidad uniforme, y luego estudiaremos el movimiento de los objetos cuando la fuerza total sobre ellos no es nula.

4.1. SISTEMAS DE REFERENCIA

En los dos últimos capítulos se discutieron ampliamente las condiciones necesarias y suficientes para que un objeto permaneciese en reposo. Sin embargo, la frase «en reposo» es muy ambigua, porque un objeto puede estar en reposo en un sistema, mientras que se está moviendo en otro. Por ejemplo, un hombre sentado en un avión está en reposo con respecto al avión, pero se está moviendo a 600 millas por hora con respecto a la Tierra. El avión y la Tierra son dos *sistemas de referencia distintos*, respecto a los cuales se puede describir el movimiento del hombre. Como estos dos sistemas de referencia están en movimiento uno respecto al otro, el hombre puede estar en reposo en uno mientras se está moviendo en el otro.

La expresión «en reposo» tiene un sentido claro solamente en un sistema de referencia concreto. Cuando en los capítulos 2 y 3 se aplicaron las condiciones de equilibrio, este sistema de referencia era la Tierra. Esto parece razonable y, de hecho, hasta los tiempos de Galileo se pensó que la Tierra estaba en reposo y que era el centro del universo. Sin embargo, desde que se descubrió que la Tierra se mueve alrededor del Sol, se ha visto que no hay nada especial para que la Tierra sea tomada como sistema de referencia. Si las condiciones de equilibrio son ciertas en el sistema de referencia de la Tierra, son también probablemente ciertas en otros sistemas de referencia.

Vamos a concentrarnos en la primera ley del movimiento de Newton (Apart. 2.1). Esta ley establece que la fuerza total sobre un objeto en reposo es cero. Esto es verdad en sistemas de referencia que no son la Tierra, como por ejemplo el avión que vuela a 600 millas por hora. Un experimento físico, como el de la Fig. 2.39, conduce al mismo resultado en el avión que en la Tierra. Incluso, solamente el sentarse en el avión es una especie de experimento, porque las fuerzas musculares y las fuerzas de contacto ejercidas sobre cada parte del cuerpo deben mantener esa parte en reposo. Como una persona sentada en el avión no experimenta ninguna sensación de movimiento, estas fuerzas deben ser iguales para él que para una persona que está sentada en tierra. Así pues, si la primera ley es cierta en la Tierra, también es cierta en un sistema de referencia que se mueve a 600 millas por hora con respecto a la Tierra.

Por otra parte, la primera ley no es cierta en todos los sistemas de referencia. Por ejemplo, no es cierta tomando como sistema de referencia una montaña rusa cuando se va cuesta abajo. O sea, la fuerza total ejercida sobre una persona, en reposo con respecto a la montaña rusa, no es cero. Esto es evidente por las fuerzas adicionales que experimenta sobre su cuerpo una persona montada en la montaña rusa, cuando va cuesta abajo.

Definición. *Un sistema de referencia inercial* es un sistema de referencia en el cual es válida la primera ley de Newton. Tanto la Tierra como el avión son, aproximadamente, sistemas inerciales, pero no así la montaña rusa.

Debido a la importancia especial de los sistemas de referencia inerciales en la física, es necesario determinar qué sistemas de referencia son inerciales. Galileo investigó este punto durante muchos años. Quería convencer a la gente de que la Tierra podía estar moviéndose aun sin dar una sensación aparente de movimiento. El resultado de sus investigaciones fue el descubrimiento del principio fundamental que dice que *cualquier sistema de referencia, que se está moviendo uniformemente con respecto a un sistema inercial, es él mismo un sistema de referencia inercial.* El movimiento uniforme es un movimiento con velocidad constante en línea recta. La montaña rusa no es un sistema inercial porque al caer sigue una trayectoria curvilínea. Tampoco la Tierra es un sistema de referencia inercial, porque los objetos en reposo sobre su superficie se mueven constantemente en un gran círculo al girar la Tierra sobre su eje. Sin embargo, este movimiento influye poco y en este libro vamos a considerar la Tierra como un sistema de referencia inercial. En tanto que la Tierra es un sistema inercial, el avión que se mueve uniformemente con respecto a la Tierra es también un sistema de referencia inercial, y por lo tanto una persona en reposo en el avión no tiene sensación de movimiento.

Una consecuencia inmediata del principio de Galileo es que la fuerza total ejercida sobre un objeto es cero, no solamente si el objeto está en reposo, sino también si se mueve uniformemente con respecto a un sistema de referencia inercial. Esto es así porque un objeto que se mueve uniformemente con respecto a un sistema de referencia inercial, es a su vez un sistema de referencia inercial. Como el objeto está en reposo en su propio sistema de referencia, la fuerza total sobre él es cero. El enunciado completo de la primera ley de Newton es el siguiente:

Primera ley de Newton del movimiento (enunciado completo). *Para que un objeto permanezca en reposo o se mueva uniformemente con relación a un sistema de referencia inercial, es necesario que el vector suma de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto sea nulo.*

La primera ley del movimiento es válida, por definición, en todos los sistemas de referencia inerciales. Pero, ¿qué sucede con las otras leyes físicas, tales como la condición del momento (Apart. 3.1)? ¿Son también válidas en todos los sistemas de referencia inerciales? Los físicos del siglo XIX pensaban que todas las leyes de la mecánica eran ciertas en todos los sistemas de referencia inerciales, pero que las otras leyes, esespecialmente las leyes que hacen referencia a la luz y a lelectro-

magnetismo, sólo eran válidas en un sistema inercial particular llamado éter. La idea del éter fue abandonada después que Einstein demostró que las leyes de la luz y el electromagnetismo, cuando se entienden adecuadamente, son rigurosamente válidas en todos los sistemas de referencia inerciales. Sus resultados quedan resumidos en el principio de la relatividad (restringida): *Todas las leyes de la física son ciertas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

Hay que recordar que un sistema inercial se define solamente como un sistema de referencia en el que es válida la primera ley. El principio de Galileo afirma, además, que cualquier sistema de referencia que se mueve uniformemente con respecto a un sistema de referencia inercial, es a su vez un sistema de referencia inercial. Entonces, de acuerdo con el principio de la relatividad, todas las leyes de la física son ciertas en todos los sistemas de referencia inerciales. Así pues, el principio de la relatividad establece que los sistemas de referencia inerciales son los sistemas de referencia apropiados para describir las leyes físicas.

4.2. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

El concepto de movimiento uniforme debe ser ahora más preciso. Todo movimiento debe describirse con respecto a un sistema de referencia, que para nosotros será siempre un sistema de referencia inercial. Sin embargo, no es necesario fijar el sistema de referencia concreto que vamos a utilizar, porque el principio de la relatividad nos asegura que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes para la física.

Definición. Un objeto se mueve con celeridad constante v si la distancia d que recorre en el tiempo t viene dada por

$$d = vt \qquad 4.1$$

para todos los valores de t. La constante v es el *módulo de celeridad* del objeto. La dimensión de la celeridad es (l/t), y las unidades más corrientes de celeridad son pies por segundo (pie/s), millas por hora (mi/h) y metros por segundo (m/s). La Fig. 4.1 es una representación gráfica de d en función de t para el caso en que $v = 5$ pies/s.

La *velocidad* **v** de un objeto en movimiento es una magnitud vectorial de módulo v (la celeridad del objeto) y sentido (el sentido del movimiento del objeto).

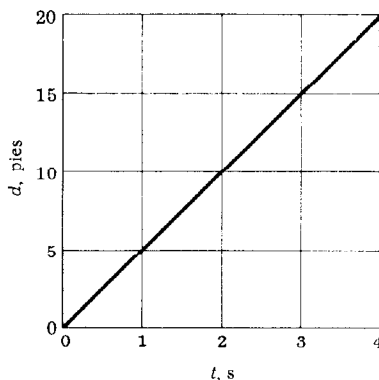


FIGURA 4.1
Gráfico de la distancia d en función del tiempo t para un objeto que se desplaza con una celeridad constante v de 5 pies/s.

Definición. El *movimiento uniforme* es un movimiento con velocidad constante. Como la velocidad es un vector, la velocidad constante implica dos cosas: (1) el módulo v no cambia (celeridad constante) y (2) el sentido del movimiento no cambia (movimiento en línea recta). Así, el movimiento uniforme (velocidad constante) es un movimiento en línea recta con módulo de la celeridad constante. Un objeto en reposo es un caso especial de movimiento uniforme en el que la celeridad es cero.

Un objeto que no se mueve con velocidad constante se dice que realiza un movimiento *acelerado*. Está claro que un objeto acelerado no se mueve en línea recta, o no se mueve con celeridad constante, o las dos cosas. La Fig. 4.2 muestra un coche que se mueve con celeridad constante alrededor de una pista de carreras circular. Las flechas, que representan la velocidad del coche en diferentes posiciones de la pista, tienen la misma longitud pero apuntan en direcciones distintas. Este coche realiza un movimiento acelerado porque su dirección está cambiando continuamente. La Fig. 4.3 muestra un coche que está aumentando su celeridad continuamente mientras se mueve en línea recta. Aquí las flechas, que representan la velocidad del coche en diferentes posiciones, tienen longitudes diferentes pero están apuntando en la misma dirección. Este coche está en movimiento acelerado porque el módulo de su celeridad está cambiando. También son corrientes las situaciones en las que un objeto está cambiando simultáneamente el módulo de celeridad y la dirección, pero estas situaciones no las tendremos en cuenta.

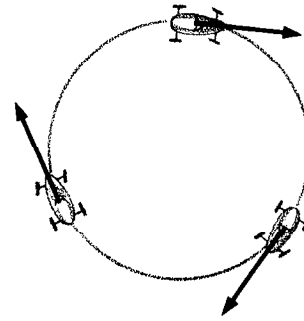


FIGURA 4.2
Coche sometido a aceleración porque cambia su dirección.

Definición. Para un objeto con velocidad $\mathbf{v}_1$ en el instante t_1 y velocidad $\mathbf{v}_2$ en el instante t_2, la aceleración $\mathbf{a}$ durante este intervalo de tiempo se define como

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad 4.2$$

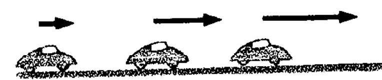


FIGURA 4.3
Coche sometido a aceleración porque varía el módulo de su velocidad.

donde el símbolo † Δ significa «incremento de». La ecuación 4.2 sólo da la aceleración media entre t_1 y t_2, pero si el intervalo de tiempo es suficientemente corto, la aceleración media es aproximadamente igual a la aceleración instantánea en el instante medio entre t_1 y t_2.

Al igual que la velocidad, la aceleración es también una magnitud vectorial. Sus dimensiones son $[v/t] = [l/t^2]$, y sus unidades usuales son pies por segundo por segundo (pies/s^2), millas por hora por segundo (mi/h · s) y metros por segundo por segundo (m/s^2).

En la mayoría de los casos sólo tendremos que considerar tres tipos especiales de movimiento acelerado: la aceleración lineal constante, el movimiento circular uniforme y el movimiento armónico simple.

Aceleración lineal constante

Éste es un movimiento en el que un objeto se mueve en línea recta con módulo v variable que viene dado en cualquier tiempo t por

$$v = v_0 + at \qquad 4.3$$

en la que v_0 es el módulo de la celeridad del objeto en el instante $t = 0$. El significado de a en la ecuación 4.3 puede verse aplicando esta ecuación en la ecuación 4.2:

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(v_0 + at_2) - (v_0 + at_1)}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a$$

† Δ es la letra griega delta mayúscula.

Esto demuestra que la constante a de la ecuación 4.3 es el valor de la aceleración del objeto. Como el movimiento es en línea recta, a se trata como una magnitud escalar, que puede ser positiva o negativa según que la celeridad vaya aumentando o disminuyendo.

La fuerza de la gravedad es la fuerza total sobre un objeto sin apoyo. El objeto, por lo tanto, no puede estar en equilibrio y cae. Galileo, al estudiar el movimiento de los objetos que caen, averiguó que todos los objetos caen con aceleración lineal constante y que (en el vacío) el módulo de la aceleración es el mismo para todos los objetos. Esto no es evidente: una pluma no cae tan rápidamente como una piedra. Pero esto es porque el aire ejerce sobre la pluma que cae una fuerza hacia arriba relativamente grande (resistencia del aire) que la sostiene en parte. En el vacío, una pluma y una roca caen con la misma aceleración.

El símbolo g se usa para la aceleración debida a la gravedad. El valor de g es el mismo para todos los objetos que están en un lugar dado, pero varía ligeramente con la latitud, y en menor grado con la altitud y geología del lugar. Al hacer los problemas, es suficiente usar para g el valor de 32 pies/s² ó 9,8 m/s².

Con $a = g = 9{,}8$ m/s² en la Ec. 4.3, vemos que un objeto que cae desde su estado de reposo ($v_0 = 0$) tiene una celeridad de 4,9 m/s en $t = 0{,}5$ s, una celeridad de 9,8 m/s en $t = 1{,}0$ s y una celeridad de 19,6 m/s en $t = 2{,}0$ s. ¿Hasta dónde cae en 1 s? Al principio se siente la tentación de usar la Ec. 4.1 con la celeridad de 9,8 m/s, que es la que tiene el objeto después de 1 s. El resultado sería

$$d = vt = 9{,}8 \text{ m/s} \times 1 \text{ s} = 9{,}8 \text{ m}$$

Sin embargo, esto es falso, porque la celeridad de 9,8 m/s se obtiene solamente al final del primer segundo. Como la celeridad del objeto era cero al comienzo del primer segundo, la celeridad media $\bar{v}$ durante el primer intervalo de 1 s es

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2} (0 \text{ m/s} + 9{,}8 \text{ m/s} = 4{,}9 \text{ m/s}$$

Empleando la velocidad media en la Ec. 4.1, obtenemos la distancia correcta recorrida:

$$d = \bar{v}t = 4{,}9 \text{ m/s} \times 1 \text{ s} = 4{,}9 \text{ m/s}$$

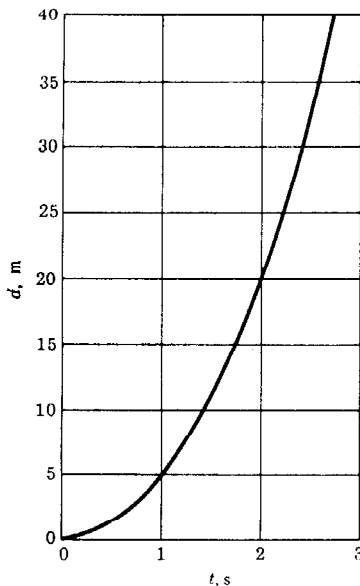


FIGURA 4.4
Gráfico de la distancia d en función del tiempo t para un objeto que se desplaza con una aceleración constante a de 9,8 m/s².

La fórmula general para la distancia d recorrida en el tiempo t por un objeto que empieza a moverse desde el reposo y aumenta su celeridad con aceleración constante a, es

$$d = \bar{v}t = [\tfrac{1}{2} (0 + at)]t$$

o sea

$$d = \tfrac{1}{2}at^2 \qquad 4.4$$

La Fig. 4.4 es una gráfica de d en función de t para el caso en el que $a = 9{,}8$ m/s² (compárese con la Fig. 4.1). Si el objeto parte con una velocidad inicial v_0, la distancia recorrida en el tiempo t viene dada por

$$d - v_0t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad 4.5$$

La Fig. 4.5 es una fotografía de una pelota que cae desde el reposo; la fotografía ha sido tomada con un flash múltiple. Los intervalos de tiempo entre las sucesivas imágenes son iguales, por lo que la distancia entre dos imágenes consecutivas es grande cuando la celeridad es grande y pequeña cuando la celeridad es pequeña. Esta fotografía muestra claramente que la celeridad de un objeto que cae empieza siendo pequeña y aumenta con el tiempo, de acuerdo con la Ec. 4.3. Además, la fotografía muestra que la distancia aumenta con el cuadrado del tiempo (de acuerdo con la Ec. 4.4), puesto que (por ejemplo) la imagen 8 está 4 veces más lejos del punto de partida que la imagen 4*.

Ejemplo 1. ¿A qué altura llega una pelota lanzada verticalmente al aire con una velocidad inicial de 40 pies por segundo? ¿Cuánto rato está la pelota en el aire y cuál es su velocidad cuando cae de nuevo al suelo? Despreciar el rozamiento del aire.
Estamos dando v_0 y pedimos que se halle d. Ni la Ec. 4.3 ni la 4.5 parecen muy útiles, ya que las dos incluyen t, que es desconocido. Por lo tanto, lo primero que debemos encontrar es t. Para lograrlo, hemos de darnos cuenta de que cuando la pelota va hacia arriba, su velocidad está constantemente disminuyendo, hasta que alcanza su punto más alto, donde la velocidad es momentáneamente 0. Esto se ve en la figura 4.6, que es una fotografía multiflash de una pelota lanzada al aire hacia arriba. En su punto más alto, las imágenes adyacentes de la pelota están muy juntas, con lo que se demuestra que la bola se mueve allí muy lentamente.
Mientras la pelota se mueve hacia arriba, su aceleración a es —32 pies/s², por lo que la Ec. 4.3 se puede expresar

$$v = 40\,\text{pies/s} - 32\,\text{pies/s}^2 \times t$$

El tiempo t, en el que la pelota alcanza el punto más alto, se halla haciendo v igual a cero en esta ecuación y despejando t. El resultado es

$$0 = 40\,\text{pies/s} - 32\,\text{pies/s}^2 \times t$$

o

$$t = \frac{40\,\text{pies/s}}{32\,\text{pies/s}^2} = 1{,}25\ \text{s}$$

* El intervalo de tiempo entre imágenes sucesivas de la Fig. 4.5 es 1/30 s. Sin embargo, la primera imagen corresponde a $t = 0$ y $t = 1/30$ s, porque la pelota no se ha desplazado lo suficiente para dar imágenes separadas.

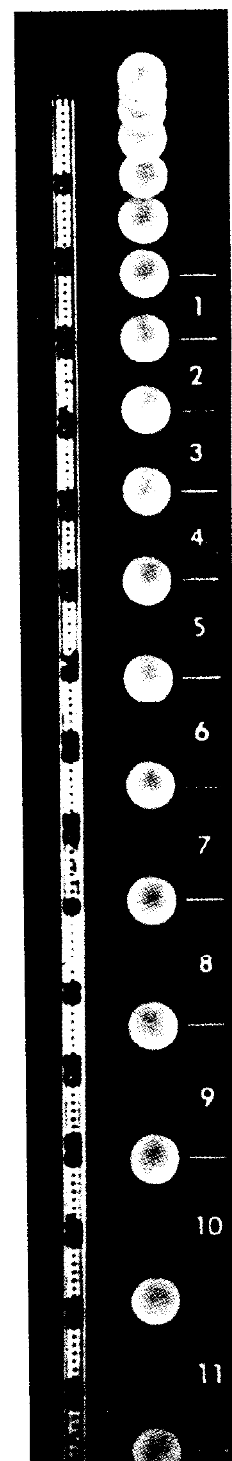


FIGURA 4.5
Fotografía de flash múltiple de una pelota que se deja caer desde el reposo *(Tomada de Física PSSC, 3.ª edición, Editorial Reverté, S. A., Barcelona.*

Este tiempo se aplica entonces en la Ec. 4.5 para hallar d:

$$d = 40\ \text{pies/s} \times 1{,}25\ \text{s} - \tfrac{1}{2} \times 32\ \text{pies/s}^2 \times 1{,}25^2$$
$$= 50\ \text{pies} - 25\ \text{pies} = 25\ \text{pies}$$

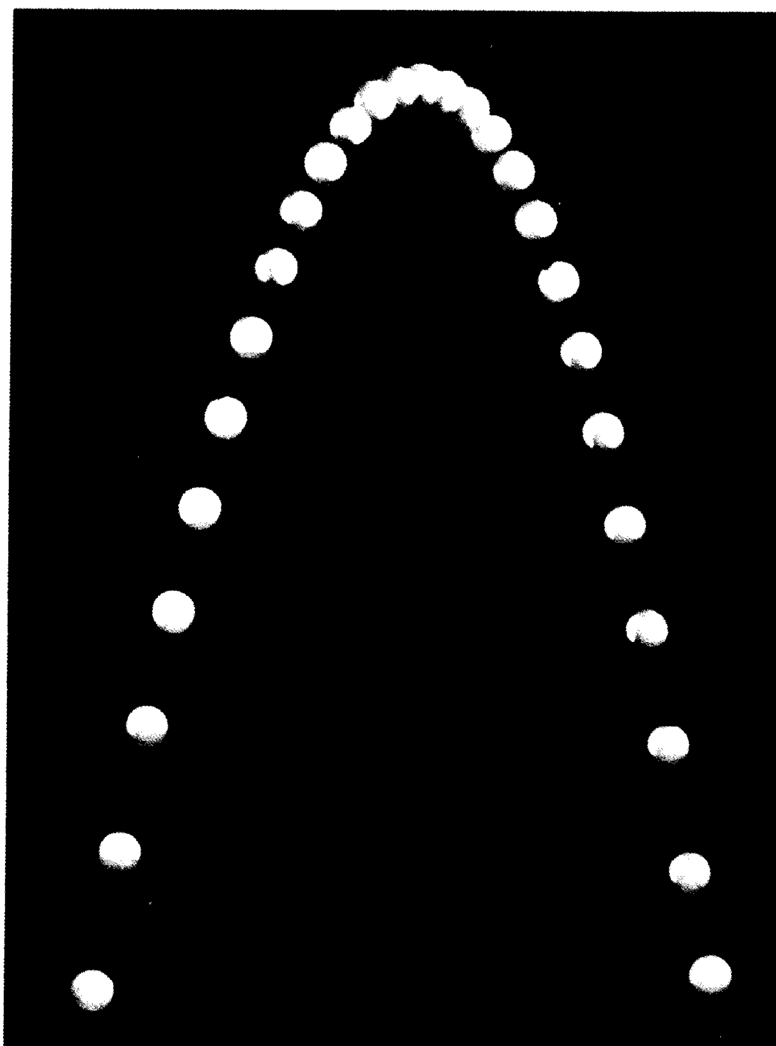


FIGURA 4.6
Fotografía de flash múltiple de una pelota lanzada al aire. *(Tomada de Física PSSC, 3.ª edición, Editorial Reverté, S. A., Barcelona.)*

La pelota alcanza el punto más alto de 25 pies en 1,25 s.
Una vez que la pelota alcanza los 25 pies, empieza a caer. El tiempo que tarda en caer hasta el suelo se halla a partir de la Ec. 4.4 o de la 4.5 con $v_0 = 0$, ya que su velocidad es cero en el punto más alto. Durante esta fase del movimiento su celeridad va aumentando y así $a = +32$ pies/s^2.

Despejando t^2 de la Ec. 4.4, obtenemos

$$t^2 = \frac{2d}{a}$$

$$= \frac{2 \times 25 \text{ pies}}{32 \text{ pies/s}^2} = 1{,}56 \text{ s}^2$$

de modo que

$$t = \sqrt{1{,}56 \text{ s}^2} = 1{,}25 \text{ s}$$

La pelota cae al suelo en el mismo tiempo que tardó en subir, por consiguiente el tiempo total en el aire es 2 t = 2,5 s. El módulo de su celeridad cuando alcanza el suelo viene dado por la Ec. 4.3 con $v_0 = 0$. El resultado es

$$v = 0 + 32 \text{ pies/s}^2 \times 1{,}25 \text{ s}$$
$$= 40 \text{ pies/s}$$

Vuelve, pues, al suelo con la misma celeridad con que fue lanzada. Sin embargo, su velocidad no es la misma, porque inicialmente su velocidad tenía un módulo de 40 pies/s y estaba dirigida hacia arriba, mientras que al final tiene el mismo módulo pero está dirigida hacia abajo. La Fig. 4.6 muestra que a una distancia cualquiera por debajo del punto más alto, la celeridad de la pelota es la misma, tanto para el movimiento hacia arriba como para el movimiento hacia abajo.

Movimiento circular uniforme

El *movimiento circular uniforme* es un movimiento en una circunferencia de radio R con celeridad constante v. Es otro caso especial de movimiento acelerado que necesita ser mencionado. La aceleración en este caso se debe al cambio en la dirección del movimiento más que al cambio del módulo de celeridad. Esta aceleración se llama *centrípeta,* porque en cualquier instante va dirigida hacia el centro de la circunferencia. Así, mientras se mueve el objeto, cambia la dirección de la aceleración, tal como se muestra en la figura 4.7. El módulo de esta aceleración está relacionado con el módulo de la celeridad v y el radio R según

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad 4.6$$

Obsérvese que v^2/R tiene la dimensión correcta de la aceleración:

$$\left[\frac{v^2}{R}\right] = \frac{[l/t]^2}{[l]} = \left[\frac{l}{t^2}\right]$$

La distancia recorrida (medida alrededor de la circunferencia), viene dada por la Ec. 4.1, puesto que la celeridad es constante.

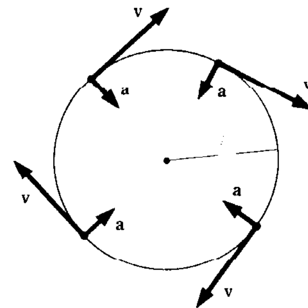


FIGURA 4.7
celeración centrípeta **a** y elocidad **v** de un objeto en movimiento circular uniforme.

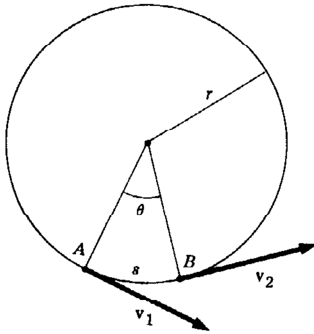


FIGURA 4.8
Un objeto que se mueve con celeridad constante v en un círculo de radio r. A cada instante, la velocidad $\mathbf{v}$ es tangente al círculo.

OBSERVACIÓN. Es instructivo deducir la Ec. 4.6 a partir de la definición de aceleración dada por la Ec. 4.2. Consideremos para ello un objeto que se mueve con celeridad constante v sobre un círculo de radio r (Fig. 4.8). En el instante t, el objeto se halla en el punto A del círculo. La velocidad $\mathbf{v}_1$ del objeto en el instante t_1 es tangente al círculo en el punto A. En el instante posterior t_2, el objeto está en el punto B, habiendo recorrido un ángulo θ. La velocidad $\mathbf{v}_2$ en este instante es tangente al círculo en B. Supondremos que $t_2 - t_1$ es suficientemente pequeño para que la ecuación 4.2 pueda utilizarse para calcular la aceleración instantánea.
Como el objeto se está moviendo a celeridad constante v, el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se relaciona con la distancia s recorrida a lo largo del círculo por la ecuación

$$\Delta t = \frac{s}{v}$$

Pero si θ se expresa en radianes, tenemos (Apéndice III)

$$s = r\theta$$

y por lo tanto

$$\Delta t = \frac{r\theta}{v}$$

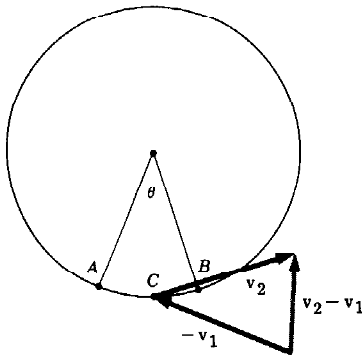


FIGURA 4.9
Los vectores $-\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dibujados en un punto común intermedio entre A y B.

Para hallar $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ observamos que los vectores velocidad son perpendiculares a los dos radios que forman los lados de θ, de modo que (por el teorema 3 del Apéndice III) el ángulo entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es también θ. En la Fig. 4.9 el vector $\mathbf{v}_1$ se reemplaza por $-\mathbf{v}_1$, y tanto éste como $\mathbf{v}_2$ se desplazan al punto C intermedio entre A y B para efectuar la suma de dichos vectores. La suma de $\mathbf{v}_2$ y $-\mathbf{v}_1$ es, claro está, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, y según la Fig. 4.9 es evidente que esta suma está en la dirección de la línea que va desde C hasta el centro del círculo. Esto demuestra que la aceleración se dirige hacia el centro del círculo. (Como sólo estamos interesados en el caso en que θ sea muy pequeño, los tres puntos A, B y C prácticamente coinciden.)
La Fig. 4.10 muestra que Δv, el módulo de $\Delta \mathbf{v}$, es la cuerda de un círculo de radio v que subtiende el ángulo θ. Si θ es muy pequeño, la longitud de la cuerda es aproximadamente igual a la longitud del arco s', de modo que

$$\Delta v = s' = v\theta$$

Así, por la ecuación 4.2, el módulo de la aceleración vale

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\theta}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r}$$

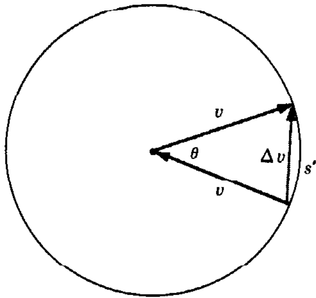


FIGURA 4.10
Δv es la cuerda de un arco que subtiende un ángulo θ en un círculo de radio v.

Este resultado no depende de θ en tanto que θ sea tan pequeño que la cuerda en la Fig. 4.10 sea igual a la longitud del arco. Sólo en este caso la ecuación 4.2 da la aceleración instantánea. Por lo tanto, la Ec. 4.6 da exactamente el valor de la aceleración. Ya hemos demostrado que, en estas mismas condiciones, la aceleración se dirige, en cada momento, desde la posición del objeto hacia el centro del círculo.

Movimiento armónico simple

Éste es el movimiento oscilatorio con que un objeto vibra de un lado a otro en las proximidades de una posición central de equilibrio. Si se considera que el objeto se mueve sobre el eje x, con su posición de equilibrio en $x = 0$, entonces su posición x en cada instante t viene dada por

$$x = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \qquad 4.7$$

donde A y τ son constantes que reciben el nombre de *amplitud* y *período*, respectivamente.
En el instante $t = 0$ el objeto se encuentra en $x = 0$, pero cuando t aumenta lo mismo ocurre con x. El argumento del seno se expresa en radianes (Apéndice III), de modo que cuando $t = (1/4)\tau$ la posición es

$$x = A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}\frac{1}{4}\tau\right) = A\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = A$$

ya que $\pi/2$ es el equivalente en radianes de 90°. El valor máximo del seno es 1, por lo cual la amplitud A es la máxima distancia que el objeto se aparta de su posición de equilibrio. Cuando t sigue creciendo, x disminuye hasta que cuando $t = (1/2)\tau$ el objeto vuelve a estar en $x = 0$. Cuando t sigue aumentando, el objeto se mueve a lo largo del eje negativo hasta que cuando $t = (3/4)\tau$ éste se encuentra en

$$x = A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}\frac{3}{4}\tau\right) = A\,\text{sen}\,\tfrac{3}{2}\pi = -A$$

Ésta es la posición extrema negativa del objeto. Cuando $t = \tau$ el objeto vuelve a encontrarse en el origen y a partir de aquí el movimiento se repite. Un *ciclo* es una oscilación completa de la posición desde O a A, a O, a $-A$ y de nuevo a O, y el período τ es el tiempo necesario para completar un ciclo. La variación de la posición durante un período y medio se muestra en la Fig. 4.11*a*.
La velocidad y la aceleración del objeto en el tiempo t vienen dadas por

$$v = \frac{2\pi A}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \qquad 4.8$$

y

$$a = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \qquad 4.9$$

Estas ecuaciones muestran que la celeridad y la aceleración del objeto también oscilan con el mismo período τ. Ello se muestra en la Fig. 4.11*b*.
El movimiento armónico simple es una forma frecuente de oscilación que se presenta en muchos sistemas vibrantes, como por ejemplo un péndulo o un peso suspendido de un muelle. Discutiremos más a fondo esto en el Apart. 5.4.

Ejemplo 2. Un peso colgado de un muelle se lleva 5 cm por debajo de su posición de equilibrio y se suelta. El período de la oscilación resultante es 1,5 s. ¿Cuál es la velocidad máxima del peso y dónde se produce ésta?
La celeridad en un instante cualquiera viene dada por la Ec. 4.8. La celeridad máxima se produce cuando el coseno vale 1, por lo cual

$$v_{max} = \frac{2\pi A}{T} = \frac{(2\pi)(5\text{ cm})}{1{,}5\text{ s}} = 20{,}9\text{ cm/s}$$

Cuando el coseno vale 1, el seno vale 0, de modo que la posición donde la celeridad es máxima es $x = 0$. Ello puede observarse también en la Fig. 4.11.

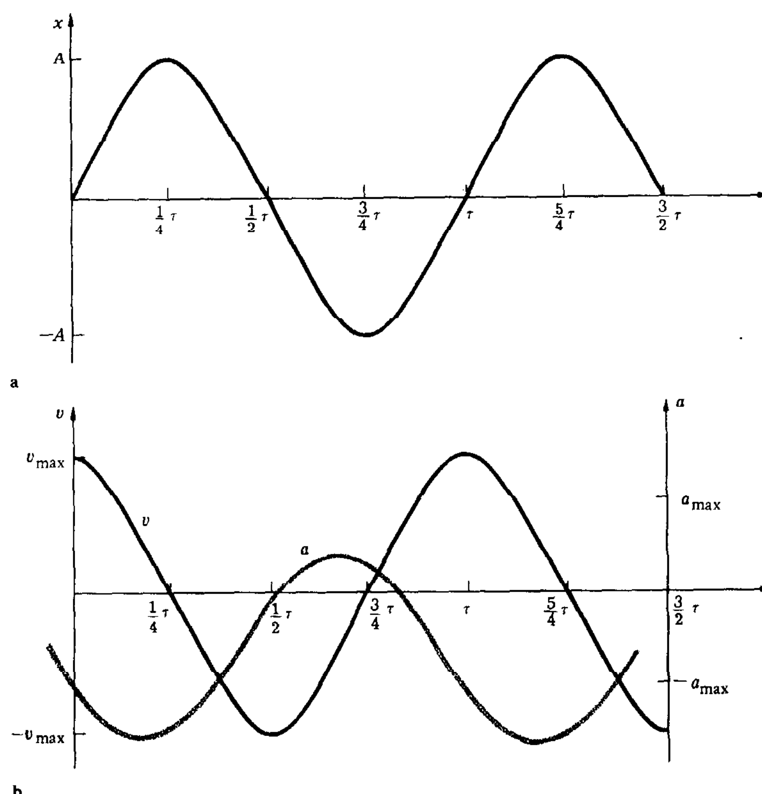


FIGURA 4.11
(a) Representación de la posición x en función del tiempo t para un objeto que se mueve con un movimiento armónico simple.
(b) Representación de la celeridad v y la aceleración a en función del tiempo t para el mismo objeto.

4.3. SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

El problema básico de la dinámica es describir el movimiento de un objeto sobre el que actúa una fuerza total **F**. La primera ley de Newton del movimiento establece que cuando **F** es cero, el objeto permanece en reposo o se mueve con velocidad constante. La segunda ley de Newton del movimiento describe lo que sucede cuando **F** no es cero. Debe quedar claro que en este caso el objeto se acelera; o sea, el objeto no se mueve con velocidad constante. Sin embargo, la segunda ley va más lejos y establece que la aceleración **a** del objeto es proporcional a **F**. Esto significa que **a** tiene la misma dirección que **F** y que el módulo de **a** es proporcional al módulo de **F**.

Segunda ley de Newton del movimiento. *Un objeto sobre el que actúa una fuerza total* **F** *tiene una aceleración* **a** *en la dirección de* **F**. *El módulo de* **a** *es F/m, donde F es el módulo de la fuerza y m una propiedad intrínseca del objeto denominada masa.*

Así, la segunda ley puede escribirse como

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

o bien

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad 4.10$$

La fuerza total ejercida sobre un objeto sin apoyo, es la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$. Por consiguiente, el objeto cae con una aceleración dada por la Ec. 4.10:

$$a = \frac{F_g}{m}$$

Por otro lado, sabemos que todos los objetos caen con la misma aceleración g. Por lo tanto, tenemos

$$g = \frac{F_g}{m}$$

o sea

$$F_g = mg \qquad 4.11$$

que muestra que la fuerza de la gravedad ejercida sobre un objeto es proporcional a su masa.

La fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$ sobre un objeto es precisamente lo que normalmente llamamos peso del objeto. Como g es aproximadamente la misma en todos los puntos de la Tierra, la distinción entre masa y peso no es evidente en la vida cotidiana. Pero imaginemos que un objeto se transporta de la Tierra a la Luna, donde el valor de g es diferente. En la Luna el objeto tendrá la misma masa que en la Tierra, ya que la masa es una propiedad intrínseca del objeto. Por ello, el objeto tendrá la misma aceleración en la Luna que en la Tierra cuando se le someta a las mismas fuerzas. Por otro lado, el peso del objeto será diferente en la Luna ya que g es diferente. Colgado de una balanza de muelle, el objeto alargará el muelle menos en la Luna que en la Tierra.

La Ec. 4.10 determina completamente el movimiento de un objeto en función de las fuerzas que actúan sobre él. Esto es evidente cuando la fuerza es constante, porque entonces se obtiene de la Ec. 4.10 la aceleración constante que hay que usar en las Ecs. 4.3 y 4.5 para la celeridad y posición del objeto. Cuando $\mathbf{F}$ no es constante, la aceleración obtenida por la Ec. 4.10 no es constante, en cuyo caso las Ecs. 4.3 y 4.5 no sirven. Sin embargo, con el uso de matemáticas más avanzadas, todavía podemos calcular la celeridad y la posición del objeto a partir de su aceleración. En este sentido, la Ec. 4.10 proporciona una descripción completa del movimiento.

OBSERVACIÓN. El movimiento de los objetos sobre los que actúan momentos es análogo al movimiento de los objetos sobre los que actúan fuerzas. Un objeto, por ejemplo una rueda, permanece en reposo o gira a celeridad constante si el momento total ejercido sobre ella es cero. La rueda girará con celeridad de módulo creciente (o decreciente) cuando el momento total ejercido sobre ella no es cero. No vamos a profundizar más en esto, sólo diremos que estas propiedades pueden deducirse de la segunda ley de Newton, sin necesidad de nuevos principios.

4.4. SISTEMAS DE UNIDADES

Las dimensiones de la masa $[m]$, longitud $[l]$ y tiempo $[t]$ se consideran fundamentales porque las dimensiones de todas las otras mag-

nitudes de la mecánica se pueden escribir en función de ellas.* Por ejemplo, de la Ec. 4.10 se ve que la dimensión de la fuerza es

$$\begin{aligned}[f] &= [m][a] \\ &= [m]\left[\frac{l}{t^2}\right] \\ &= \left[\frac{ml}{t^2}\right]\end{aligned}$$

Es útil tener un sistema de unidades coherente en el que se adopten unidades estándar para la longitud, la masa y el tiempo. Estas unidades se usan entonces en todos los cálculos. Por ejemplo, si la unidad de longitud es el pie, todas las longitudes se miden en pies (mejor que en pulgadas, millas, metros, etc.), todas las áreas se miden en pies cuadrados (mejor que en acres, pulgadas cuadradas, etc.) y todos los volúmenes se miden en pies cúbicos (no en galones, litros, toneles, etcétera). En un sistema coherente, la unidad de fuerza se expresa en función de las unidades fundamentales. Desgraciadamente hay varios sistemas diferentes que hay que conocer. Aquí se describen tres de los más importantes.

SI

En el *Sistema Internacional* (SI) *de Unidades* recomendado por la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas de 1960, la unidad de longitud es el *metro*, la unidad de masa es el *kilogramo* y la unidad de tiempo es el *segundo*. Un kilogramo es una unidad de masa igual a la masa de un cilindro particular de una aleación de platino-iridio que se conserva en un sótano en Sèvres, Francia. En el sistema SI la unidad de velocidad es metros por segundo, la unidad de aceleración es metros por segundo por segundo y la unidad de fuerza es kilogramo-metros por segundo por segundo (kg-m/s²).

Definición. La unidad SI de fuerza se llama *newton* (N). Por la Ec. 4.10 se ve que una fuerza de un newton hace que una masa de un kilogramo tenga una aceleración de un metro por segundo por segundo.
La aceleración debida a la gravedad en unidades SI es aproximadamente

$$\begin{aligned}F_g &= mg = 1\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \\ &= 9{,}8\ \text{kg-m/s}^2 = 9{,}8\ \text{N}\end{aligned}$$

El sistema SI es el principal sistema de unidades usado en el resto del libro. Es de esperar que el sistema SI reemplazará finalmente a los restantes, de modo que sólo haya un único sistema internacional

* Más adelante se introducirán otras dos dimensiones fundamentales al tratar de la temperatura y la carga eléctrica.

de unidades. Por el momento, sin embargo, en muchos campos específicos se emplean las unidades propias. En este libro cada nueva magnitud se expresa primeramente en unidades SI y se introducen más tarde las unidades usadas corrientemente en la literatura científica.

Sistema cgs

En este sistema la unidad de longitud es el *centímetro*, la unidad de masa es el *gramo* y la unidad de tiempo es el *segundo*. Los símbolos de estas unidades son cm, g, y s, respectivamente; de ahí el nombre cgs. Este sistema, igual que el sistema SI, se basa en el sistema métrico. El centímetro y el gramo están relacionados con el metro y el kilogramo por

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$$

En el sistema cgs la unidad de velocidad es centímetros por segundo, la unidad de aceleración es centímetros por segundo por segundo.

Definición. La unidad cgs de fuerza se llama *dina* (dyn). Por la Ec. 4.10 se ve que la fuerza de una dina hace que la masa de un gramo tenga la aceleración de un centímetro por segundo por segundo.
La conversión entre unidades SI y cgs es relativamente fácil. Por ejemplo, usando las relaciones básicas

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 1 \text{ N} &= 1 \text{ kg-m/s}^2 \\ &= 10^3 \text{ g} \times 10^2 \text{ cm/s}^2 \\ &= 10^5 \text{ g-cm/s}^2 = 10^5 \text{ dinas} \end{aligned}$$

OBSERVACIONES. (1) Los símbolos m para masa y g para aceleración debida a la gravedad, se distinguen fácilmente en los caracteres de imprenta de los símbolos m para metro y g para gramo. Para no confundir estos símbolos a la hora de tomar notas, el alumno debería acostumbrarse a subrayar los símbolos que representan la masa y la aceleración debida a la gravedad: $\underline{m}$ y $\underline{g}$. (2) Las unidades de volumen en los sistemas SI y cgs son metros cúbicos y centímetros cúbicos respectivamente. Una unidad estrechamente relacionada y que se usa frecuentemente es el *litro* (l), que equivale a 1000,027 cm^3. Sin embargo, para nosotros es suficiente tomar 1 l como $10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ y tomar 1 mililitro ($1 \text{ ml} = 10^{-3}$ l) como 1 cm^3.

Sistema inglés

En este sistema se toma como unidad fundamental la fuerza en vez de la masa. La unidad de fuerza es la *libra* (lb), la unidad de longitud es el *pie* (pie) y la unidad de tiempo es el *segundo* (s).
En el sistema inglés, la unidad de velocidad es pies por segundo, y la unidad de aceleración es pies por segundo por segundo.

Definición. La unidad de masa del sistema inglés se llama *slug*. Por la Ec. 4.10, ésta es la masa que adquiere una aceleración de un pie por segundo por segundo cuando se le aplica una fuerza de una libra. Las unidades del slug son lb · s²/pie.
La fuerza de la gravedad ejercida sobre 1 slug es

$$F_g = mg = 1 \text{ slug} \times 32 \text{ pies/s}^2$$
$$= 32 \text{ slug-pies/s}^2 = 32 \text{ lb}$$

Así, un objeto que pesa unas 32 lb tiene una masa de 1 slug.
La conversión entre slugs y kilogramos es

$$1 \text{ slug} = 14{,}594 \text{ kg}$$

y la conversión entre libras y newtons es

$$1 \text{ lb} = 4{,}4485 \text{ N}$$

OBSERVACIÓN. A veces el kilogramo y el gramo se usan como unidades de fuerza en los trabajos de laboratorio. Un kilogramo fuerza o kilopondio (kp), es la fuerza de la gravedad ejercida sobre una masa de un kilogramo. Como la magnitud de esta fuerza depende del valor de *g*, se hace uso del valor estándar 9,80665 m/s² cuando hace falta mucha precisión. Así, la conversión de kilogramo fuerza a newtons es

$$1 \text{ kg}_f = 1 \text{ kg} \times 9{,}80665 \text{ m/s}^2$$
$$= 9{,}80665 \text{ N}$$

4.5. EJEMPLOS EN LOS QUE ENTRA LA SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

La variedad de problemas que pueden resolverse utilizando la segunda ley de Newton es sorprendentemente amplia. De hecho, todos los problemas de la dinámica pueden resolverse mediante su uso, a pesar de que a menudo se necesiten para ello técnicas matemáticas avanzadas. A continuación se da una serie de ejemplos de problemas para mostrar la variedad de problemas dinámicos que pueden resolverse con sólo álgebra elemental.

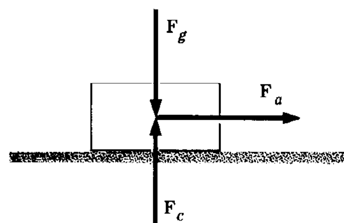


FIGURA 4.12
Fuerza horizontal constante $\mathbf{F}_a$ aplicada a un bloque situado sobre una superficie horizontal.

Ejemplo 1. Una fuerza horizontal constante $\mathbf{F}_a$ de 150 N se aplica a un bloque de 60 kg que está inicialmente en reposo sobre una superficie sin rozamiento (Fig. 4.12). Después de tres segundos, ¿cuánto vale su velocidad, y qué distancia ha recorrido?

La fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$ y la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ actúan también sobre el bloque, de manera que la fuerza total $\mathbf{F}$ ejercida sobre él es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_a$$

Pero $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c = 0$, puesto que el bloque no se mueve en dirección vertical. Por lo tanto $\mathbf{F}_a$ es la fuerza total $\mathbf{F}$ ejercida sobre el bloque, de modo que el bloque se acelera en la dirección de $\mathbf{F}_a$. Como el módulo de $\mathbf{F}$ es 150 N, la aceleración del bloque, según la Ec. 4.10 resulta ser

$$a = \frac{F}{m} = \frac{150 \text{ N}}{60 \text{ kg}} = 2{,}5 \text{ m/s}^2$$

Sabemos que a estará en la unidad SI de aceleración porque la fuerza y la masa están en las propias unidades SI. Esto ilustra la ventaja de emplear un sistema de unidades coherente.

La velocidad y posición del bloque se calculan usando las Ecs. 4.3 y 4.5. Inicialmente, o sea en el instante $t = 0$, el bloque estaba en reposo, de modo que $v_0 = 0$. Después en el instante $t = 3\text{s}$ su velocidad es

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0 + 2{,}5 \text{ m/s}^2 \times 3 \text{ s} = 7{,}5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

y la distancia que ha recorrido es

$$\begin{aligned} d &= v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \\ &= 0 + 0{,}5 \times 2{,}5 \text{ m/s}^2 \times (3 \text{ s})^2 \\ &= 11{,}25 \text{ m} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Una variación interesante de este último problema es calcular la fuerza sobre un objeto, dadas sus velocidades inicial y final. Consideremos para ello una esquiadora acuática de 45 kg (Fig. 4.13) que parte del reposo en el agua y es acelerada hasta una velocidad de 10 m/s (22,4 mi/h), en 2 s. ¿Cuál es la fuerza total sobre la esquiadora durante el período de aceleración?

Tenemos $v_0 = 0$, $v = 10$ m/s y $t = 2$ s. Poniendo estos datos en la ecuación 4.3, encontramos que

$$10 \text{ m/s} = 0 + a \times 2 \text{ s}$$

o sea

$$a = \frac{10 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}^2$$

De acuerdo con la Ec. 4.10, el módulo de la fuerza total **F** ejercida sobre la esquiadora es entonces,

$$F = ma = 45 \text{ kg} \times 5 \text{ m/s}^2 = 225 \text{ N}$$

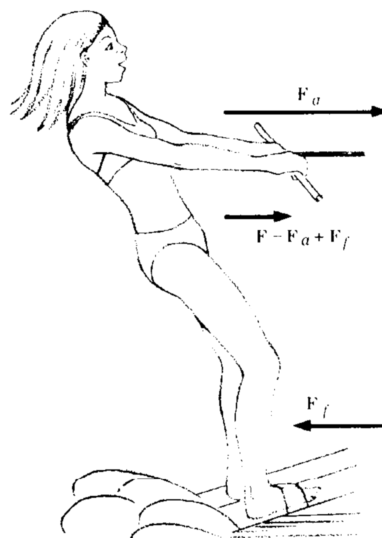


FIGURA 4.13
Fuerzas sobre una esquiadora acuática.

De nuevo, sabemos que F está en newtons porque tanto m como a están en unidades SI. La fuerza total **F** es igual a la suma de la fuerza $\mathbf{F}_a$ ejercida por la cuerda de remolque y la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_f$ ejercida por el agua. Como $\mathbf{F}_f$ es de sentido contrario al de $\mathbf{F}_a$, el módulo de la fuerza total **F** es igual a la diferencia de los valores de $\mathbf{F}_a$ y $\mathbf{F}_f$ (Apart. 2.3):

$$F = F_a - F_f$$

Por ejemplo, si F_f vale 75 N, F_a ha de ser de 300 N. Esta es la fuerza ejercida sobre los brazos de la esquiadora. Por ser tan grande, los principiantes tienen dificultad para sujetarse a la cuerda de arrastre mientras van tomando aceleración.

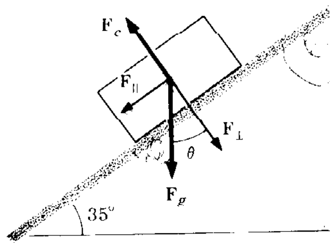


FIGURA 4.14
Bloque sobre una superficie inclinada.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la aceleración de un bloque de 5 kg que resbala hacia abajo sin rozamiento por una superficie que forma un ángulo de 35° con la horizontal (Fig. 4.14)?
El módulo de la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$ ejercida sobre el bloque es

$$F_g = mg = 5 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m s}^{-2} = 49 \text{ N}$$

y $\mathbf{F}_g$ está dirigida verticalmente hacia abajo. El ángulo θ entre $\mathbf{F}_g$ y una línea perpendicular a la superficie inclinada, es igual a 35°, el ángulo del plano, porque los lados correspondientes de estos dos ángulos son perpendiculares entre sí (Apéndice III). Por lo tanto, los módulos de las componentes de $\mathbf{F}_g$, paralela y perpendicular a la superficie inclinada, son

$$F_\perp = F_g \cos 35° = 49 \text{ N} \times 0{,}82 = 40 \text{ N}$$
$$F_\parallel = F_g \operatorname{sen} 35° = 49 \text{ N} \times 0{,}57 = 28 \text{ N}$$

Como el bloque no se mueve perpendicularmente a la superficie inclinada, la suma de $\mathbf{F}_\perp$ y la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ es cero, de modo que $\mathbf{F}_\parallel$ es la fuerza total ejercida sobre el bloque. Entonces la aceleración es

$$a = \frac{F_\parallel}{m} = \frac{28 \text{ N}}{5 \text{ kg}} = 5{,}6 \text{ m/s}^2$$

Ésta es menor que g en el factor sen $35° = F_\parallel / F_g$.

OBSERVACIÓN. Galileo no pudo estudiar con detalle la aceleración de objetos que caen libremente, porque su aceleración es demasiado grande. En cambio estudió el movimiento de objetos que se deslizan por un plano inclinado. Haciendo el ángulo de inclinación muy pequeño, redujo la aceleración lo suficiente como para poderla estudiar con los pocos medios que tenía a su alcance.

Ejemplo 4. ¿Cuál es la aceleración del bloque del ejemplo 3 si el coeficiente de rozamiento cinético entre dicho bloque y la superficie vale $\mu_k = 0{,}3$?
Si el plano inclinado posee rozamiento, existirá una fuerza $\mathbf{F}_f$ paralela al plano y de sentido opuesto al del movimiento. Para un objeto en movimiento, el módulo de $\mathbf{F}_f$ está relacionado con el coeficiente de rozamiento cinético μ_k (Apart. 2.2.) por

$$F_f = \mu_k F_c$$

Ahora bien $F_c = F_\perp$, por lo tanto, si $\mu_k = 0{,}3$, la fuerza de rozamiento es

$$F_f = 0{,}3 \times 40 \text{ N} = 12 \text{ N}$$

La fuerza total ejercida sobre el bloque es entonces

$$F = F_\parallel - F_f = 28 \text{ N} - 12 \text{ N} = 16 \text{ N}$$

porque ahora la aceleración del bloque es solamente

$$a = \frac{F}{m} = \frac{16 \text{ N}}{5 \text{ kg}} = 3{,}2 \text{ m/s}^2$$

Cuando el ángulo de inclinación es tan pequeño que $F_{\parallel}$ es menor que la fuerza máxima de rozamiento estático, el bloque permanecerá en reposo sobre el plano inclinado.

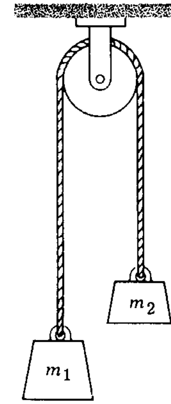


FIGURA 4.15
Dos masas unidas por una cuerda flexible que pasa por una polea.

Ejemplo 5. La Fig. 4.15 muestra dos masas, m_1 y m_2, unidas por una cuerda flexible que pasa por una polea sin rozamiento. Si m_1 es mayor que m_2, ¿cuál será su aceleración?
Como las masas están conectadas por medio de la cuerda, tienen que moverse al mismo tiempo, de modo que los módulos de sus aceleraciones son iguales. La fuerza ejercida sobre cada masa está compuesta por la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza hacia arriba ejercida por la cuerda. La dificultad de este problema es que tanto la aceleración como la tensión de la cuerda no se conocen.
El módulo de la fuerza ejercida por la cuerda sobre cada masa es igual a la tensión T, que es la misma en toda la cuerda (Apart. 2.2). Sabemos que T es menor que m_1g, que es la fuerza de la gravedad sobre m_1, porque m_1 adquiere una aceleración hacia abajo (Fig. 4.16). Así la fuerza total (hacia abajo) sobre m_1 es $m_1g - T$, y está relacionada con la aceleración (hacia abajo) a de m_1 por la Ec. 4.10:

$$m_1g - T = m_1a \qquad 4.12$$

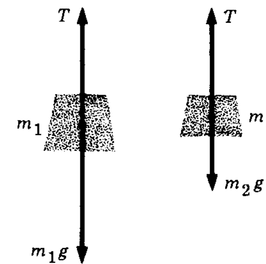


FIGURA 4.16
Las fuerzas sobre las masas de la Fig. 4.15

Del mismo modo, T es mayor que m_2g porque m_2 se mueve aceleradamente hacia arriba. La fuerza total (hacia arriba) $T - m_2g$ sobre m_2 está relacionada con la aceleración (hacia arriba) a de m_2 por

$$T - m_2g = m_2a \qquad 4.13$$

Aquí hemos tenido en cuenta que las aceleraciones de m_1 y m_2 son iguales.
Las ecuaciones 4.12 y 4.13 son dos ecuaciones lineales con dos incógnitas T y a. Para resolverlas para a, debemos eliminar primero T entre ellas. Esto se hace fácilmente con sólo sumar las dos ecuaciones. El resultado es

$$(m_1g - T) + (T - m_2g) = m_1a + m_2a$$

Tras simplificar, esto se convierte en

$$m_1g - m_2g = (m_1 + m_2)a$$

de modo que la aceleración viene dada por

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Por ejemplo, si $m_1 = 7{,}5$ kg y $m_2 = 4{,}5$ kg, la aceleración es

$$a = \frac{7{,}5 \text{ kg} - 4{,}5 \text{ kg}}{7{,}5 \text{ kg} + 4{,}5 \text{ kg}} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2$$
$$= \frac{3 \text{ kg}}{12 \text{ kg}} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 2{,}45 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 6. ¿Cuál es la celeridad v de un satélite artificial de masa m que se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio R (Fig. 4.17)? ¿Cuánto tarda en completar una revolución?

La única fuerza ejercida sobre él es la fuerza de la gravedad $\mathbf{F}_g$ que está dirigida hacia el centro de la Tierra. La aceleración centrípeta del satélite está dirigida también hacia el centro de la Tierra y, según la Ec. 4.6, su módulo es v^2/R. La Ec. 4.10 sirve para la aceleración centrípeta lo mismo que para la aceleración lineal, de modo que estas magnitudes están relacionadas por medio de

$$F_g = \frac{mv^2}{R} \qquad 4.14$$

que determina la celeridad del satélite si se conoce F_g.

El módulo de F_g disminuye al aumentar la distancia a la Tierra (Apartado 5.3), pero para distancias de sólo unos pocos cientos de kilómetros esta disminución es pequeña. Así, la fuerza de la gravedad ejercida sobre un satélite de órbita baja es aproximadamente mg, la misma que sobre la Tierra. Un satélite en órbita a una altura h por encima de la Tierra se mueve en una circunferencia de radio

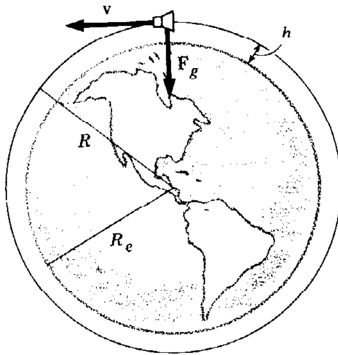


FIGURA 4.17
Satélite artificial en órbita circular alrededor de la Tierra.

$$R = R_e + h$$

alrededor del centro de la Tierra (Fig. 4.17), en donde R_e es el radio de la Tierra. De nuevo, para un satélite en órbita baja, h es pequeña comparada con R_e, de modo que R es aproximadamente R_e. Así, para satélites de órbita baja, tenemos

$$F_g = mg \quad \text{y} \quad R = R_e$$

Aplicando estas expresiones en la Ec. 4.14, tenemos

$$mg = \frac{mv^2}{R_e}$$

o sea

$$v^2 = gR_e \qquad 4.15$$

Obsérvese que la masa del satélite ha desaparecido de ambos miembros de la ecuación. Éste es un resultado importante porque demuestra que todos los satélites de órbita baja tienen el mismo módulo de la celeridad, sin importar su masa.

Con los valores $R_g = 6{,}4 \times 10^6$ m y $g = 9{,}8$ m/s², la Ec. 4.15 da el resultado siguiente

$$v^2 = (6{,}4 \times 10^6 \text{ m})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 62{,}6 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

o sea

$$v = \sqrt{62{,}6 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 7{,}9 \times 10^3 \text{ m/s} = 7{,}9 \text{ km/s}$$

que es el módulo de la celeridad de un satélite en órbita baja.

El tiempo τ que emplea el satélite en dar una vuelta completa a la Tierra se llama *período*. La distancia d recorrida en una revolución es igual a la circunferencia de la Tierra

$$d = 2\pi R_e = 6{,}28 \times 6{,}4 \times 10^6 \text{ m}$$
$$= 40 \times 10^6 \text{ m}$$

Entonces el período, según la Ec. 4.1, resulta ser

$$\tau = \frac{d}{v} = \frac{40 \times 10^6 \text{ m}}{7{,}9 \times 10^3 \text{ m/s}} = 5{,}1 \times 10^3 \text{ s}$$

o sea, unos 85 min. El período de un satélite de órbita baja es realmente de unos 90 min, valor éste muy conocido desde el comienzo de la era espacial. Nuestro cálculo da un valor ligeramente más bajo porque omitió la altura del satélite por encima de la superficie de la Tierra.

Ejemplo 7. ¿Cuál es la fuerza en cada posición x de un objeto de masa m que está realizando un movimiento armónico simple?
Por las Ecs. 4.9 y 4.10 obtenemos la fuerza en cada instante t:

$$F = ma = -m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

Para eliminar t en favor de x utilizamos la Ec. 4.7, que muestra que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) = \frac{x}{A}$$

y por lo tanto
$$F = -m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 A\frac{x}{A} = -m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 x$$

Así, la fuerza es simplemente proporcional a x. El signo menos indica que cuando x es positivo, la fuerza se dirige hacia el eje negativo, y cuando x es negativo, la fuerza se dirige hacia el eje positivo. La fuerza siempre tiende a devolver el objeto a su posición de equilibrio. Este tipo de fuerza se discutirá más ampliamente en el Apartado 5.4.

PROBLEMAS

1. Un objeto que se mueve a velocidad constante recorre una distancia de 20 m en 4 s. (*a*) ¿Cuál es la celeridad del objeto? (*b*) ¿Qué distancia recorrerá en 9 s? (*c*) ¿Cuánto tarda en recorrer 75 m?
Resp. (*a*) 5 m/s; (*b*) 45 m; (*c*) 15 s.
2. Un satélite terrestre que se mueve a celeridad constante recorre 810 km en 3 min. (*a*) ¿Cuál es la celeridad del satélite? (*b*) ¿Qué distancia recorrerá en 1 h? (*c*) ¿Cuánto tardará en completar una órbita alrededor de la Tierra si la circunferencia de la órbita es $1{,}26 \times 10^5$ km?
3. La estrella más cercana está a unos

4×10^{16} m de distancia. ¿A qué velocidad tendría que ir un cohete espacial para alcanzar esta estrella en 10 años?
Resp. $1{,}27 \times 10^5$ km/s.

4. Una abeja se marcha de una estación experimental a las 15 h y 15 min y vuelve a las 15 h 22 min. Se sabe que la colmena está a 875 m de la estación. ¿Cuál es la celeridad mínima de vuelo de la abeja?
5. La Fig. 4.18 es un gráfico de la distancia en función del tiempo para un objeto que se mueve con celeridad constante. (*a*) ¿Qué distancia recorrió el objeto entre $t = 2$ s y $t = 5$ s? (*b*) ¿Cuál es la celeridad del objeto?
Resp. (*a*) 22,5 m; (*b*) 7,5 m/s.

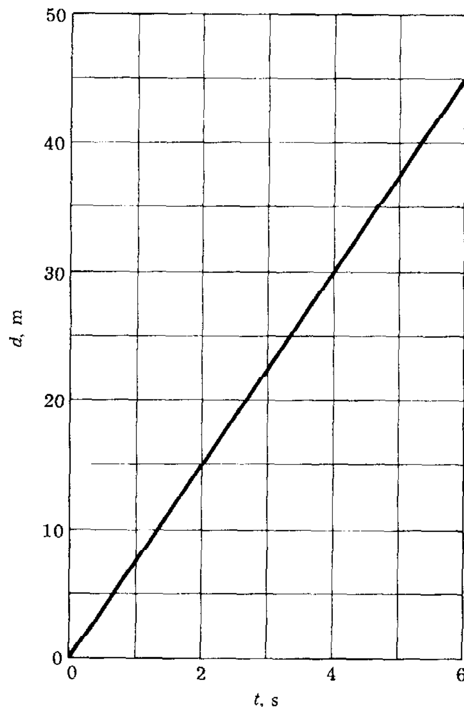


FIGURA 4.18. Problema 5.

6. Dibuje un gráfico de la distancia en función del tiempo para un objeto que se mueve a una celeridad constante de 12 m/s. Supóngase que $d = 0$ cuando $t = 0$.
7. Un coche se desplaza con movimiento acelerado desde el reposo hasta 60 mi/h en 11 s. (*a*) ¿Cuál es su aceleración durante este período? (*b*) ¿Qué distancia recorre durante el período de aceleración?
Resp. (*a*) 8,0 pies/s^2; (*b*) 484 pies.
8. (*a*) ¿Cuánto tarda en descender 40 pies un objeto que parte del reposo? (*b*) ¿Qué distancia recorrería en un tiempo doble?
9. La Fig. 4.19 es un gráfico de la distancia en función del tiempo de un objeto que se mueve con aceleración constante. (*a*) ¿Cuál es la velocidad media del objeto en el intervalo entre $t = 0$ y $t = 4$ s? (*b*) ¿Cuál es la celeridad media del objeto en el intervalo entre $t = 4$s y $t = 6$s? (*c*) ¿Cuál es la aceleración del objeto, suponiendo que parte del reposo en $t = 0$? (*d*) ¿Cuál es la celeridad del objeto en $t = 4$ s?
Resp. (*a*) 3 m/s; (*b*) 7,5 m/s; (*c*) 1,5 m/s^2; (*d*) 6 m/s.

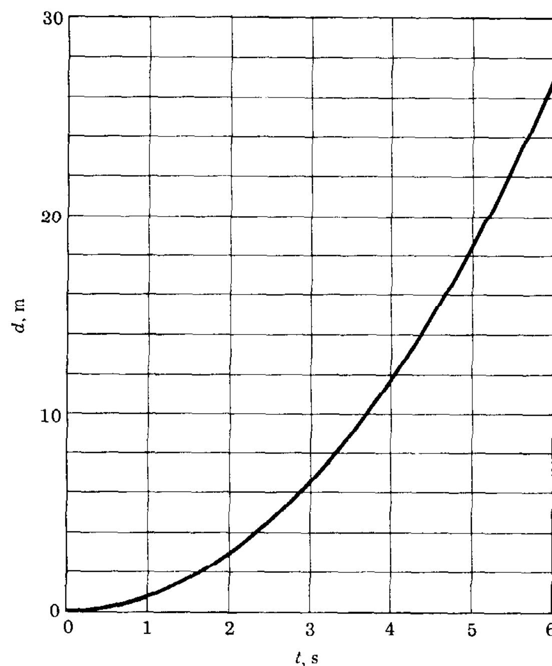


FIGURA 4.19. Problema 9.

10. Represente gráficamente en función del tiempo la distancia que ha recorrido la pelota de la Fig. 4.5. La primera imagen ocurre en $t = 0$, y cada imagen sucesiva ocurre 1/30 s más tarde. La parte inferior de la primera imagen ($t = 0$) está en la marca cero de la escala, y la parte inferior de la tercera imagen ($t = 2/30$ s) está a unos 2 cm por debajo de la marca cero. La segunda imagen no puede distinguirse de la primera en esta fotografía.

A partir de su gráfica, determine la aceleración del objeto. ¿Cuál espera que sea la aceleración?

11. Dibuje un gráfico de la distancia en función del tiempo para un objeto que se mueve con una aceleración constante de 4 m/s². Suponga que v_0 es cero.
12. En una colisión de frente, un coche que va a 60 mi/h queda parado en 0,1 s. ¿Cuál es la aceleración durante la colisión?
13. Se lanza hacia arriba una bola con una velocidad inicial de 12 m/s. (*a*) ¿Cuánto tarda la bola en alcanzar el punto más alto? (*b*) ¿Cuánto sube la bola? (*c*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre el instante en que la bola sale de la mano y vuelve a ella?
Resp. (*a*) 1,22 s; (*b*) 7,29 m; (*c*) 2,44 s.
14. Un saltador de altura ejecuta un salto de 1,2 m. ¿Con qué velocidad salió del suelo? (*Sugerencia:* Recuérdese que un objeto tocará el suelo con la misma velocidad que tenía cuando salió de él.)
15. Al hacer un salto vertical, un saltamontes extiende sus patas 2,5 cm en 0,025 s. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del saltamontes mientras extiende las patas? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del saltamontes cuando parte del suelo, o sea, en el instante que sus patas están completamente extendidas? (*c*) ¿A qué altura se eleva el saltamontes?
Resp. (*a*) 80 m/s²; (*b*) 2 m/s; (*c*) 0,20 m.
16. Una pulga de 0,2 mg tarda 1 ms (10^{-3} s) en pasar del reposo a su celeridad de despegue, de 1,2 m/s. Durante este intervalo sus patas traseras están en contacto con el suelo (Fig. 4.20). (*a*) ¿Cuál es la aceleración de la pulga durante el período de despegue? (*b*) ¿Cuál es la fuerza sobre la pulga durante este intervalo? (*c*) Después del despegue, la pulga alcanza una altura determinada por la celeridad de despegue. ¿Qué altura alcanzará la pulga?
17. (*a*) ¿Cuál es la celeridad de un punto del borde exterior de un disco de diámetro 12 pulgadas (30,5 cm), que gira a 33 1/3 rpm (revoluciones por minuto)? (*b*) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un punto de dicho borde exterior?
Resp. (*a*) 0,532 m/s; (*b*) 1,86 m/s².
18. Una centrifugadora de 0,20 m de diámetro gira a 5000 rpm (revoluciones por minuto). (*a*) ¿Cuál es la celeridad de un punto del borde exterior de la centrifugadora? (*b*) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del punto en cuestión?
19. La Luna recorre una órbita aproximadamente circular de $3{,}8 \times 10^8$ m de radio alrededor de la Tierra, completando una revolución cada 27,3 días. ¿Cuánto valen: (*a*) la velocidad orbital, y (*b*) la aceleración centrípeta de la Luna?
Resp. (*a*) $1{,}01 \times 10^3$ m/s; (*b*) $2{,}68 \times 10^{-3}$ m/s².

OSERVACIÓN. La aceleración de la Luna está producida por la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la Luna. El cálculo del Prob. 19 fue realizado por primera vez por Newton para hallar cuánto disminuye la gravedad con la distancia a la Tierra (Apart. 5.3).

20. Calcular la celeridad y la aceleración centrípeta de la Tierra en su rotación alrededor del Sol cada 365 días. Utilizar el Apéndice VII para hallar los datos necesarios.
21. La Fig. 4.21 es una gráfica de la posición *x* en función del tiempo *t* de un objeto que realiza un movimiento armónico simple. (*a*) ¿Cuáles son la amplitud y el período de la oscilación? (*b*) ¿Cuáles son la celeridad y la aceleración máximas del objeto?



FIGURA 4.20
Problema 16. Salto de una pulga. Fotografías tomadas a intervalos de 0,57 ms. *(Cortesía de M. Rothschild y K. Parker.)*

(c) ¿Dónde está el objeto cuando tiene la máxima aceleración positiva?
Resp. *(a)* 0,5 m, 3,5 s; *(b)* 0,898 m/s, 1,61 m/s; *(c)* —0,5 m.

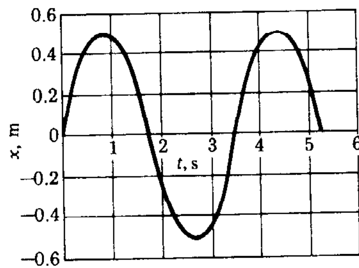


FIGURA 4.21. Problema 21.

22. *(a)* Escribir las ecuaciones para la posición, celeridad y aceleración de un objeto que realiza un movimiento armónico simple con período 5 s y amplitud 0,03 m. *(b)* Representar gráficamente la posición x en función del tiempo t para dicho objeto.
23. La posición (en metros) de un objeto que realiza un movimiento armónico simple viene dada por $x = 0{,}25$ sen $5t$. (a) ¿Cuánto valen la amplitud y el período de la oscilación? *(b)* ¿Cuáles son la celeridad y la aceleración máximas del objeto? *(c)* ¿Cuáles son la posición, celeridad y aceleración del objeto en el instante $t = 0{,}15$ s?
Resp. *(a)* 0,25 m, 1,26 s; *(b)* 1,25 m/s, 6,25 m/s^2; *(c)* 0,170 m, 0,915 m/s, —4,25 m/s^2.
24. Un objeto que parte del reposo recorre una distancia A en un tiempo $(1/4)\tau$ con aceleración constante. Comparar su aceleración con la aceleración máxima de un objeto en movimiento armónico simple con amplitud A y período τ.
25. Un muelle ejerce una fuerza $F = -kx$ sobre un objeto unido a él, donde x es la distancia que se estira o comprime el muelle y k es una constante característica del mismo. Demostrar que una masa unida a un muelle describe un movimiento armónico simple con período

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(*Sugerencia:* Aprovechar el resultado del ejemplo 7 de la sección 4.5.)
26. *(a)* ¿Cuál es el peso en libras de 1 kg. *(b)* ¿Cuál es la masa en kg de un peso de 1 lb?
27. La aceleración debida a la gravedad sobre la Luna es $g = 1{,}63$ m/s^2. ¿Cuál es el peso en *(a)* newtons y *(b)* libras de una masa de 1 kg sobre la Luna? *(c)* ¿Cuál es el peso en la Luna de un hombre que pesa 180 lb en la Tierra?
Resp. *(a)* 1,63 N; *(b)* 0,367 lb; *(c)* 29,9 lb.
28. ¿Cuál es la masa en kilogramos de un objeto que pesa 65 lb en la Luna? (Véase el problema 27.)
29. Una fuerza de 15 N es la única fuerza que actúa sobre una masa de 4 kg. *(a)* ¿Cuál es la aceleración de la masa? *(b)* Si la celeridad de la masa es cero en $t = 0$, ¿cuál es su celeridad en $t = 10$ s? *(c)* ¿Qué distancia recorrió la masa en los 10 segundos?
Resp. *(a)* 3,75 m/s^2; *(b)* 37,5 m/s; *(c)* 187,5 metros.
30. Un coche de 2000 lb se somete a una aceleración desde el reposo hasta 60 mi/h en 12 s. *(a)* ¿Cuál es la fuerza total ejercida sobre el coche durante esta aceleración? *(b)* ¿Qué recorrido efectúa el coche durante el período de aceleración? (*Sugerencia:* Convierta los datos en unidades inglesas.)
31. El cohete Saturno V pesa $6{,}1 \times 10^6$ lb justo antes de despegar. Durante el despegue, el motor del cohete produce un empuje de $7{,}5 \times 10^6$ lb. Esto quiere decir que se ejerce sobre el cohete una fuerza hacia arriba de este módulo. *(a)* ¿Cuál es la aceleración del cohete durante el despegue? (Hay que recordar que el empuje no es la única fuerza que actúa sobre el cohete.) *(b)* Si esta aceleración permanece constante, ¿cuál es la velocidad del cohete después de 60 s?
Resp. *(a)* 7,37 pies/s^2; *(b)* 301 mi/h.
32. En un coche de 1000 kg que va a 25 m/s se da un frenazo de repente. Las ruedas quedan bloqueadas y el coche patina durante 5 s hasta detenerse. *(a)* ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida sobre el coche mientras va patinando? *(b)* ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre los neumáticos y la carretera? *(c)* ¿Qué distancia recorre el coche mientras va patinando hasta detenerse?
33. Un bloque de 3 kg sobre una superficie horizontal es acelerado a lo largo de la superficie por una fuerza de 10 N aplicada a 40° de la horizontal (Fig. 4.22). Hallar los módulos de las componentes *(a)* paralela y *(b)* perpendicular de la fuerza aplicada. *(c)* ¿Cuál es el módulo de la fuerza de contacto que actúa sobre el bloque?

(*d*) El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es 0,25. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque? (*e*) ¿Cuál es la aceleración del bloque?
Resp. (*a*) 7,66 N; (*b*) 6,43, N; (*c*) 23,0 N; (*d*) 5,75 N; (*e*) 0,637 m/s².

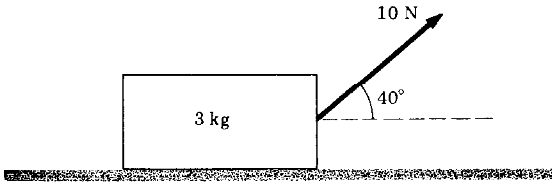


FIGURA 4.22. Problema 33.

34. Un esquiador se desliza por una pendiente con una inclinación de 9° con respecto a la horizontal. (*a*) Sin tener en cuenta el rozamiento, ¿cuál es la aceleración del esquiador? (*b*) Si la pendiente tiene 50 m de largo, ¿cuánto tarda el esquiador en alcanzar el punto más bajo? Se supone que está en reposo en la cima. (*c*) ¿Cuál es su velocidad cuando alcanza el punto más bajo de la pendiente?
35. Un bloque de 5,1 kg está sujeto por una cuerda a un bloque de 7,4 kg, tal como se muestra en la Fig. 4.23. El bloque de 5.1 kg pende libremente, mientras que el de 7,4 kg se apoya sobre una mesa sin rozamiento. Al principio los dos bloques están en reposo, pero cuando el bloque de 5,1 kg cae, arrastra al bloque de 7,4 kg. Como los bloques están unidos, tienen la misma velocidad y aceleración en cualquier momento.

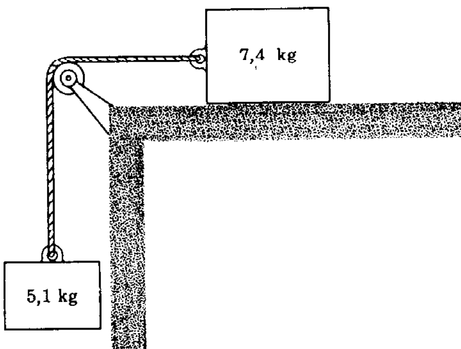


FIGURA 4.23. Problema 35.

Escriba para estas masas ecuaciones semejantes a las Ecs. 4.12 y 4.13. (*a*) Para hallar la aceleración de las masas, elimine la tensión entre estas ecuaciones. (*b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?
Resp. (*a*) 4 m/s²; (*b*) 29,6 N.

36. Si las masas m_1 y m_2 de la Fig. 4.15 son 5 y 3 kg, respectivamente, ¿cuál es (*a*) la aceleración de las masas y (*b*) la tensión en la cuerda?
37. Un mosquito de masa 0,2 g reposa a 12 cm del centro de un disco que gira a 33 1/3 rpm. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza centrípeta sobre el mosquito, es decir, la fuerza dirigida hacia el centro de rotación? (*b*) Esta fuerza es la fuerza de rozamiento entre el mosquito y el disco. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre el mosquito y el disco necesario para evitar que el mosquito resbale hacia el exterior?
Resp. (*a*) $2{,}92 \times 10^{-4}$ N; (*b*) 0,149.
38. Un coche está corriendo a 25 m/s (56 mi/h) por una curva de radio 120 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera para evitar que el coche derrape?
39. Determine (*a*) la velocidad y (*b*) el período de una nave espacial que da vueltas alrededor de la Luna. El radio de la Luna es $1{,}74 \times 10^6$ m, y la aceleración debida a la gravedad sobre la Luna es 1,63 m/s². (Suponer que la nave espacial está en órbita justo por encima de la superficie lunar.)
Resp. (*a*) 1,68 km/s; (*b*) 106 min.
40. Demostrar que la velocidad máxima v a que un coche puede recorrer una curva de radio r sin derrapar es

$$v = \sqrt{\mu r g}$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera.
41. ¿Cuál es la fuerza máxima que actúa sobre un cuerpo de 0,4 kg que ejecuta un movimiento armónico simple de amplitud 0,3 m y período 7 s?
Resp. 0,0967 N.
42. Una masa de 2 kg unida a un muelle de constante elástica 8×10^3 N/m describe un movimiento armónico simple con amplitud 0,12 m. (*a*) ¿Cuál es el período de la oscilación? (*b*) ¿Cuál es la fuerza máxima sobre la masa? (Ver Prob. 25).

BIBLIOGRAFIA

BUTTERFIELD, Herbert: «The Origins of Modern Science 1300-1800», edición revisada, Free Press, New York, 1965. Un excitante manual de los esfuerzos intelectuales que condujeron a la revolución científica. Los principios críticos que enfrentaron a hombres tales como Copérnico y Galileo están colocados en su contexto histórico.

GALILEI, Galileo: «Dialogue Concerning the Two Chief World Systems», traducción de Stillman Drake, edición revisada, University of California Press, Berkeley, 1967. Magistral tratado de Galileo sobre las implicaciones físicas del sistema geocéntrico de Ptolomeo y del heliocéntrico de Copérnico. Está escrito en forma de diálogo entre tres versados caballeros venecianos que se reúnen para discutir los méritos de estos dos sistemas. En el curso de su ingeniosa y al mismo tiempo farragosa discusión, se expone gran parte del trabajo de Galileo acerca del movimiento.

NORTHRIP, J. W.; G. A. LOGAN y W. MCKINNEY: «Introduction to Biomechanic Analysis of Sport», William C. Brown, Dubuque, Iowa, 1974. Se utilizan las leyes de Newton del movimiento para analizar diversas actividades atléticas de modo que el atleta pueda comprender cómo mejorar su rendimiento.

ROTHSCHILD, MIRIAM, Y. SCHLEIN, K. PARKER, C. NEVILLE y S. STERNBERG: «The Flying Leap of the Flea», *Scientific American*, **229**:92 (Noviembre 1973). Un análisis de la física y la fisiología que intervienen en la extraordinaria capacidad de salto de las pulgas.

SHAMOS, Morris H.: «Great Experiments in Physics», Holt, Rinehart and Winston, New York, 1959. Una compilación de fragmentos de los trabajos de los grandes físicos. El capítulo 2 contiene pasajes sobre el movimiento acelerado tomados del «Diálogo» de Galileo y en el capítulo 4 se recogen fragmentos sobre las leyes del movimiento tomados de los «Principia» de Newton.

TRICKER, R. A. R., y B. J. K. TRICKER: «The Science of Mechanics», American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1967. Se aplican los principios de la dinámica lineal y de la rotación a casos biológicos y atléticos específicos.

Capítulo 5 Energía

La energía es un concepto unificador importante porque muy diversos fenómenos, tales como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la carrera de un animal, pueden analizarse en función de la transformación continua de energía de una a otra de sus formas. El principio de conservación de la energía, que establece que la energía total de un sistema cerrado es constante, es una generalización del hecho de que una máquina (o un animal) sólo puede realizar una cantidad limitada de trabajo con una determinada cantidad de combustible (o de alimento). En este capítulo se introducen los conceptos básicos de trabajo y energía, y su relación con las máquinas se estudia en los capítulos 12 y 13.

5.1. Trabajo y energía cinética

A partir de las fuerzas que actúan sobre un objeto, se puede calcular su aceleración y, por lo tanto, su posición y velocidad en cualquier instante. Sin embargo, a menudo sólo estamos interesados en los cambios de velocidad entre dos puntos. Para tales problemas es conveniente introducir los conceptos de trabajo y energía cinética.

Definición. El *trabajo* W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ que actúa sobre un objeto que se desplaza una distancia $\mathbf{d}$ es

$$W = Fd\cos\theta \qquad 5.1$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{d}$ (Fig. 5.1). Como la componente de $\mathbf{F}$ paralela a $\mathbf{d}$ es

$$F_d = F\cos\theta$$

el trabajo puede escribirse también como

$$W = F_d d \qquad 5.2$$

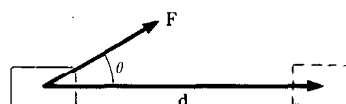


FIGURA 5.1
Una fuerza **F** actuando sobre un bloque que experimenta un desplazamiento **d**.

Ejemplo 1. Un bloque de 2 kg se desliza sin rozamiento 3 m a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo de 20° con la horizontal (Fig. 5.2). ¿Cuál es el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque?
Las dos fuerzas que actúan sobre el bloque son la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ y la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}_g$. Como $\mathbf{F}_c$ es perpendicular al plano inclinado, y por lo tanto al desplazamiento, el trabajo de contacto es

$$W_c = F_c d\cos 90° = 0$$

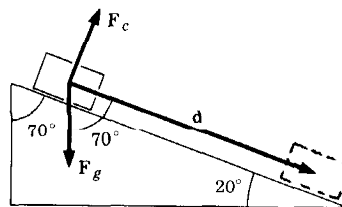


FIGURA 5.2
Un bloque deslizándose sin rozamiento por un plano inclinado.

La fuerza de contacto siempre realiza un trabajo nulo sobre un objeto que se desliza a lo largo de una superficie porque, por definición, dicha fuerza es siempre perpendicular a la superficie.

El trabajo gravitatorio es

$$\begin{aligned} W_g &= F_g d \cos 70° = mgd \cos 70° \\ &= (2 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})(0{,}342) \\ &= 20{,}1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 20{,}1 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Las dimensiones del trabajo son $[f \cdot l] = [ml^2/t^2]$. En el sistema internacional, la unidad de trabajo es el newton–metro (N · m), que, debido a su importancia, tiene su propio nombre, el *joule* (J):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

En el sistema cgs, la unidad de trabajo es la dina–centímetro (din · cm), o *ergio* (erg)

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ din} \cdot \text{cm}$$

Como $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$ y $1 \text{ N} = 10^5 \text{ din}$, la conversión de joules a ergios es

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = (10^5 \text{ din})(10^2 \text{ cm}) = 10^7 \text{ din} \cdot \text{cm} = 10^7 \text{ erg}$$

En el sistema inglés, la unidad de trabajo es la libra-pie, que es igual a 1,35 J.

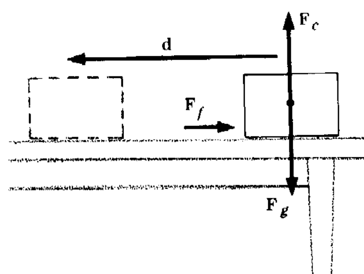


FIGURA 5.3
Un bloque deslizándose sobre una superficie horizontal.

Ejemplo 2. Un bloque de 5 kg resbala 0,8 m a lo largo de una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es 0,4. ¿Qué trabajo realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque?

Las tres fuerzas que actúan sobre el bloque son la gravedad $\mathbf{F}_g$, la fuerza de contacto F_c y el rozamiento $\mathbf{F}_f$. En la Fig. 5.3 vemos que $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_c$ son perpendiculares al desplazamiento $\mathbf{d}$, por lo que $W_c = W_g = 0$. El módulo de $\mathbf{F}_f$ es

$$F_f = \mu_k F_c = \mu_k mg = (0{,}4)(5 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 19{,}6 \text{ N}$$

Como $\mathbf{F}_f$ es de sentido opuesto (antiparalelo) al de $\mathbf{d}$, el ángulo entre ambos es 180°. En consecuencia, el trabajo realizado por $\mathbf{F}_f$ es

$$W = F_f d \cos \theta = (19{,}6 \text{ N})(0{,}8 \text{ m})(\cos 180°) = -15{,}7 \text{ J}$$

Como veremos en el ejemplo 4, el signo menos indica que la fuerza $\mathbf{F}_f$ actúa de modo que disminuye la velocidad del bloque.

La importancia del concepto de trabajo la da el siguiente teorema.

Teorema Trabajo-Energía. *El trabajo total W realizado sobre un objeto que se desplaza desde una posición inicial A a una posición final B es igual al cambio de la energía cinética del objeto*

$$W = K_B - K_A \qquad 5.3$$

donde, por definición, la energía cinética K de un objeto de masa m que se mueve con velocidad **v** *es*

$$K = (½)\, mv^2 \qquad 5.4$$

OBSERVACIÓN. Es instructivo demostrar este teorema para el caso especial en que una fuerza constante **F** actúa sobre un objeto de masa m en la dirección del desplazamiento **d** del objeto. En este caso, el trabajo realizado es

$$W = Fd$$

y el objeto tiene la aceleración constante

$$a = \frac{F}{m} = \frac{W}{md} \qquad 5.5$$

Según la Ec. 4.3, las velocidades inicial y final v_A y v_B están relacionadas con a por

$$v_B = v_A + at \qquad 5.6$$

mientras que, según la Ec. 4.5, la distancia d se relaciona con v_A y a por

$$d = v_A t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad 5.7$$

Despejando t de la Ec. 5.6, obtenemos

$$t = \frac{v_B - v_A}{a}$$

e introduciendo este resultado en la Ec. 5.7, se tiene

$$d = v_A \frac{v_B - v_A}{a} + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{v_B - v_A}{a}\right)^2 = \frac{(v_A v_B - v_A^2) + \frac{1}{2}(v_B - v_A)^2}{a}$$

$$= \frac{v_A v_B - v_A^2 + \frac{1}{2}v_B^2 - v_A v_B + \frac{1}{2}v_A^2}{a} = \frac{1}{a}(\tfrac{1}{2}v_B^2 - \tfrac{1}{2}v_A^2)$$

o bien

$$ad = \tfrac{1}{2}v_B^2 - \tfrac{1}{2}v_A^2$$

Pero según la Ec. 5.5, $ad = W/m$, por lo que

$$W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A$$

Ello prueba el teorema del trabajo-energía para el caso especial considerado. Sin embargo, este teorema tiene una validez general, aun cuando **F** no sea constante o no paralela al desplazamiento del objeto.

En el sistema SI, la energía cinética tiene las unidades

$$\text{kg} \cdot (\text{m/s})^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

(recordar que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$). Por lo tanto, las unidades de trabajo y de energía cinética son las mismas, como de hecho ha de ocurrir según la Ec. 5.3.

Ejemplo 3. Si el bloque del ejemplo 1 parte del reposo, ¿cuál es su velocidad tras deslizarse 3 m por el plano inclinado?

Según los cálculos del ejemplo 1 sabemos que el trabajo total realizado sobre el bloque vale

$$W = W_c + W_g = 0 + 20{,}1 \text{ J} = 20{,}1 \text{ J}$$

Como el bloque parte del reposo, su celeridad inicial y su energía cinética inicial son nulas. Por lo tanto, según las Ecs. 5.3 y 5.4, tenemos

$$W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - 0$$

o bien

$$v_B = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(20.1 \text{ J})}{2 \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{20{,}1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kg}}} = 4{,}48 \text{ m/s}$$

Sabemos que las unidades de la solución han de ser metros por segundo ya que hemos utilizado debidamente el sistema internacional de unidades.

Ejemplo 4. Si el bloque del ejemplo 2 tiene una celeridad inicial de 3 m/s, ¿cuál es su celeridad tras deslizarse 0,8 m a lo largo de la superficie?
La energía cinética inicial del bloque es

$$K_A = \tfrac{1}{2} mv_A^2 = \tfrac{1}{2}\,(5 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 22{,}5 \text{ J}$$

y según el ejemplo 2 el trabajo total realizado es

$$W = W_c + W_g + W_f = 0 + 0 + (-15{,}7 \text{ J}) = -15{,}7 \text{ J}$$

Por lo tanto, obtenemos de las Ecs. 5.3 y 5.4

$$\tfrac{1}{2}\, mv_B^2 = W + \tfrac{1}{2}\, mv_A^2 = -15{,}7 \text{ J} + 22{,}5 \text{ J} = 6{,}8 \text{ J}$$

o bien

$$v_B = \sqrt{\frac{2(6{,}8 \text{ J})}{5 \text{ kg}}} = 1{,}65 \text{ m/s}$$

El efecto del trabajo negativo es disminuir la energía cinética de un objeto, es decir, irlo frenando.

Carreras de los animales

El análisis de la celeridad de las carreras de los animales proporciona una aplicación interesante del teorema trabajo-energía. Consideremos un animal que corre a celeridad constante v. Una vez que está en movimiento, no se requiere ningún trabajo para mantener su cuerpo en movimiento (sólo una pequeña cantidad a causa de la resistencia del aire). Sin embargo, cuando una pata golpea el suelo se pone en reposo momentáneamente, mientras que el resto del cuerpo del animal continúa moviéndose hacia adelante. Cuando la pata se levanta, adquiere un movimiento acelerado hacia adelante por medio de un grupo de músculos para alcanzar el cuerpo. Cuando la pata rebase el cuerpo, es retardada por un grupo de músculos antagónicos que la ponen en reposo sobre el suelo otra vez. Uno de estos grupos de músculos ejecuta el trabajo al variar la energía cinética de la pata desde 0 hasta

1/2 $m_l v^2$, mientras que el otro ejecuta un trabajo al hacerla volver desde 1/2 $m_l v^2$ a 0. Aquí m_l es la masa de la pata.

OBSERVACIÓN. El principal esfuerzo al correr está en el trabajo requerido para acelerar y desacelerar continuamente las patas. La enorme ventaja de la rueda es que permite la locomoción sin necesidad de mover y parar continuamente.

El trabajo $W = F_m d$ es efectuado por un conjunto de músculos que ejercen una fuerza F_m mientras se contraen una distancia d. A partir del teorema trabajo-energía, tenemos

$$F_m d = \tfrac{1}{2} m_l v^2$$

o sea

$$v^2 = \frac{2F_m d}{m_l} \qquad 5.8$$

Esta expresión da la celeridad del animal en función de la fuerza ejercida por sus músculos, la distancia que estos músculos se contraen, y la masa de su pata. A partir de la Ec. 5.8 podemos determinar cómo la rapidez de un animal depende de su tamaño, o sea cómo la celeridad sigue una escala. El argumento es semejante al dado en el apartado 1.4. Consideramos dos animales de diferente tamaño pero de forma parecida. Si las magnitudes de la Ec. 5.8 se refieren al animal más pequeño, la celeridad del animal más grande viene dada por una ecuación semejante

$$v'^2 = \frac{2F'_m d'}{m'_l} \qquad 5.9$$

donde las magnitudes primas se refieren todas ellas al animal más grande. Si el animal más grande tiene un factor de escala L con respecto al animal más pequeño, todas las distancias en el animal más grande son L veces las distancias correspondientes en el animal pequeño, de modo que

$$d' = Ld$$

La fuerza F'_m y la masa m' están relacionadas con F_m y m por las leyes de escala discutidas en el Apart. 1.4

$$F'_m = L^2 F_m \qquad \text{y} \qquad m'_l = L^3 m_l$$

Aplicando estas expresiones en la Ec. 5.9, obtenemos

$$v'^2 = \frac{2(L^2 F_m)(Ld)}{L^3 m_l} = \frac{2F_m d}{m_l} = v^2$$

Así, la rapidez del animal más grande es la misma que la del animal pequeño. Aunque este sorprendente resultado sirve rigurosamente sólo para los animales de forma semejante, es aproximadamente cierto para animales de tamaño comprendido entre el conejo y el caballo.

La Ec. 5.8 muestra que un animal especialmente rápido debe tener unas patas extraligeras y unos músculos de la pata extragrandes. Esto

puede lograrse poniendo los músculos de la pata dentro del cuerpo, de modo que no se muevan con las patas. Así, la mayoría de los animales preparados para grandes velocidades, como los pura sangre, los ciervos y los galgos tienen patas extremadamente delgadas.

5.2. ENERGIA POTENCIAL

Una *fuerza conservativa* es aquella que realiza el mismo trabajo W_{AB} al mover un objeto a lo largo de cualquier camino entre dos puntos determinados, A y B.
La gravedad es un ejemplo de fuerza conservativa, la cual puede demostrarse calculando el trabajo gravitatorio realizado al mover un objeto a lo largo de dos caminos diferentes que unan los mismos puntos inicial y final. Calculemos primero el trabajo gravitatorio realizado al desplazar el objeto de masa m de la Fig. 5.4 desde A hasta B a lo largo del camino ACB.

Cuando el objeto de masa m de la Fig. 5.4 cae verticalmente desde el punto A al punto C, el trabajo realizado sobre él por la fuerza de la gravedad es

$$W_{AC} = F_g h = mgh$$

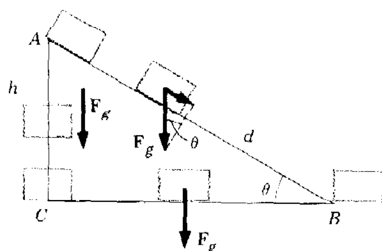


FIGURA 5.4
Comparación entre el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre una masa que se desplaza de A a B a lo largo de un plano inclinado y el trabajo realizado sobre la masa que se traslada de A a B a lo largo del camino ACB.

El signo es positivo porque $\mathbf{F}_g$ está dirigida de A a C, es decir, $\mathbf{F}_g$ es paralela al desplazamiento $\mathbf{h}$. El trabajo efectuado por la gravedad al mover el objeto horizontalmente de C a B es cero, puesto que $\mathbf{F}_g$ es perpendicular al movimiento en este caso. Así

$$W_{CB} = 0$$

por lo que el trabajo total ejecutado sobre el objeto por la gravedad cuando va de A a C y después de C a B es

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = mgh + 0 = mgh$$

El objeto también puede ir de A a B moviéndose diagonalmente a lo largo del plano inclinado. El trabajo W_{AB} efectuado por la gravedad al recorrer este camino, es igual a la componente de $\mathbf{F}_g$ paralela al plano inclinado multiplicada por d. De acuerdo con la Fig. 5.4

$$W_{AB} = mg \operatorname{sen}\theta \, d$$

Pero, como ACB es un triángulo rectángulo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{d}$$

por lo que

$$W_{AB} = mg\frac{h}{d}\,d = mgh = W_{ACB}$$

Así, el trabajo realizado por la gravedad sobre el objeto al ir de A a B, es el mismo, tanto si se mueve a lo largo de ACB como a lo largo de la diagonal AB. De hecho, se puede demostrar que el trabajo reali-

zado por la gravedad sobre el objeto al ir de A a B es el mismo, cualquiera que sea el camino seguido. Siempre es igual a mgh, donde h es la separación, según la vertical, entre A y B.

El hecho de que el trabajo efectuado sea independiente del camino seguido, quiere decir que solamente depende de las posiciones de los puntos A y B. Supongamos que h_A sea la altura del punto A medida a partir de cierta superficie de referencia, y que h_B sea la altura del punto B desde esta misma superficie (Fig. 5.5). Entonces el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que va de A a B *a lo largo de cualquier camino*, puede escribirse

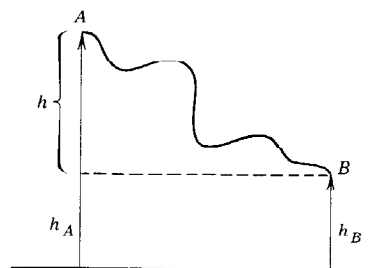


FIGURA 5.5
El trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre una masa que se desplaza desde el punto A al B depende solamente de la diferencia h entre las alturas de los puntos y no del camino seguido.

$$W_{AB} = mgh_A - mgh_B = mg(h_A - h_B) = mgh \tag{5.10}$$

Aquí se expresa el trabajo como la diferencia de dos magnitudes (mgh_A y mgh_B) que dependen solamente de las posiciones de los puntos A y B respectivamente.

Definición. Para cualquier fuerza conservativa es posible definir en cada punto una magnitud U, denominada energía potencial, tal que el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un objeto desde A hasta B por cualquier camino es

$$W_{AB} = U_A - U_B \tag{5.11}$$

donde U_A y U_B son los valores de U en A y en B. Según la Ec. 5.10 vemos que la *energía potencial de la fuerza gravitatoria* es

$$U_A = mgh_A \tag{5.12}$$

donde h_A es la altura vertical de A sobre la superficie de referencia.

OBSERVACIÓN. (1) Como la superficie de referencia es arbitraria, el valor absoluto de la energía potencial en un punto es arbitraria. Si se cambia la superficie de referencia, la energía potencial se modificará en todos los puntos en la misma cantidad. Sin embargo, esto carece de importancia, puesto que en la práctica lo que interesa es solamente la diferencia entre las energías potenciales en dos puntos. Esta diferencia es independiente de la posición de la superficie de referencia. (2) La Ec. 5.12 es una aproximación sólo válida para valores de h_A lo suficientemente pequeños como para que pueda despreciarse la variación de la fuerza gravitatoria con la distancia a la Tierra. La expresión de la energía potencial gravitatoria válida a todas las distancias se da en el Apart. 5.3.

Las fuerzas no conservativas, tales como la fuerza de rozamiento y las fuerzas aplicadas, se discuten en el Apart. 5.5. Por ahora sólo consideraremos situaciones en las que todas las fuerzas sean conservativas o de contacto, de modo que el trabajo total venga dado por la Ec. 5.11. Por lo tanto, podemos combinar las Ecs. 5.3 y 5.11 para obtener.

$$U_A - U_B = K_B - K_A$$

o bien

$$U_A + K_A = U_B + K_B \tag{5.13}$$

lo que establece que cuando sobre un objeto actúan sólo fuerzas conservativas y de contacto, la suma de la energía cinética y la energía potencial permanece constante, es decir, *se conserva*, cuando el objeto cambia de posición.

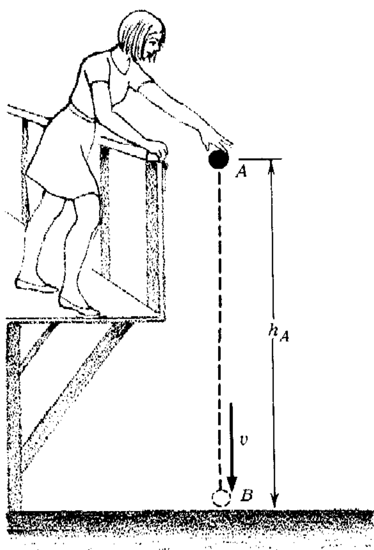


FIGURA 5.6
Muchacha dejando caer una pelota desde un puente.

Definición. La *energía mecánica* E_m de un objeto es la suma de sus energías cinética y potencial

$$E_m = U + K \qquad 5.14$$

En particular, si la fuerza conservativa es la fuerza gravitatoria, tenemos, según las Ecs. 5.4 y 5.12

$$E_m = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh \qquad 5.15$$

Ejemplo 1. Una muchacha deja caer una pelota de 0,3 kg desde un *puente que está 12 m por encima de las aguas. ¿Cuál es la velocidad v* de la pelota cuando toca el agua?
La gravedad es la única fuerza ejercida sobre la pelota (si se desprecia la resistencia del aire), por lo tanto sirven las ecuaciones 5.13 y 5.15. Supongamos que A es la posición de la pelota cuando sale de la mano de la muchacha, y que B es su posición en el momento de tocar el agua (Fig. 5.6). Si la superficie del agua se toma como superficie de referencia, la energía potencial de la pelota en A es

$$\begin{aligned} U_A = mgh_A &= 0{,}3 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 12 \text{ m} \\ &= 35{,}3 \text{ kg-m}^2/\text{s}^2 = 35{,}3 \text{ N-m} \\ &= 35{,}3 \text{ J} \end{aligned}$$

y su energía potencial en B es

$$U_B = mgh_B = mg \times 0 = 0$$

La pelota está en reposo en el instante en que sale de la mano de la muchacha, por lo tanto su energía cinética en A es cero:

$$K_A = \tfrac{1}{2}m \times 0^2 = 0$$

La energía mecánica en A es entonces

$$E_m = K_A + U_A = 0 + 35{,}3 \text{ J} = 35{,}3 \text{ J}$$

y es igual a la energía mecánica en B (puesto que se desprecia la resistencia del aire)

$$35{,}3 \text{ J} = K_B + U_B = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Despejando de aquí v se obtiene

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{70{,}6 \text{ J}}{m}} = \sqrt{\frac{70{,}6 \text{ kg-m}^2/\text{s}^2}{0{,}3 \text{ kg}}} \\ &= \sqrt{235 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 15{,}3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. La velocidad v es independiente de la masa de la pelota, puesto que la masa aparece como factor común en las energías cinética y potencial. Esta peculiaridad de la fuerza de gravitación ya se ha discutido en el capítulo 4, en conexión con el hecho de que todos los objetos caen al suelo con la misma aceleración.

Ejemplo 2. Supongamos un muchacho que pasa en un bote por debajo del puente e intenta devolver la pelota lanzándola hacia arriba. Si la velocidad de la pelota, cuando sale de la mano del muchacho, es 14 m/s, ¿a qué altura subirá? Para simplificar, supongamos que la mano del muchacho se halla en la misma superficie del agua, punto B, cuando la pelota sale de su mano. Entonces, las energías cinética y potencial de la pelota en el punto B son

$$K_B = \tfrac{1}{2} \times 0{,}3\ \text{kg} \times (14\ \text{m/s})^2 = 29{,}4\ \text{J}$$

y

$$U_B = 0$$

y por lo tanto

$$E_m = K_B + U_B = 29{,}4\ \text{J}$$

En el punto C, en donde la pelota alcanza su máxima altura h_C por encima del agua, sus energías potencial y cinética son

$$U_C = mgh_C \qquad \text{y} \qquad K_C = 0$$

La energía cinética es cero porque la pelota está un instante en reposo en el punto más alto (Apart. 4.2). Entonces, tenemos

$$E_m = 29{,}4\ \text{J} = 0 + mgh_C$$

y despejando h_C se obtiene

$$h_C = \frac{29{,}4\ \text{J}}{mg} = \frac{29{,}4\ \text{J}}{0{,}3\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2} = 10\ \text{m}$$

Como la muchacha estaba a 12 m por encima del agua, el muchacho no logró devolverle la pelota.

Ejemplo 3. Un bloque de masa m con una velocidad inicial de 5 m/s se desliza sin rozamiento 4 m a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo de 25° con la horizontal (Fig. 5.7). ¿Cuál es su velocidad cuando llega al extremo inferior del plano inclinado?

La energía mecánica de la masa en la cumbre del plano inclinado (A) es

$$E_m = \tfrac{1}{2}\, mv_A^2 + mgh \qquad \text{donde} \qquad h\,(4\ \text{m})(\text{sen}\ 25°) = 1{,}7\ \text{m}$$

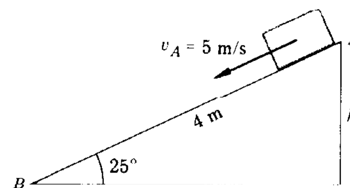


FIGURA 5.7
Una masa deslizándose por un plano inclinado.

La energía mecánica en el extremo inferior es

$$E_m = \tfrac{1}{2}\, mv_B^2$$

Como no hay rozamiento sobre la masa, y como la fuerza de contacto no efectúa ningún trabajo, la energía mecánica se conserva. Por consiguiente tenemos

$$\tfrac{1}{2}\, mv_B^2 = \tfrac{1}{2}\, mv_A^2 + mgh$$

por lo cual

$$v_B^2 = v_A^2 + 2\,gh - (5\ \text{m/s})^2 + 2(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}7\ \text{m}) = 58{,}3\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

o bien

$$v_B = 7{,}6\ \text{m/s}$$

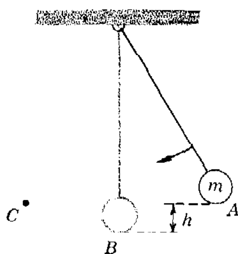


FIGURA 5.8
La masa de un péndulo desciende la distancia vertical h cuando se balancea de A a B.

El péndulo

Un péndulo es un dispositivo que convierte continuamente su energía potencial en cinética y viceversa. Consta de una masa pesada m sujeta a un extremo de una varilla ligera. El otro extremo de la varilla cuelga libremente de un gancho (Fig. 5.8). En un extremo de su balanceo, punto A de la Fig. 5.8, su energía cinética es cero y su energía potencial es mgh, en donde h es la distancia vertical de la masa medida a partir de su punto más bajo, el punto B. Cuando el péndulo se mueve hacia el punto B, pierde energía potencial y gana energía cinética, hasta que, en el mismo punto B, su energía potencial es cero y su energía cinética es igual a mgh. Después, cuando continúa hasta el punto C, pierde energía cinética y gana energía potencial. En el punto C la energía cinética es otra vez cero y vuelve toda la energía a la forma de energía potencial. Si no hay fuerzas de rozamiento sobre el péndulo, la altura que alcanza en C es igual a su altura en A, de modo que un péndulo sin rozamiento puede oscilar indefinidamente entre A y C.

En la realidad, siempre hay algo de rozamiento en el pivote y en el aire (resistencia del aire). Estas fuerzas de rozamiento producen trabajo negativo porque están dirigidas en sentido opuesto al movimiento. Como consecuencia, la energía mecánica del péndulo disminuye continuamente, puesto que realiza trabajo contra estas fuerzas. Como el péndulo llega a C con menos energía potencial que la que tenía en A, su altura en C es menor que h. Más aún, cuando vuelve de nuevo a A, no se eleva tanto como lo hizo en C. Así, cuando se mueve hacia adelante y hacia atrás, el péndulo pierde continuamente energía mecánica, hasta que queda en reposo.

Aplicaciones al atletismo

La energía potencial gravitatoria de un objeto extenso sólo depende de la posición de su centro de gravedad, de modo que los cambios en la energía potencial del objeto dependen solamente de los cambios de posición de su centro de gravedad. Esto tiene gran importancia para entender perfectamente muchos ejercicios atléticos. Por ejemplo, en salto de altura (Fig. 5.9) los músculos de la pierna de la atleta realizan primeramente un trabajo que da al cuerpo su energía cinética inicial. Durante el salto, esta energía cinética inicial se convierte en energía potencial (altura) necesaria para pasar el listón. Para elevar su centro de gravedad una altura h, la atleta debe salir del suelo con una energía cinética igual a mgh, por lo menos. Sin embargo, el punto importante es que h no es la altura del listón por encima del suelo. Dado que la saltadora empieza su salto desde una posición erguida, su centro de gravedad está ya a 1 m aproximadamente por encima del suelo. Cuando va por encima del listón, la saltadora flexiona el cuerpo de manera que quede horizontal. De este modo, la altura h a que se eleva su centro de gravedad se mantiene lo más pequeña posible (Fig. 5.9) y es aproximadamente la mitad de la altura que hay entre el listón y el suelo.

En gimnasia hay un bello ejercicio de volteo que se hace en la barra fija (Fig. 5.10a). El que no lo ejecuta, empezando en la posición vertical invertida A de la Fig. 5.10b cae libremente con el cuerpo completamente extendido. Puede, sin embargo, dar una vuelta completa y volver

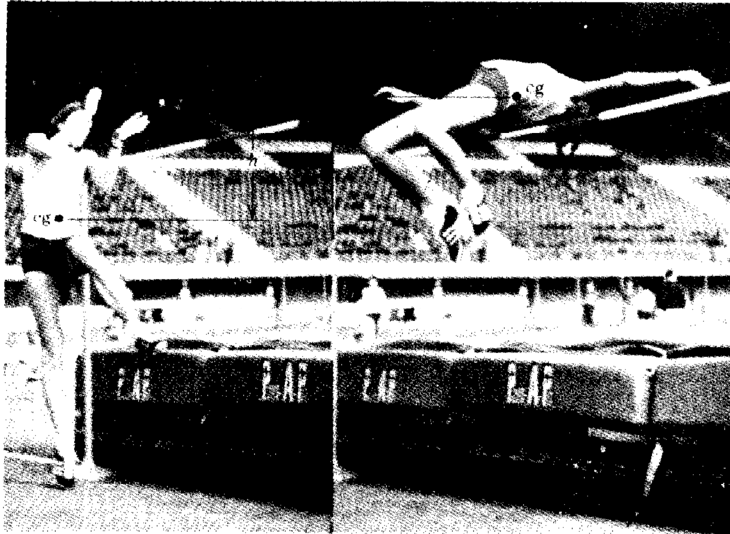


FIGURA 5.9
Al girar su cuerpo durante el salto, la atleta sólo ha de elevar su centro de gravedad una altura aproximadamente mitad de la del listón.
(*Athletic Journal*, March 1975.)

de nuevo a la posición invertida, de modo que puede seguir dando vueltas alrededor de la barra en aparente desafío a la pérdida de energía debida al rozamiento. Merece la pena analizar este ejercicio gimnástico con detalle porque ilustra varios principios físicos importantes. Cuando el gimnasta empieza en la posición A, su centro de gravedad está a una distancia por encima de la barra de unos 1,25 m. Si la barra está a 2,50 m por encima del suelo, su energía potencial inicial (con respecto al suelo) es

$$U_A = mg \times 3{,}75 \text{ m}$$

Como la energía cinética en A es cero, su energía mecánica en A es

$$E_m(A) = U_A + K_A = mg \times 3{,}75 \text{ m}$$

Por ejemplo, la energía mecánica de un gimnasta de 90 kg en A es

$$E_m(A) = 90 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 3{,}75 \text{ m} = 3308 \text{ J}$$

Si no hubiera pérdida de energía debida al rozamiento, ésta sería también su energía mecánica en los puntos B, C y D. Siempre hay pérdida de energía, de modo que su energía mecánica en B es ligeramente menor que en A. Supongamos que en el recorrido desde el punto A al B hay una pérdida de 25 J, y que en el recorrido de vuelta hasta D se pierden otros 25 J. Entonces en la posición D su energía mecánica total es

$$E_m(D) = 3308 \text{ J} - 50 \text{ J} = 3258 \text{ J}$$

y ésta es toda la energía potencial. La altura de su centro de gravedad en D viene dada entonces por

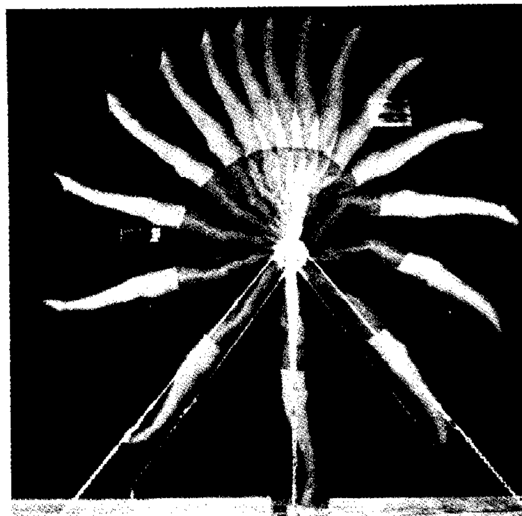
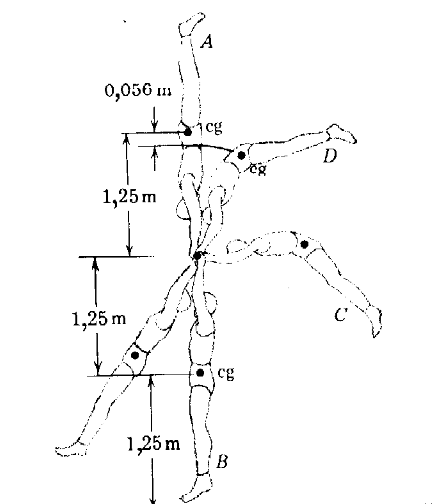

a

FIGURA 5.10
(*a*) Un gimnasta volteando la barra fija. *(Por cortesía de Barry D. Wilson, Biomechanics Laboratory, Department of Physical Education, University of Iowa.)*



b

(*b*) Un gimnasta, que parte del reposo en *A*, puede dar la vuelta completa alrededor de la barra porque en el punto *C* hace un movimiento de impulso hacia la barra. Al volver al punto *A*, su centro de gravedad se halla más bajo que cuando empezó, pero enderezando su cuerpo en este punto vuelve a elevar su centro de gravedad a su altura original.

$$mgh_D = 3258 \text{ J}$$

de modo que

$$h_D = \frac{3258 \text{ J}}{90 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m s}^{-2}} = 3{,}694 \text{ m}$$

Ésta es 0,056 m menor que la altura de 3,75 m de la que partió en la posición *A*.
Para un péndulo, esto significaría que no podría alcanzar la posición *A* sino que volvería a caer hacia *B*. El gimnasta puede alcanzar *A*, porque cuando pasa por la posición horizontal *C*, dobla el cuerpo ligeramente por la cintura y tira hacia la barra con los brazos. Esto desplaza su centro de gravedad hacia la barra los necesarios 0,056 m, de

modo que logrará elevarse por encima de la barra en la posición D con el cuerpo doblado. Mientras está en esta posición estira el cuerpo y eleva su centro de gravedad 0,056 m. Esto se logra gracias a las fuerzas ejercidas por sus músculos. El trabajo efectuado por sus músculos iguala el trabajo realizado al levantar 90 kg una distancia de 0,056 m, o

$$W = 90 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 0{,}056 \text{ m} = 50 \text{ J}$$

que es exactamente igual a la energía perdida por rozamiento. Así, el gimnasta puede seguir volviendo a su posición original supliendo con los músculos de sus brazos la energía perdida por rozamiento. Un principio semejante es el que actúa para impulsar un columpio o un trapecio.

5.3. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

El hecho de que la suma de las energías cinética y potencial sea una constante en ausencia de rozamiento, puede parecer de poca utilidad porque siempre hay algo de rozamiento. En realidad, aunque el rozamiento es corriente en la vida cotidiana, no juega ningún papel en las situaciones astronómicas (como el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra o la Tierra alrededor del Sol) o en los movimientos de los átomos y moléculas. En estos dominios de física básica, la energía mecánica se conserva completamente. Sin embargo, las energías potenciales en estas situaciones son de forma diferente a las usadas en el último apartado.

La expresión mgh para la energía potencial gravitatoria solamente es válida cerca de la superficie de la Tierra, donde la fuerza de la gravedad se puede considerar que es aproximadamente constante. Para los problemas en los que intervienen objetos que están lejos de la superficie de la Tierra, como un satélite artificial o la misma Luna, debe tenerse en cuenta la variación de la fuerza de la gravedad con la distancia. La variación fue descubierta por Newton, el cual demostró que la fuerza que actúa sobre la Luna para mantenerla en órbita alrededor de la Tierra es la misma fuerza de gravitación (disminuida por la distancia) que actúa sobre los objetos que se hallan en la superficie de la Tierra. Más aún, demostró que la gravedad no es propiedad exclusiva de la Tierra, sino que es una fuerza que existe entre dos objetos cualesquiera. Newton hizo estos descubrimientos deduciendo la fuerza que se requiere para explicar los hechos conocidos acerca del movimiento planetario. No podemos profundizar aquí en este método y nos limitaremos a enunciar los resultados.

Ley de la gravitación universal. *Entre dos objetos cualesquiera de masas* m_1 *y* m_2 *existe una fuerza de atracción directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadradc de la distancia entre ellas.* Esta fuerza se escribe así

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad 5.16$$

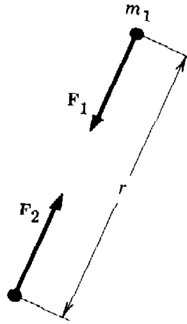


FIGURA 5.11
Fuerzas sobre dos masas atraídas mutuamente por la gravedad.

donde r es la distancia entre los objetos y G es una constante universal de la naturaleza. En unidades SI

$$G = (6{,}673 \pm 0{,}003) \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2$$

OBSERVACIONES. (1) Las fuerzas siempre vienen, por supuesto, en pares y la Ec. 5.16 da el módulo de cualquier miembro del par. Como la fuerza es atractiva, la fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre m_1 está dirigida hacia m_2 y la fuerza (reacción) $\mathbf{F}_2$ sobre m_2 está dirigida hacia m_1 (Fig. 5.11). (2) La Ec. 5.16 sólo se cumple exactamente para objetos puntuales (partículas). Se cumple para objetos extensos sólo si r es mucho más grande que los propios objetos. Una excepción muy importante es cuando el objeto es una esfera. Para objetos esféricos, es un hecho notable, probado por vez primera por Newton, que la Ec. 5.16 se cumple si la distancia r se mide entre los centros de las esferas.

Como la Tierra es casi esférica, se puede usar la Ec. 5.16 para los objetos que se hallan sobre su superficie. La fuerza de la gravedad sobre un objeto de masa m cerca de la superficie de la Tierra es entonces

$$F_g = G\frac{m_e m}{R_e^2}$$

en donde m_e es la masa de la Tierra y $R_e = 6{,}37 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra. La aceleración a de la masa viene dada en función de F_g por la Ec. 4.7: $F_g = ma$. Pero como todos los objetos tienen la misma aceleración g cerca de la superficie de la Tierra, también tenemos $F_g = mg$, luego

$$G\frac{m_e m}{R_e^2} = mg$$

Después de suprimir la masa m en los dos miembros de esta ecuación, obtenemos una relación muy útil entre la aceleración de la gravedad g y la masa y el radio de la Tierra:

$$g = \frac{Gm_e}{R_e^2} \qquad 5.17$$

Por ejemplo, la masa de la Tierra puede determinarse a partir de esta relación porque todas las otras magnitudes son conocidas. Despejando m_e de la Ec. 5.17, obtenemos

$$m_e = \frac{gR_e^2}{G} = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(6{,}37 \times 10^6 \text{ m})^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2}$$
$$= 6{,}0 \times 10^{24} \text{ m-kg}^2/\text{N-s}^2$$
$$= 6{,}0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

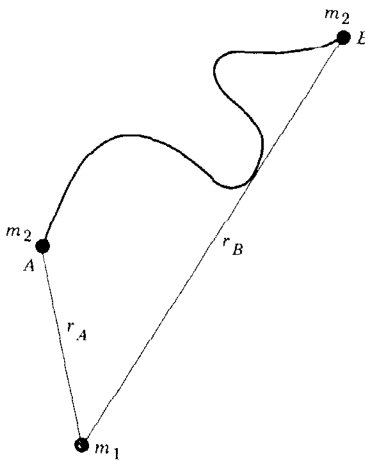


FIGURA 5.12
El trabajo realizado por la gravedad sobre una masa que se desplaza de A a B no depende del camino seguido.

donde hemos usado la relación 1 N = 1 kg-m/s² para reducir adecuadamente las unidades a kilogramos.

La fuerza dada por la Ec. 5.16, que es la que debe usarse al tratar con objetos que cambian su distancia al centro de la Tierra, es conservativa. Esto quiere decir que el trabajo realizado por esta fuerza al desplazar

la masa m_2 de un punto a otro (Fig. 5.12) no depende del camino seguido, y por tanto el trabajo puede expresarse por la Ec. 5.11 en función de la energía potencial en los dos puntos. Con el cálculo integral se puede demostrar que la energía potencial U de m_2 a una distancia r de m_1 es

$$U = \frac{-Gm_1m_2}{r} \qquad 5.18$$

OBSERVACIÓN. En la Ec. 5.12, la energía potencial se hace arbitrariamente que sea cero en alguna superficie de referencia localizada convenientemente cerca de la superficie de la Tierra, mientras que en la Ec. 5.18 se toma como cero en un punto infinitamente alejado de la Tierra. Como la energía potencial aumenta con la distancia desde la Tierra, la energía potencial dada por la Ec. 5.18 debe ser negativa para todas las distancias finitas desde la Tierra. La Ec. 5.12 no puede usarse para calcular la energía potencial a muy grandes distancias de la Tierra porque aumenta sin límite cuando la distancia desde la Tierra se hace grande.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la velocidad mínima a que un meteorito choca contra las capas superiores de la atmósfera terrestre?
Un meteorito empieza como un trozo de restos interplanetarios de masa m que flota por el espacio muy lejos de la Tierra. La energía potencial de esta masa, de acuerdo con la Ec. 5.18, es casi cero, puesto que la distancia r es muy grande. Si la masa se mueve muy lentamente, de modo que su energía cinética sea también casi cero, su energía mecánica es (aproximadamente) cero. Sin embargo, la masa puede empezar a derivar hacia la Tierra. Una vez que empieza a ser atraída hacia la Tierra, irá adquiriendo velocidad al tiempo que cae. Como la energía mecánica de la masa es una constante, su energía potencial debe hacerse más negativa al aumentar su energía cinética. Cuando el meteorito alcanza la atmósfera de la Tierra, sus energías potencial y cinética son

$$U = \frac{-Gm_em}{R_e} \qquad \text{y} \qquad K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Como la energía mecánica es aún cero, tenemos

$$0 = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_em}{R_e}$$

(La distancia desde la superficie de la Tierra hasta la parte superior de la atmósfera terrestre es insignificante comparada con el radio de la Tierra.) Despejando v de esta última ecuación, tenemos

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_e}{R_e}} = \sqrt{2gR_e} = 11{,}2 \text{ km/s}$$

que es la velocidad con la que un meteorito entra en la atmósfera terrestre. A esta alta velocidad, las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el meteorito, debido a la resistencia del aire, son tan enormes que normalmente entra en ignición. Una nave espacial que entra de nuevo en la atmósfera terrestre, debe tener un morro cónico ideado especialmente para protegerla del tremendo calor generado.

OBSERVACIÓN. Compárese este ejemplo con el de la muchacha que lanza la pelota del Apart. 5.2. Aunque la forma de energía potencial usada es diferente en estos dos ejemplos, el razonamiento, basado en el hecho de que la energía mecánica es una constante, es idéntico.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la velocidad a que debe ser disparado desde la Tierra un cohete de masa m para que pueda escapar completamente de la gravedad terrestre?
En la superficie de la Tierra su energía potencial es

$$U_e = -\frac{Gm_e m}{R_e}$$

y a una distancia infinita de la Tierra, su energía potencial es $U_\infty = 0$. Buscamos la velocidad mínima que debe tener el cohete para poder escapar, de modo que podemos suponer que tiene energía cinética cero cuando alcanza el infinito, $K_\infty = 0$. La energía mecánica del cohete es una constante, por lo tanto

$$U_e + K_e = U_\infty + K_\infty = 0$$

y

$$K_e = -U_e = \frac{Gm_e m}{R_e}$$

o sea

$$v^2 = \frac{2Gm_e}{R_e} = 2gR_e$$

Esto da $v = 11{,}2$ km/s, que es la misma con la que un meteorito entra en la atmósfera terrestre. Como ésta es también la velocidad mínima necesaria para escapar completamente de la Tierra, se le llama *velocidad de escape*. Es aproximadamente la velocidad que tiene una nave espacial cuando sale de la Tierra en un viaje a la Luna.

Diagrama de energía potencial

Un diagrama de energía potencial es un gráfico de la energía potencial de un objeto en función de su posición. La energía potencial de una masa de 1 kg en la superficie de la Tierra es

$$U = -\frac{Gm_e}{R_e} \times 1 \text{ kg}$$
$$= -gR_e \times 1 \text{ kg} = -6{,}3 \times 10^7 \text{ J}$$

y aumenta, es decir, se hace menos negativa, cuando la masa se aleja de la Tierra. La Fig. 5.13 es un gráfico de la energía potencial U de la masa en función de su distancia r al centro de la Tierra. Si la masa fuera proyectada hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una energía cinética de $5{,}0 \times 10^7$ J, su energía total sería $-1{,}3 \times 10^7$ J. Esta energía se representa por la línea horizontal ABC en el diagrama de energía potencial (Fig. 5.13). La masa parte del punto A, donde su energía potencial es $-6{,}3 \times 10^7$ J. Su energía cinética en este punto ($5{,}0 \times 10^7$ J) es igual a la diferencia entre la línea horizontal y la curva de energía potencial. Cuando la masa se aleja de la Tierra, su energía potencial aumenta y su energía cinética disminuye.

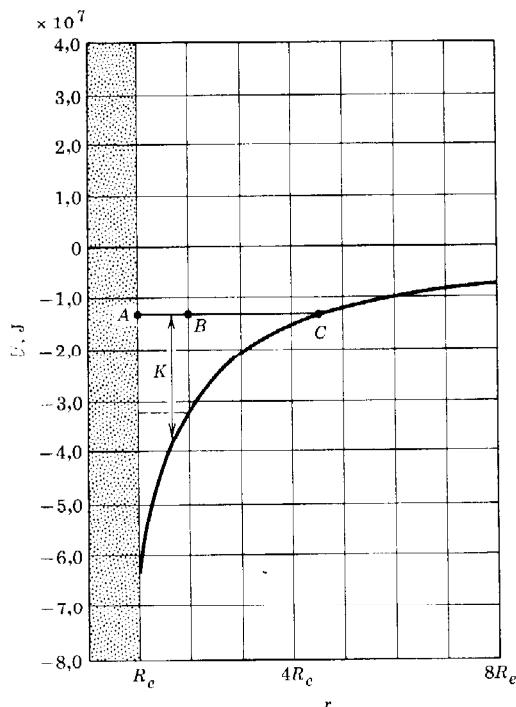


FIGURA 5.13
Gráfico de la energía potencial U de una masa de 1 kg en función de su distancia r al centro de la Tierra.

En el punto B, por ejemplo, a una distancia $2R_e$ del centro de la Tierra, su energía potencial es $-3{,}15 \times 10^7$ J, y su energía cinética es sólo $1{,}85 \times 10^7$ J. El objeto continúa alejándose en su movimiento hacia C, a unos $4{,}5R_e$ del centro de la Tierra, donde su energía potencial es igual a su energía mecánica total. En este punto, la energía cinética es cero. La masa está momentáneamente en reposo en C antes de volver a caer a la Tierra.

En este diagrama se ve claramente que a una masa de 1 kg situada sobre la superficie terrestre se le debe dar una energía cinética de $6{,}3 \times 10^7$ J por lo menos, para escapar completamente de la Tierra. Empleando el lenguaje de la química, podemos decir que una masa en reposo sobre la superficie terrestre está ligada a la Tierra con una energía de enlace de $6{,}3 \times 10^7$ J. Ésta es la energía mínima necesaria para disociar este sistema Tierra-masa. Si se proporciona toda esta energía, la energía mecánica de la masa estaría representada por una línea horizontal a lo largo del eje de energía cero. Entonces la masa podría desplazarse hasta el infinito antes de pararse, quedando así disociado el sistema.

Enlace molecular

El enlace de los átomos en una molécula es muy semejante a la ligadura de la masa a la Tierra. Los átomos de una molécula se atraen mutuamente por fuerzas electrostáticas que son parecidas en ciertos aspectos a la fuerza de la gravedad. Sin embargo, por el complejo

comportamiento mecánico-cuántico de los electrones en los átomos, las características de la fuerza y la correspondiente energía potencial se ven modificadas grandemente. Aunque no se puede dar ninguna fórmula simple para la energía potencial de un átomo en una molécula, se puede dibujar un diagrama del potencial semejante al de la Fig. 5.13. Por ejemplo, la Fig. 5.14 es un diagrama de la energía potencial U de un átomo de hidrógeno en función de su distancia r a un átomo de flúor. Obsérvese que cuando el átomo de hidrógeno se aproxima al átomo de flúor, la energía potencial aumenta bruscamente. Este rápido aumento de la energía potencial representa, en una escala atómica, la superficie del átomo de flúor. Cuando el átomo de hidrógeno se acerca mucho al átomo de flúor, experimenta una fuerza repulsiva que es el equivalente atómico de una fuerza de contacto.

Un átomo de hidrógeno con -4×10^{-19} J de energía mecánica se representa por la línea horizontal *ABC* de la Fig. 5.14 Este átomo está momentáneamente en reposo en el punto C (a $1{,}6 \times 10^{-10}$ m del centro del átomo de flúor), donde su energía cinética es cero. Sin embargo, es atraído por el átomo de flúor y comienza a desplazarse. En el punto B ($1{,}0 \times 10^{-10}$ m del centro del átomo de flúor) tiene una energía cinética de $5{,}6 \times 10^{-19}$ J. Cuando el átomo de hidrógeno se acerca aún más al átomo de flúor, empieza a tocar la superficie exterior de éste. Esta superficie ejerce una fuerza repulsiva sobre el átomo al que frena. En el punto A, la energía cinética del átomo de hidrógeno es de nuevo momentáneamente cero, pero como ahora está siendo repelido por el átomo de flúor, empieza a moverse de vuelta hacia el punto C. Así, el átomo de hidrógeno vibra con un movimiento

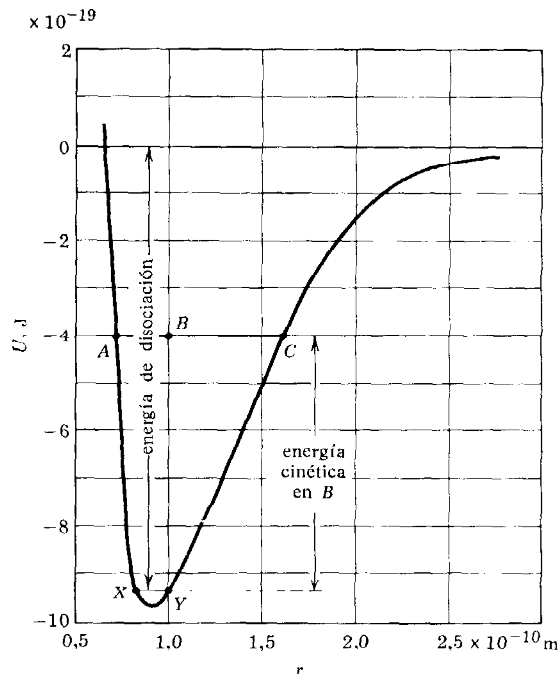


FIGURA 5.14
Gráfico de la energía potencial U de un átomo de hidrógeno en función de su distancia r a un átomo de flúor.

dentro-fuera muy parecido al movimiento adelante-atrás de un péndulo. Así es como está ligado un átomo de hidrógeno a un átomo de flúor en una molécula de ácido fluorhídrico.

El átomo de hidrógeno puede tener varias energías negativas diferentes y estar todavía ligado al flúor. Sin embargo, en su estado normal, el átomo de hidrógeno está casi en reposo. Tiene una energía de unos $-9{,}5 \times 10^{-19}$ J y vibra muy ligeramente entre los puntos X e Y de la Fig. 5.14. Para disociar una molécula en este estado, el átomo de hidrógeno ha de conseguir energía suficiente que le permita separarse completamente del átomo de flúor. A partir del diagrama de energía potencial queda claro que el átomo de hidrógeno debe tener por lo menos energía cero para separarse, de modo que se ha de suministrar por lo menos $9{,}5 \times 10^{-19}$ J para disociar la molécula. Del mismo modo, si un átomo de hidrógeno libre es capturado por un átomo de flúor, se liberaría toda esta energía. Los químicos dan normalmente la energía de formación de un mol ($6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas). En este caso la energía de formación de un mol de ácido fluorhídrico es

$$(6{,}02 \times 10^{23})(9{,}5 \times 10^{-19})\ \mathrm{J} = 5{,}7 \times 10^{5}\ \mathrm{J}$$

Ésta es también la «fuerza» del enlace químico entre el hidrógeno y el flúor.

5.4. ENERGÍA POTENCIAL DEL OSCILADOR ARMÓNICO

En el ejemplo 7 del Apart. 4.5 se demostró que un objeto de masa m que describe un movimiento armónico simple con período τ está sometido a la fuerza

$$F = -m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 x \qquad 5.19$$

donde x es el desplazamiento del objeto a partir de su posición de equilibrio. Inversamente, puede demostrarse que un objeto sometido a *la fuerza del oscilador armónico*

$$F = -kx \qquad 5.20$$

describirá un movimiento armónico simple cuando se desplace del equilibrio. En la naturaleza se encuentran muy frecuentemente fuerzas de este tipo, donde k es una constante característica de la fuerza de que se trate.

Por ejemplo, la fuerza ejercida por un muelle sobre un objeto tiene la forma de la Ec. 5.20, donde k es la constante del muelle (Apart. 2.2). Cuando una masa m se cuelga de un muelle, éste se alarga una distancia

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

para sostener el peso mg. Si entonces la masa se desplaza de su posición de equilibrio x_0, describirá un movimiento armónico simple alrededor de x_0. El efecto de la gravedad consiste únicamente en cambiar la posición de equilibrio de la masa.

Las Ecs. 5.19 y 5.20 son dos expresiones de la misma fuerza. Cuando las igualamos, obtenemos

$$-kx = -m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 x \qquad \text{o} \qquad \tau^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{k}$$

y

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5.21}$$

Esta ecuación expresa el período τ de la oscilación en función de la masa m y de la constante de la fuerza k.

Ejemplo 1. Cuando una masa de 0,2 kg se suspende de un muelle, éste se alarga 5 cm. La masa se desplaza entonces 2 cm de su posición de equilibrio, y se suelta de nuevo. ¿Cuáles son el período y la amplitud de la oscilación de la masa alrededor de su posición de equilibrio?

En su posición de equilibrio, la fuerza hacia abajo de la gravedad mg que actúa sobre la masa se contrarresta con la fuerza del muelle kx_0 hacia arriba

$$mg = kx_0$$

Por lo tanto, la constante del muelle es

$$k = \frac{mg}{x_0} = \frac{(0{,}2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{0{,}05\ \text{m}} = 39{,}2\ \text{N/m}$$

y por la Ec. 5.21 el período del movimiento armónico simple resultante es

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}2\ \text{kg}}{39{,}2\ \text{N/m}}} = 0{,}449\ \text{s}$$

La amplitud es igual al máximo desplazamiento de la masa a partir del equilibrio. Como ésta partió del reposo a 2 cm de distancia de su posición de equilibrio, la amplitud es $A = 0{,}02$ m.

La fuerza del oscilador armónico es conservativa, por lo cual existe una energía potencial del oscilador armónico, U, que da el trabajo realizado por la fuerza, de acuerdo con la Ec. 5.11. Para hallar U hemos de calcular el trabajo W_{0x} realizado por la fuerza al desplazar un objeto de 0 a x. Sin embargo, este trabajo no viene dado directamente por la Ec. 5.2 ya que F no es constante. La fuerza es nula en $x = 0$ y vale $-kx$ en x; por lo tanto, la fuerza media $\bar{F}$ entre 0 y x vale

$$\bar{F} = \tfrac{1}{2}[0 + (-kx)] = -\tfrac{1}{2}kx$$

Esta fuerza media puede utilizarse en la Ec. 5.2 para calcular el trabajo

$$W_{0x} = \bar{F}x = -\tfrac{1}{2}kx^2$$

Este trabajo se relaciona entonces con la energía potencial por

$$W_{0x} = U_0 - U_x$$

si tomamos

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad 5.22$$

Ésta es la energía potencial del oscilador armónico.
Por la Ec. 4.8, la energía cinética en el instante t de un objeto que realiza un movimiento armónico simple con amplitud A es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{\tau}A\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

Pero por la Ec. 5.21 tenemos

$$\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

y por lo tanto $K = \tfrac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$

Por las Ecs. 5.22 y 4.7, la energía potencial en el instante t es

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

Por lo tanto, la energía mecánica de un objeto que describe un movimiento armónico simple es

$$E_m = U + K = \tfrac{1}{2}kA^2\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right]$$

o bien $\quad E_m = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad 5.23$

donde hemos utilizado la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
La Ec. 5.23 muestra que mientras la energía cinética y la energía potencial varían con el tiempo, su suma permanece constante.
Ello se representa en la Fig. 5.15, que muestra la gráfica de la energía potencial del oscilador armónico en función de x. La línea horizontal representa la energía mecánica constante de un objeto que ejecuta un movimiento armónico simple con amplitud A. En cualquier punto a lo largo de esta línea, las energías potencial y cinética del objeto vienen dadas por los segmentos verticales U y K que van desde el eje x a la curva y desde la curva a la horizontal que habíamos trazado. Este diagrama muestra que en los desplazamientos máximos (A y $-A$) la energía cinética es nula y toda la energía mecánica se encuentra en la forma de energía potencial. En $x = 0$, la energía potencial es nula y toda la energía mecánica se halla en la forma de energía cinética. En las posiciones intermedias, la energía mecánica es una mezcla de energía cinética y potencial.

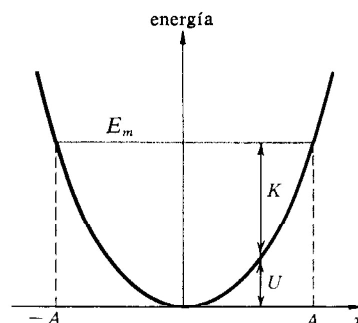


FIGURA 5.15
La energía potencial del oscilador armónico representada en función del desplazamiento x a partir del equilibrio.
La energía cinética K y la energía potencial U del objeto cambian durante el movimiento del objeto, de tal manera que la energía mecánica $E_m = K + U$ permanece constante.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la energía mecánica del movimiento armónico simple descrito en el ejemplo 1?
En el ejemplo 1 se encuentra que $k = 39{,}2$ N/m y $A = 0{,}02$ m; por lo tanto, obtenemos a partir de la Ec. 5.23

$$E_m = ½\, kA^2 = ½\, (39{,}2 \text{ N/m})(0{,}02 \text{ m})^2 = 7{,}84 \times 10^{-3} \text{ J}$$

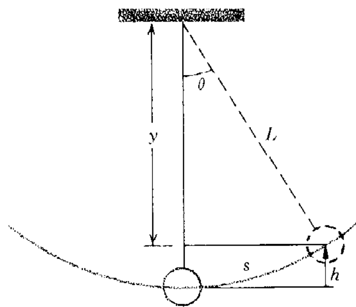


FIGURA 5.16
Un péndulo simple. La altura h de la masa es $h = L - L$ sen θ donde L es la longitud del péndulo y θ el desplazamiento angular.

El movimiento armónico simple es importante porque lo presentan muchos sistemas mecánicos, al menos de un modo aproximado. Por ejemplo, consideremos un péndulo simple, que es simplemente una masa m colgada de una cuerda de longitud L (Fig. 5.16). Cuando la masa se empuja a un lado y se suelta, oscila en un arco alrededor de la posición más baja (la posición de equilibrio).
En la Fig. 5.16 observamos que la energía potencial gravitatoria de la masa cuando se desplaza del equilibrio es

$$U = mgh = mg(L - y)$$

Pero como y es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa L,

$$y = L \cos \theta \qquad \text{y} \qquad U = mg(L - L \cos \theta)$$

Entonces, por la identidad trigonométrica $1 - \cos \theta = 2 \, \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$ obtenemos

$$U = mgL(1 - \cos \theta) = 2mgL \, \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

que no se parece en nada a la energía potencial del oscilador armónico. Sin embargo, si el desplazamiento a partir del equilibrio es pequeño, es decir, si θ es pequeño, podemos utilizar la aproximación de pequeños ángulos (Apéndice III), para escribir sen ½ θ = ½ θ, por lo que

$$U = 2mgL(\tfrac{1}{2}\theta)^2 = \tfrac{1}{2}mgL\theta^2$$

donde θ se expresa en radianes. Como la longitud del arco es $s = \theta L$, obtenemos finalmente

$$U = \frac{1}{2}\frac{mg}{L}s^2$$

que es idéntica a la energía potencial del oscilador armónico (Ec. 5.22) con $k = mg/L$ y x reemplazada por s. Por consiguiente, por la Ec. 5.21, el período del péndulo es

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad 5.24$$

suponiendo que el desplazamiento angular es lo suficientemente pequeño como para justificar la aproximación de pequeños ángulos.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la longitud de un péndulo de período 1 s?
A partir de la Ec. 5.24 tenemos

$$\tau^2 = (2\pi)^2 \frac{L}{g}$$

o bien

$$L = \frac{g\tau^2}{(2\,\pi)^2} = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s})^2}{(6{,}28)^2} = 0{,}248 \text{ m}$$

OBSERVACIÓN. El péndulo se ha utilizado durante siglos como mecanismo básico de medición de tiempo en los relojes ya que su período es independiente de su amplitud, en tanto que ésta sea pequeña. La tecnología moderna ha reemplazado el péndulo por osciladores atómicos y cristalinos, de mucha mayor precisión.

Velocidad de los animales al andar

El análisis de la velocidad de los animales que hemos llevado a cabo en el Apart. 5.1 demuestra que los animales de forma semejante corren a la misma velocidad sin que intervenga en ello su tamaño. Demostraremos a continuación que para la velocidad al andar rige una ley de escala completamente diferente.

La velocidad en la carrera está limitada por el trabajo que ha de hacerse par acelerar las piernas. Al andar, sin embargo, cada vez que una pierna se levanta por encima del suelo, puede balancearse libremente hacia adelante. Así, el tiempo t que tarda en completar una oscilación es proporcional al período de un péndulo de longitud L igual a la de la pierna, y el número n de oscilaciones por minuto es proporcional a $1/t$, por lo cual

$$n \propto \frac{1}{t} \propto \frac{1}{2\pi\sqrt{L/g}} \propto \frac{1}{\sqrt{L}}$$

Es decir, el número de pasos por minuto disminuye en razón inversa a la raíz cuadrada del tamaño del animal.

Sin embargo, la velocidad al andar es proporcional al producto del número de pasos por minuto n por la distancia que se avanza en cada paso. Para animales de forma semejante, la longitud de un paso es proporcional a la longitud de la pierna, por lo que

$$v \propto nL \propto \frac{L}{\sqrt{L}} = \sqrt{L}$$

Es decir, la velocidad al andar aumenta con la raíz cuadrada del tamaño del animal: los animales mayores andan más aprisa que los menores, a pesar de que den menos pasos por minuto.

Recuérdese esta observación la próxima vez que se vea una persona paseando un perrito.

5.5. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Una energía potencial sólo existe para fuerzas conservativas. Si sobre un sistema actúan tanto fuerzas conservativas como no conservativas, la energía mecánica total no se conserva. Para analizar esta situación, escribimos el trabajo total W hecho sobre el sistema como la suma del trabajo W_c hecho por las fuerzas conservativas y el trabajo W_{nc} hecho por las fuerzas no conservativas. Entonces, por el teorema trabajo-energía (Ec. 5.3) tenemos

$$W = W_c + W_{nc} = K_B - K_A = \Delta K \qquad 5.25$$

donde, tal como en el Apart. 4.1, Δ significa «incremento de». En lo que sigue, es importante comprender que, por definición, Δ *siempre significa el valor final de una magnitud menos su valor inicial.*
Según la Ec. 5.11 el trabajo conservativo W_c es

$$W_c = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

cuyo signo menos proviene de la definición de Δ. Si sobre el sistema actúan dos o más fuerzas conservativas, U es la suma de todas sus energías potenciales. Cuando esta última ecuación se introduce en la Ec. 5.25, obtenemos

$$-\Delta U + W_{nc} = \Delta K$$

o bien

$$W_{nc} = \Delta K + \Delta U \qquad 5.26$$

Es decir, el cambio en las energías cinética más potencial es igual al trabajo no conservativo total hecho sobre el sistema.
Es útil proceder a la clasificación de las fuerzas no conservativas en fuerzas disipativas y fuerzas aplicadas, de modo que la Ec. 5.26 puede escribirse

$$W_{nc} = W_d + W_a = \Delta K + \Delta U \qquad 5.27$$

donde W_d es el trabajo hecho por las fuerzas disipativas y W_a el realizado por las fuerzas aplicadas.
Definición. Las *fuerzas disipativas* son fuerzas no conservativas, como el rozamiento y la resistencia del aire, que generalmente hacen un trabajo negativo. Se ha establecido a partir de los experimentos de muchos científicos que siempre que se hace un trabajo disipativo W_d sobre un sistema, hay un aumento en la *energía interna* I del sistema igual a $-W_d$; es decir

$$-W_d = \Delta I \qquad 5.28$$

Como W_d es negativo, I es positivo. La Ec. 5.28, como veremos, es una de las bases de la ley de la conservación de la energía.
Definición. *Energía interna* es la energía cinética y potencial asociadas con las distintas partes del sistema en vez de con el sistema como un todo. Por ejemplo, cuando un bloque resbala sobre una superficie, el trabajo negativo hecho por el rozamiento aumenta la energía de los átomos en el bloque y en la superficie, haciendo que aumente la temperatura del bloque y de la superficie. Cuando una pelota baja por un plano inclinado, el trabajo negativo del rozamiento aumenta la energía rotacional de la pelota. Esta energía rotacional es también una forma de energía interna, ya que está asociada al movimiento de la pelota alrededor de su propio centro de gravedad. La energía cinética que interviene en la Ec. 5.25 es solamente la energía del movimiento del centro de gravedad.
Cuando se combinan las Ecs. 5.27 y 5.28, se obtiene

$$W_a = \Delta K + \Delta U - W_d = \Delta K + \Delta U + \Delta I = \Delta(K + U + I)$$

o bien

$$W_a = \Delta E \qquad 5.29$$

donde $E = K + U + I$ es la energía total (mecánica más interna) del sistema. Cuando no actúan fuerzas aplicadas sobre el sistema, ΔE es cero, lo que significa que la energía total del sistema se conserva.

Ejemplo 1. Una bala de 0,02 kg con una velocidad inicial de 900 m/s se incrusta en un bloque de madera. ¿Cuál es el incremento de energía interna resultante en el sistema bala-bloque?
En este caso no hay fuerzas aplicadas, por lo cual $\Delta E = 0$, o

$$\Delta I = -(\Delta K + \Delta U)$$

El cambio de energía cinética de la bala es

$$\Delta K = K_B - K_A = 0 - \tfrac{1}{2}mv_A^2$$
$$= -\tfrac{1}{2}(0{,}02 \text{ kg})(900 \text{ m/s})^2 = -8100 \text{ J}$$

y el cambio de energía potencial es nulo, de modo que

$$\Delta I = 8100 \text{ J}$$

Toda la energía cinética de la bala se convierte en energía interna del sistema bala-bloque. Este incremento de energía interna se manifiesta por un aumento de temperatura, que se discute con más detalle en el capítulo 11.

El trabajo aplicado W_a se lleva a cabo mediante dispositivos llamados *máquinas* que convierten energía interna en trabajo. Ejemplos corrientes de máquinas son los motores de automóvil, las máquinas de vapor y los músculos animales. Los detalles del funcionamiento de una máquina no nos conciernen aquí, sino sólo el principio general que se resume en la ecuación

$$-\Delta I_{\text{maq}} = W_a = \Delta I_{\text{ma}} \qquad 5.30$$

donde ΔI_{maq} es el cambio de energía cinética de la máquina o, para ser más precisos, del combustible de la máquina, y ΔI_{ma} es el cambio de energía interna del medio ambiente. La cantidad ΔI_{maq} es negativa porque el combustible tiene menos energía interna después de ser quemado que antes de su combustión; por consiguiente $-\Delta I_{\text{maq}}$ es una cantidad positiva. La Ec. 5.30 establece, por lo tanto, que para una determinada cantidad de energía interna liberada en la combustión del combustible, se genera una cierta cantidad de trabajo aplicado W_a y la diferencia ΔI_{ma} se pierde aumentando la energía interna del medio ambiente.
La Ec. 5.30 es una consecuencia directa de la siguiente ley fundamental de la física:
Conservación de la energía. *La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma.* Por consiguiente, en un sistema cerrado, en el cual la energía no puede entrar ni salir, *la energía total es constante.*
Para ver cómo se aplica esta ley a la Ec. 5.30, utilizamos la Ec. 5.29 para reemplazar W_a por el cambio de energía ΔE del sistema sobre el que actúa la máquina

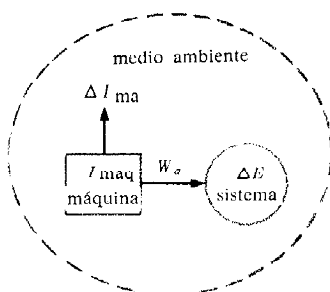


FIGURA 5.17
Relación entre los cambios de energía de una máquina, el sistema sobre el que ésta actúa y el medio ambiente.

$$-\Delta I_{maq} = \Delta E + \Delta I_{ma} \qquad \text{o} \qquad \Delta E + \Delta I_{maq} + \Delta I_{ma} = 0$$

Ello establece que la energía total del medio ambiente, la máquina y el sistema sobre el que la máquina produce trabajo se conserva. La Fig. 5.17 muestra esquemáticamente que los sistemas componentes tomados en su conjunto forman un solo sistema cerrado en el cual ninguna de las energías se destruye, sino sólo se transforman de un componente al otro. El trabajo aplicado W_a es la manera mediante la cual la energía se transfiere de la máquina al sistema.

El *rendimiento e* de una máquina es la razón del trabajo aplicado que se produce a la energía interna utilizada para producirlo

$$e = \frac{W_a}{-\Delta I_{maq}} \tag{5.31}$$

El rendimiento se escribe a menudo como un tanto por ciento. Para máquinas que utilizan energía química, como por ejemplo los motores de gasolina y los músculos animales, el rendimiento es sólo de un 25 %, aproximadamente; es decir, por cada 100 J de energía interna que se consumen, sólo se producen 25 J de trabajo aplicado. Los 75 J restantes se liberan al medio ambiente en forma de calor. La adecuada eliminación de este calor perdido es un problema de toda máquina, sea una central eléctrica o un atleta.

Ejemplo 2. Un ciclista tiene una velocidad de 15 m/s al pie de una colina y una velocidad de 10 m/s al alcanzar la cumbre de la colina. La masa total del ciclista y la bicicleta es de 65 kg, y la altura vertical de la colina es de 25 m. ¿Cuál es el trabajo aplicado mínimo hecho por el ciclista para subir la colina? Si el rendimiento de los músculos del ciclista es de 0,22, ¿cuál es la energía mínima consumida?

Los cambios de energía cinética y potencial son

$$\Delta U = mgh - 0 - (65\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(25\ \text{m}) = 1{,}59 \times 10^4\ \text{J}$$

$$\Delta K = \frac{\ }{2} m v_A^2 - \frac{\ }{2} m v_B^2$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}(65\ \text{kg})(10\ \text{m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(65\ \text{kg})(15\ \text{m/s})^2 = -0{,}41 \times 10^4\ \text{J}$$

y, por lo tanto, a partir de la Ec. 5.29

$$W_a = \Delta K + \Delta U + \Delta I = 1{,}18 \times 10^4\ \text{J} + \Delta I$$

Aquí ΔI es el aumento de energía interna de la bicicleta y el medio debido al rozamiento. El mínimo valor de W_a es, por lo tanto, $1{,}18 \times 10^4$ J, que es el trabajo que se necesitaría en ausencia de rozamiento. Con un rendimiento de 0,22, la energía mínima necesaria para producir este trabajo es

$$-\Delta I_{maq} = \frac{W_a}{e} = \frac{1{,}18 \times 10^4\ \text{J}}{0{,}22} = 5{,}36 \times 10^4\ \text{J}$$

Como en la práctica W_a tendría que ser mayor que este valor mínimo a causa del rozamiento, la energía necesaria sería también mayor.

A excepción de la energía nuclear, todas las principales fuentes de energía usadas en la Tierra provienen del Sol. El Sol proporciona energía en forma de luz que las plantas pueden convertir en energía química por fotosíntesis. Toda la cadena de alimentación está basada en este proceso, puesto que todos los animales obtienen su energía comiendo plantas u otros animales que comen plantas. La energía potencial del agua en la central hidroeléctrica viene de la energía del Sol (en forma de calor), que hace elevarse el agua de los océanos (por evaporación) y la deposita sobre la tierra (lluvia). Incluso nuestros combustibles fósiles, carbón y petróleo, obtienen su energía del Sol, que fue el que hizo crecer los bosques prehistóricos de los cuales se formaron estos combustibles.

La energía del Sol procede de las reacciones nucleares de su interior. El Sol no es una máquina de movimiento continuo, ya que gradualmente está cambiando su composición cuando convierte su hidrógeno en helio (Apart. 21.3). Con el tiempo agotará su reserva de energía y se consumirá, lo mismo que las demás estrellas del universo. Afortunadamente, el Sol todavía tiene unos cuantos miles de millones de años más de existencia.

5.6. POTENCIA Y VELOCIDAD METABÓLICA

La *potencia* P de una máquina es la velocidad a que ésta produce trabajo. Así, si una máquina produce una cantidad de trabajo W en el tiempo t, su potencia es

$$P = \frac{W}{t} \qquad 5.32$$

Por ejemplo, la potencia de una máquina que produce 75 J de trabajo en 3 s es

$$P = \frac{75\ \text{J}}{3\ \text{s}} = 25\ \text{J/s}$$

Las unidades de potencia son joules por segundo, o watts (W):

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}$$

Un kilowatt (kW) son 10^3 watts.

La velocidad total R de utilización de la energía por parte de una máquina es

$$R = \frac{-\Delta I_{maq}}{t} \qquad 5.33$$

que, por las Ec. 5.31 y 5.32, puede escribirse como

$$R = \frac{W/e}{t} = \frac{P}{e} \qquad 5.34$$

En los animales, la velocidad de utilización de la energía se denomina *velocidad metabólica.*

Un hombre de 70 kg (154 lb) consume normalmente unos 10^7 J por día, cantidad ésta que depende de su actividad física, es decir, de la

cantidad de trabajo (en el sentido técnico) que hace. Su velocidad metabólica media es

$$R = \frac{10^7 \text{ J}}{(24 \text{ h})(3600 \text{ s/h})} = 121 \text{ W}$$

La velocidad metabólica decrece hasta 75 W durante el sueño y se eleva hasta 230 W cuando se anda.

La velocidad metabólica de una persona ocupada en una determinada actividad se mide recogiendo todo el aire que exhala durante 5 min, aproximadamente. El contenido de oxígeno de este aire se analiza entonces para determinar la cantidad de oxígeno consumido por minuto. El oxígeno consumido reacciona con hidratos de carbono, grasas y proteínas del cuerpo, liberando una media de $2{,}0 \times 10^4$ J de energía por cada litro de oxígeno consumido, aproximadamente. Así, si una persona consume 1,45 litros de oxígeno por minuto durante un rápido pedaleo, su velocidad metabólica es

$$(1{,}45 \text{ l/min})(2{,}0 \times 10^4 \text{ J/l}) = 2{,}90 \times 10^4 \text{ J/min} = 483 \text{ J/s} = 483 \text{ W}$$

Velocidad metabólica en la carrera

Es interesante intentar calcular la velocidad metabólica para una actividad determinada, como el correr. En el Apart. 5.1 se demostró que la mayor parte del trabajo efectuado al correr es la aceleración y deceleración de las piernas a cada paso. Cuando una pierna se levanta del suelo, se lleva desde el reposo hasta una velocidad v aproximdamente igual a la velocidad del cuerpo (Fig. 5.18). En este proceso, los músculos de la pierna efectúan un trabajo igual al cambio de energía cinética de la pierna, es decir, igual a $\frac{1}{2}mv^2$, donde m es la masa de la pierna. Así, cuando la pierna se detiene de nuevo, los músculos antagonistas también hacen un trabajo igual a $\frac{1}{2}mv^2$. A cada paso, por lo tanto, los músculos de las piernas hacen un trabajo aproximadamente igual a mv^2.

Consideremos un hombre de 70 kg de peso que corre a 3 m/s (9 mi/h, aproximadamente). Cada una de sus piernas pesa unos 10 kg, por lo que el trabajo efectuado sobre una pierna a cada paso es

$$W = mv^2 = (10 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 90 \text{ J}$$



FIGURA 5.18
Al correr, se hace trabajo para acelerar la pierna desde el reposo hasta una velocidad comparable a la del cuerpo. *(Por cortesía de Barry D. Wilson, Biomechanics Laboratory, Department of Physical Education, University of Iowa.)*

Supongamos que la longitud de su paso —la distancia entre dos huellas sucesivas del mismo pie— es de 2 m. Entonces el hombre da 1,5 pasos por segundo con cada pierna, de modo que la potencia que actúa sobre sus dos piernas es

$$P = (2)(90 \text{ J/paso})(1{,}15 \text{ pasos/s}) = 270 \text{ W}$$

Como el rendimiento del músculo es sólo 0,25, la velocidad de consumo de la energía es

$$R = \frac{P}{e} = \frac{270 \text{ W}}{0{,}25} = 1080 \text{ W}$$

que se aproxima al valor medido de 1000 W.

Ley de escala para la velocidad metabólica.

Se encuentra que la velocidad metabólica máxima de animales semejantes es proporcional a su superficie total, por lo cual la velocidad metabólica varía como L^2. Así, un animal L veces mayor que otro puede gastar energía a L^2 veces la velocidad del animal menor. Por consiguiente, la potencia máxima alcanzada por el animal mayor es L^2 veces la del animal menor, ya que la potencia es precisamente un múltiplo (el rendimiento e) de la velocidad metabólica. Éste es un resultado inesperado. En el Apart. 5.1 habíamos hallado que el trabajo realizado por un músculo varía como L^3. ¿Por qué la potencia varía como L^2?

Una razón es que mientras el trabajo realizado por un músculo varía como L^3, la velocidad v a que se mueve un miembro es independiente de L (Apart. 5.1). De ello resulta que el tiempo $t = L/v$ que tarda el miembro en moverse varía como L y, como la potencia es trabajo dividido por tiempo, la potencia varía como L^2. Otra razón es que la energía consumida por el cuerpo se convierte en último término en energía interna, que ha de eliminarse del cuerpo. Como esta energía escapa a través de la superficie del cuerpo, la velocidad máxima de pérdida de energía varía como L^2. La velocidad metabólica máxima no puede ser mayor que la velocidad máxima de pérdida de energía, y por lo tanto ha de variar también como L^2.

El modo en que varía el ritmo del corazón con el tamaño también puede deducirse de la ley de escala de la velocidad metabólica. Como el oxígeno necesario para el metabolismo es proporcionado por la sangre, la velocidad metabólica es proporcional al volumen de sangre bombeado por segundo por el corazón. Éste es proporcional al volumen V del corazón multiplicado por el ritmo del corazón r (el número de pulsaciones por segundo). Tenemos entonces que

$$R \propto Vr$$

de modo que r varía como R/V. Como R varía como L^2 y V varía como L^3, r varía como $L^2/L^3 = L^{-1}$. Así, el corazón de un animal mayor late más lentamente que el corazón de un animal pequeño. Por ejemplo, el factor de escala L de los seres humanos con relación al mono rhesus es alrededor de 2,5. Por consiguiente, el ritmo del corazón hu-

mano debería ser aproximadamente $1/2{,}5 = 0{,}4$ veces el ritmo del corazón del mono, lo cual es próximo al valor medido de 0,5.
De modo semejante podemos deducir la ley de escala para el tiempo de inmersión de los mamíferos marinos. La energía total consumida por un mamífero marino durante una inmersión es igual a su velocidad metabólica multiplicada por la duración t de la inmersión. Esta energía es proporcional a la cantidad de oxígeno almacenado en los pulmones y la sangre del mamífero al inicio de la inmersión.

$$\text{volumen de oxígeno almacenado} \propto \text{energía consumida} = Rt$$

Como el volumen de oxígeno varía como L^3 y R varía como L^2, la duración t varía como L. Un mamífero grande puede permanecer más tiempo bajo el agua que un animal pequeño.

PROBLEMAS

1. Una fuerza horizontal de 24 N arrastra una masa de 4 kg una distancia de 3 m sobre una superficie horizontal sin rozamiento. ¿Cuál es el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre la masa? *Resp.* 0, 0, 72 J.
2. Repetir el Prob. 1 cuando el coeficiente de rozamiento cinético entre la masa y la superficie horizontal es 0,45.
3. Una chica arrastra un trineo de 30 kg con una fuerza de 60 N que forma con la horizontal un ángulo de 40° (Fig. 5.19). ¿Cuál es el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el trineo para desplazarlo 15 m sobre una superficie horizontal sin rozamiento? *Resp.* 0, 0, 689,4 J.
4. Repetir el Prob. 3 cuando el coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y la nieve es 0,1. (*Sugerencia:* La fuerza de contacto no es igual a mg en este caso.)
5. Calcular el trabajo total realizado sobre un esquiador de 75 kg que desciende 40 m por una pendiente de 15° sin rozamiento. *Resp.* $7{,}61 \times 10^3$ J.
6. Repetir el Prob. 5 cuando el coeficiente de rozamiento cinético entre el esquiador y la nieve es 0,08.
7. Una fuerza total de 100 N actúa sobre una masa de 25 kg. (*a*) Si la masa parte del reposo, ¿cuál es su energía cinética tras haberse desplazado 5 m? (*b*) ¿Cuál es su velocidad tras haber avanzado 5 m? *Resp.* (*a*) 500 J; (*b*) 6,32 m/s.
8. Una fuerza horizontal de 180 N actúa sobre una masa de 30 kg en su sentido de movimiento. Si su velocidad inicial es 5 m/s, ¿cuál es su velocidad después de desplazarse 25 m?
9. Se frena de repente un coche de 1000 kg que va a 25 m/s. Las ruedas quedan bloqueadas y el coche patina 62 m antes de pararse. (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que actúa sobre el coche? (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético μ_k

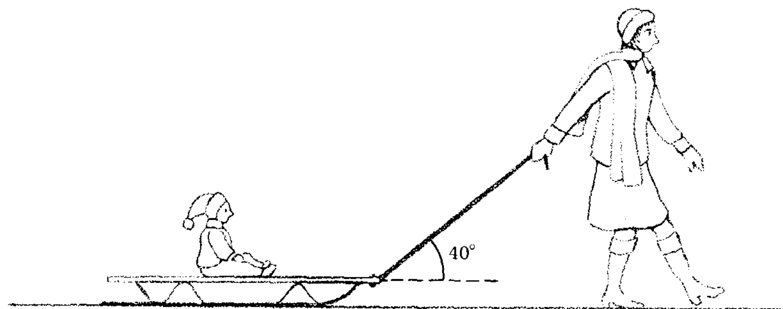


FIGURA 5.19
Problemas 3 y 4.

entre los neumáticos y la carretera?

Resp. (*a*) 5040 N; (*b*) 0,514.

10. Demostrar que cuando se frena bruscamente un automóvil que se mueve a una velocidad v, la distancia mínima de frenado es $d = v^2/2\mu_k g$, donde μ_k es el coeficiente de rozamiento cinético entre los neumáticos y la carretera.

11. La estrella más cercana está a unos 4×10^{16} m (4 años luz) de la Tierra. (*a*) ¿Qué velocidad necesitaría un cohete para llegar a la estrella en 40 años? (*b*) ¿Cuánta energía se necesita para acelerar a esta velocidad una nave espacial de 3×10^5 kg? *Resp.* (*a*) $3{,}2 \times 10^7$ m/s; (*b*) $2{,}53 \times 10^{20}$ J.

OBSERVACIÓN. La energía que se necesita para mandar una nave espacial a una estrella en un tiempo razonable es muchas veces el total de energía anual consumida en los Estados Unidos.

12. En el juego del tejo se usa un palo largo para empujar un trozo de madera de 0,3 kg para que empiece a moverse por el suelo. (Fig. 5.20.) Un jugador empuja hacia abajo con una fuerza de 20 N a lo largo del palo,

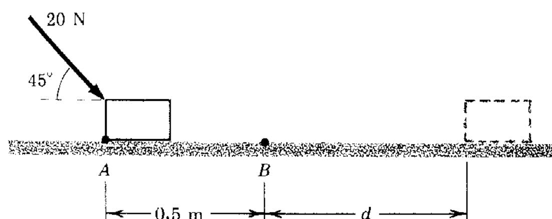


FIGURA 5.20. Problema 12

inclinado 45° con respecto al suelo. (*a*) ¿Cuánto trabajo realiza el palo sobre el trozo de madera cuando le empuja desde el punto *A* al *B* separados una distancia de 0,5 m? (*b*) Si el trozo de madera está en reposo en *A*, ¿cuál es su velocidad en *B*? (despréciese el rozamiento). (*c*) Desde el punto *B*, donde el palo deja de empujar, el trozo se desliza una distancia *d* antes de pararse. Si la fuerza de rozamiento es de 1 N de B en adelante, ¿cuánto vale *d*?

13. Formando un ángulo de 35° con la horizontal se aplica una fuerza de 10 N al bloque de 5 kg de la Fig. 5.21. Además hay una fuerza de rozamiento de 7 N que actúa sobre el bloque. (*a*) Averiguar el trabajo realizado por cada una de las cuatro fuerzas que actúan sobre el bloque al desplazarlo 12 m. (*b*) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el bloque? (*c*) Si el blo-

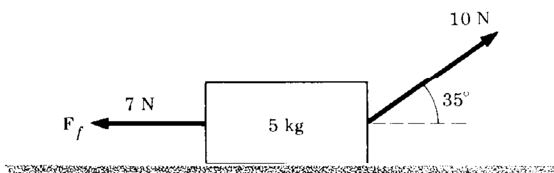


FIGURA 5.21. Problemas 13 y 14.

que parte del reposo, ¿cuál es su velocidad después de recorrer los 12 m?

Resp. (*b*) 14,3 J; (*c*) 2,39 m/s.

14. Repetir el problema anterior cuando el bloque parte con una velocidad de 3 m/s.

15. Una bala de masa 5×10^{-3} kg se mueve horizontalmente con una velocidad de 400 m/s. (Despréciese la gravedad en este problema.) (*a*) ¿Cuál es la energía cinética de la bala? (*b*) La bala atraviesa un trozo de madera de 5 cm de espesor y sale con una velocidad de 200 m/s. ¿Cuál es el trabajo realizado por la madera sobre la bala? (*c*) ¿Cuál es la fuerza ejercida por la madera sobre la bala?

Resp. (*a*) 400 J; (*b*) —300 J; (*c*) 6000 N.

16. Un disco de hockey sobre hielo de 0,2 kg recibe una velocidad inicial de 12 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el disco y el hielo es 0,1, ¿cuál es la velocidad del disco después de recorrer 15 m?

17. Un coche de 1000 kg que va a 25 m/s choca con un muro de ladrillos. El coche recorre 0,5 m antes de pararse. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el muro sobre el coche durante la colisión? *Resp.* $6{,}25 \times 10^5$ N.

18. ¿Cómo depende del tamaño el trabajo máximo realizado por animales de forma semejante?

19. Un bloque de 6 kg, que parte del reposo, se desliza 4 m por el plano inclinado de la Fig. 5.22. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial del bloque (con respecto a la parte inferior del plano inclinado) cuando está en la parte superior? (*b*) Si el plano inclinado carece de rozamiento, ¿cuál es la velocidad del bloque cuando alcanza la parte inferior del plano inclinado? (*c*) Si hay

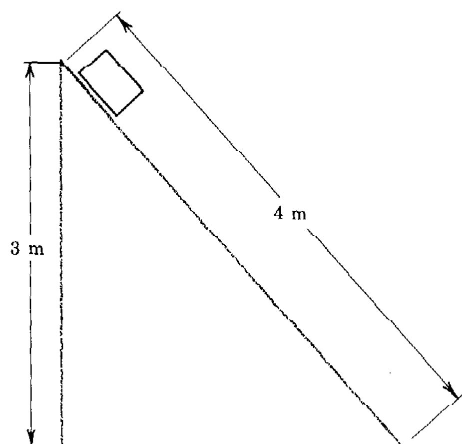


FIGURA 5.21. Problema 19.

una fuerza de rozamiento constante de 8 N sobre el bloque mientras se desliza por el plano inclinado, ¿cuál es su velocidad en la parte inferior?
Resp. (*a*) 176 J; (*b*) 7,66 m/s; (*c*) 6,93 m/s.

20. Un esquiador de 100 kg que va esquiando por terreno llano a una velocidad de 7 m/s, llega a una colina (Fig. 5.23). (*a*) Si el esquiador se desliza colina arriba, ¿cuál es su velocidad en el punto *B*, suponiendo que la cuesta no ejerce rozamiento sobre los esquís? (*b*) ¿Cuál es su velocidad en

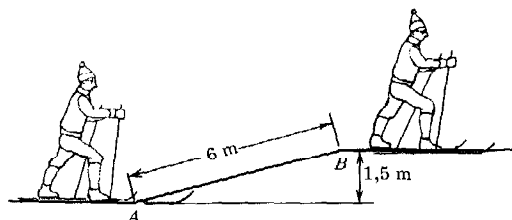


FIGURA 5.22. Problema 12.

el punto *B*, suponiendo que la cuesta ejerce una fuerza constante de rozamiento de 75 N sobre los esquís?

21. En una piscina, un hombre corre por el trampolín y salta de él hacia arriba. Su velocidad cuando sale del trampolín es de 3 m/s y el trampolín está a 5 m sobre la superficie de la piscina. ¿Cuál es su velocidad al tocar el agua?
Resp. 10,3 m/s.

22. Demostrar que la altura vertical *h* que pueden saltar animales semejantes es independiente de su tamaño.
(*Sugerencia:* La altura depende del trabajo realizado por los músculos de las patas de los animales, que a su vez depende de la fuerza ejercida por los músculos y la distancia que se contraen.)

23. Una muchacha lanza una pelota de 0,2 kg a una altura de 6 m. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota cuando sale de la mano de la chica? (*b*) ¿Qué trabajo realiza la chica al lanzar la pelota? (*c*) Si el músculo del brazo de la chica se contrajo una distancia de 0,05 m mientras lanzaba la pelota, ¿cuál fue la fuerza media ejercida por el músculo?
Resp. (*a*) 11,8 J; (*b*) 11,8 J; (*c*) 236 N.

24. Una bala de 7 g disparada verticalmente al aire con una velocidad inicial de 200 m/s, alcanza una altura de 900 m. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento media sobre la bala?
Resp. 0,087 N.

25. ¿Cuál es la fuerza de la gravedad sobre un astronauta de 80 kg cuando está (*a*) en la superficie de la Tierra, (*b*) en órbita a 200 km sobre la superficie de la Tierra, (*c*) a medio camino de la Luna, o sea a una distancia de $1,9 \times 10^5$ km del centro de la Tierra?
Resp. (*a*) 784 N; (*b*) 738 N; (*c*) 0,89 N.

26. ¿A qué distancia del centro de la Tierra la fuerza de la gravedad vale una centésima parte de su valor en la superficie de la Tierra?

27. La masa de la luna es $7,40 \times 10^{22}$ kg, y su radio es $1,74 \times 10^6$ m. (*a*) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad *g* en la Luna? (*b*) ¿Cuál es la fuerza de la gravedad en un astronauta de 80 kg en la Luna? (*c*) ¿Con qué velocidad tiene que ser lanzado un cohete desde la superficie de la Luna para escapar completamente de su atracción?
Resp. (*a*) 1,63 m/s^2; (*b*) 130 N; (*c*) 2,4 km/s.

28. ¿A qué velocidad hay que lanzar un cohete desde la superficie de la Tierra para que tenga una velocidad de 5 km/s cuando esté infinitamente alejado de la Tierra?

29. La masa del Sol es 2×10^{30} kg, y está a $1,5 \times 10^{11}$ m de la Tierra. (*a*) Hallar la energía potencial de gravitación de la Tierra debida a la fuerza gravitacional del Sol.

(*b*) ¿Qué velocidad necesitaría la Tierra para escapar por completo del Sol?
Resp. (*a*) —5,3 × 10^{33} J; (*b*) 42 km/s.

30. Calcular la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol. (*Sugerencia:* Combinar las Ecs 4.14 y 5.16 y utilizar los datos del problema 29.)

31. Un cohete de 100 kg de masa es lanzado verticalmente desde la Tierra con una velocidad inicial de 9000 m/s. (*a*) Usando la Ec. 5.12, calcular la altura que alcanza el cohete por encima de la Tierra. (La ecuación 5.12 para la energía potencial no es válida en este caso porque el cohete se eleva demasiado alto por encima de la Tierra para que la fuerza de la gravedad pueda ser considerada constante.) (*b*) Empleando la Ec. 5.18, calcular la altura real que alcanza el cohete por encima de la Tierra. (*Sugerencia:* Hállese primero *r*, que es la distancia que recorre el cohete desde el centro de la Tierra, y réstese después el radio de la Tierra.)
Resp. (*a*) 4,13 × 10^6 m; (*b*) 11,4 × 10^6 m.

32. Un átomo de hidrógeno con una energía cinética de 4,0 × 10^{-19} J está a 1,5 × 10^{-10} m de un átomo de flúor. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial del átomo de hidrógeno? Usar como referencia la Fig. 5.14. (*b*) ¿Cuál es la energía total del átomo de hidrógeno? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética del átomo de hidrógeno cuando está a 2,0 × 10^{-10} m del átomo de flúor? (*d*) ¿Cuál es la distancia máxima a la que puede estar el átomo de hidrógeno del átomo de flúor?

33. Cuando una masa de 0,5 kg se suspende de un muelle, éste se alarga 4 cm. La masa se desplaza entonces 2 cm de su posición de equilibrio y se suelta. (*a*) ¿Cuál es la constante del muelle? (*b*) ¿Cuál es el período de la oscilación resultante? (*c*) ¿Cuál es la energía mecánica de la masa? (*d*) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando pasa por su posición de equilibrio?
Resp. (*a*) 122,5 N/m; (*b*) 0,40 s; (*c*) 0,0245 J; (*d*) 0,313 m/s.

34. Una masa de 2,5 kg colgada de un muelle efectúa un movimiento armónico simple con un período de 1,5 s. La masa tiene una velocidad de 0,75 m/s cuando pasa por su posición de equilibrio. (*a*) ¿Cuál es la constante del muelle? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

35. (*a*) Representar gráficamente la energía potencial de la fuerza de un oscilador armónico de constante $k = 250$ N/m para valores de x entre —10 y +10 cm. (*b*) Trazar sobre esta gráfica una línea horizontal que represente un objeto que describe un movimiento armónico simple con una energía mecánica de 0,75 J. (*c*) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación del objeto? (*d*) ¿En qué posiciones su energía potencial vale 0,50 J? (*e*) ¿En qué posiciones su energía cinética vale 0,50 J?
Resp. (*c*) 0,0775 m; (*d*) ±0,0632 m; (*e*) ±0,0447 m.

*36. (*a*) Demostrar que la celeridad v de un objeto de masa m en movimiento armónico simple con amplitud A viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

donde k es la constante del muelle (*b*) Demostrar que en $x = \frac{1}{2}A$, la celeridad del objeto es $(\frac{1}{2})\sqrt{3}$ de su velocidad máxima. (*c*) ¿En qué posición, expresada como fracción de A, la energía cinética es igual a la energía potencial?

37. ¿Cuál es el período de un péndulo de longitud 2 m?
Resp. 2,84 s.

*38. Utilizar argumentos de escala para demostrar que el período de un péndulo es proporcional a la raíz cuadrada de su longitud L y que es independiente de su masa m. (*Sugerencia:* El período varía como L/v, donde v es la máxima celeridad del péndulo.)

39. La longitud del péndulo de un reloj aumenta en un 0,1 % debido a un cambio en la temperatura de la habitación. ¿En qué tanto por ciento varía el período del péndulo?
Resp. 0,05 %.

40. Un caballo cuyas patas miden 3 pies de longitud anda a una velocidad de 2,0 m/s. ¿Cuál es la velocidad al andar de una jirafas cuyas patas miden 4,5 pies de longitud?
Resp. 2,45 m/s.

41. Un objeto está sometido a una fuerza del tipo oscilador armónico de constante $k = 300$ N/m. En el instante $t = 0$ el objeto está ejecutando un movimiento armónico simple con una amplitud de 7 cm,

* Los problemas con asterisco presentan alguna mayor dificultad.

pero debido a la resistencia del aire la amplitud se ha reducido a 4 cm en el instante $t = 5$ min. ¿Cuál es el aumento de energía interna del sistema durante este intervalo?
Resp. 0,495 J.

42. Se frena un automóvil de 1200 kg que corre a 30 m/s justamente cuando empieza a subir una colina de 10° de inclinación. El automóvil se detiene tras recorrer 125 m a lo largo de la pendiente. (*a*) ¿Cuál es el aumento de energía interna? (*b*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento sobre el automóvil durante el período de frenado?

43. Un automóvil de 1500 kg acelera desde el reposo hasta 25 m/s mientras recorre una distancia de 200 m a lo largo de una carretera horizontal. Durante este período una fuerza de rozamiento de 1100 N se opone al movimiento. (*a*) ¿Cuál es el valor de la fuerza aplicada que actúa sobre el automóvil? (La fuerza aplicada debida al motor se ejerce sobre el automóvil a través de la carretera.) (*b*) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza aplicada durante el proceso de aceleración?
Resp. (*a*) 3444 N; (*b*) $6{,}89 \times 10^5$ J.

* 44. Una pelota se lanza verticalmente al aire con una velocidad inicial v_A. Si el aire ejerce una fuerza de rozamiento constante F_f sobre la pelota, demostrar que la altura h que ésta alcanza es

$$h = \frac{v_A^2}{2(g + F_f/m)}$$

y que la velocidad v_B de la pelota cuando llega al suelo es

$$v_B = v_A \sqrt{\frac{mg - F_f}{mg + F_f}}$$

45. Suponiendo que los músculos tienen un rendimiento del 22 % para convertir energía en trabajo, ¿cuánta energía consume una persona de 80 kg al escalar una distancia vertical de 15 m?
Resp. $5{,}36 \times 10^4$ J.

46. Una máquina de vapor disipa 81 J de energía al medio ambiente por cada 100 J de energía interna que consume. (*a*) ¿Cuánto trabajo produce la máquina y (*b*) cuál es su rendimiento?

47. Las unidades inglesas de potencia son pie · libra/segundo (pie · lb/s) y caballo de vapor (hp), donde 1 hp = 550 pie · lb/s. Hallar el factor de conversión de caballos de vapor en kilowatts.
Resp. 1 hp = 0,746 kW.

48. Un hombre de 80 kg sube un tramo de escalera de 6 m de altura en 8 s. ¿Cuál es el consumo de potencia en kilowatts y en caballos de vapor? (Ver Prob. 47.)

49. La potencia consumida por un ciclista que se mueve a una velocidad constante de 6,0 m/s por una carretera plana es 120 W. (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida sobre él y la bicicleta por el aire? (*b*) Inclinándose sobre el manillar, el ciclista reduce la resistencia del viento a 18 N. Si mantiene su potencia anterior, ¿cuál será su velocidad?
Resp. (*a*) 20 N; (*b*) 6,67 m/s.

50. Hallar cómo la velocidad con que los animales de forma similar pueden subir una colina depende del tamaño.

OBSERVACIÓN. En el Apart. 5.1 hemos demostrado que la velocidad máxima de los animales de forma semejante no depende del tamaño. Allí se suponía que los animales corrían sobre un terreno llano. Sin embargo, la situación cambia drásticamente al subir una colina, donde un animal pequeño puede correr con más facilidad que otro grande.

51. Un corredor consume oxígeno a razón de 4,1 l/min. ¿Cuál es su velocidad metabólica?
Resp. 1367 W.

52. ¿Cuál es la velocidad de consumo de oxígeno durante el sueño, suponiendo una velocidad metabólica de 75 W?

53. La *velocidad metabólica basal* (VMB) se define como la velocidad metabólica de una persona en reposo absoluto dividido por el área de su cuerpo. La VMB es por lo tanto independiente del tamaño. ¿Cuál es la VMB de una persona de área 2,2 m² que consume 0,30 litros de oxígeno por minuto?
Resp. 45,5 W/m².

BIBLIOGRAFÍA

FEYNMAN, Richard P.: «The Character of Physical Law», M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1965. El capítulo 1 hace una relación muy amena del origen y desarrollo de la ley de la gravedad. El capítulo 3 discute la conservación de la energía y otras leyes de conservación de la física.

——, Robert B. LEIGHTON y Mattew SANDS: «Lectures on Physics», Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1963. El capítulo 4 es un relato ameno y lleno de perspicacia de la ley de conservación de la energía.

HAY, James G: «Straddle or Flop?», Athletic Journal, **55**:8 (abril 1975). Se hace una comparación biomecánica del salto de altura convencional y el estilo Fosbury.

McMAHON, Thomas A.: «Size and Shape in Biology», Science, **179**:1201 (1973). La ley de Kleiber es un enunciado del hecho experimental de que la potencia en los animales es proporcional a $W^{0,75}$ —donde W es el peso del animal— más que a $L^2 \propto W^{2/3} = W^{0,67}$. La ley de escala L^2 sólo es válida para animales de forma semejante. Este artículo utiliza criterios de estabilidad mecánica para deducir cómo la forma (proporción entre lo ancho y lo largo) de los animales cambia con el tamaño. La ley de Kleiber se deduce entonces a partir de un argumento del tipo área de la superficie como el utilizado en el Apart. 5.6 para deducir la ley L^2 para animales de forma semejante.

MOREHOUSE, Laurence E. y Augustus T. MILLER: «Physiology of Exercise». The C. V. Mosby Company, St. Louis, 1971. Fisiología de la actividad muscular de los estudiantes de educación física. El capítulo 19, que estudia los métodos de medida de la velocidad metabólica, contiene una tabla de la velocidad metabólica correspondiente a una diversidad de situaciones físicas.

SCHMIDT-NIELSEN, Knut: «How animals work», Cambridge University Press, London, 1972. Discusiones fascinantes de los mecanismos físicos de varias funciones fisiológicas. El capítulo 6 contiene un tratamiento excelente de las leyes de escala.

——: «Locomotion: Energy Cost of Swimming, Flying and Running», Science, **177**:222 (1972). Se compara la energía consumida por diversos animales con diferentes medios de locomoción.

SMITH, J. Maynard: «Mathematical Ideas in Biology», Cambridge University Press, Cambridge, 1968. En el capítulo 1 se habla de la física de la carrera.

TUCKER, V. A.: «The Energetic Cost of Moving About», American Scientist, **63**:413 (1975). Por qué el vuelo, la natación y el ciclismo son medios de locomoción más eficientes que andar y correr.

Capítulo 6 Impetu

La tercera ley de Newton del movimiento (Propiedad 4, Apart. 2.1) es la más firmemente establecida, no de modo directo a partir de medidas de las fuerzas de acción y reacción, sino indirectamente de ciertas consecuencias que pueden deducirse de manera lógica a partir de la ley. Entre estas consecuencias están el teorema del centro de masa y la conservación del ímpetu. El ímpetu es una magnitud física que (al igual que la energía) permanece invariable en un sistema cerrado de objetos en interacción. Y, como la energía, el ímpetu es un importante concepto unificador que ayuda a comprender diversos fenómenos físicos.

6.1. TEOREMA DEL CENTRO DE MASA

Consideremos dos masas m_1 y m_2 en interacción mutua y con otros objetos externos (Fig. 6.1). Las fuerzas sobre m_1 son la *fuerza interna* $\mathbf{F}_{21}$ ejercida sobre m_1 por m_2 y la *fuerza externa* $\mathbf{F}_1$ ejercida sobre m_1 por todos los objetos externos. De acuerdo con la segunda ley de Newton (Apart. 4.3) la aceleración $\mathbf{a}_1$ de m_1 está dada por

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} \qquad 6.1$$

Asimismo las fuerzas sobre m_2 son la fuerza interna $\mathbf{F}_{12}$ ejercida sobre m_2 por m_1 y la fuerza externa $\mathbf{F}_2$ ejercida sobre m_2 por todos los objetos externos. La aceleración $\mathbf{a}_2$ de m_2 viene dada, por consiguiente, por

$$m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} \qquad 6.2$$

Al sumar las Ecs. 6.1 y 6.2 se obtiene

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} \qquad 6.3$$

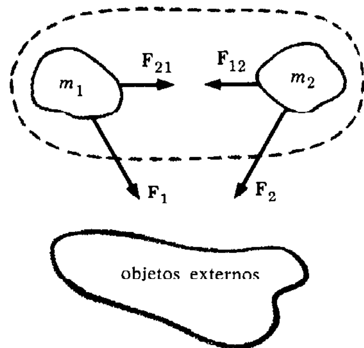


FIGURA 6.1
Dos masas en interacción mutua y con objetos externos.

Aquí la clave está en que las fuerzas internas $\mathbf{F}_{21}$ y $\mathbf{F}_{12}$ son un par de acción-reacción, de modo que a partir de la tercera ley de Newton del movimiento tenemos

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$

En consecuencia las fuerzas internas se anulan mutuamente en la Ec. 6.3, que queda reducida a

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{ext}$$

donde $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre m_1 y m_2.

Por último, si definimos la aceleración efectiva **a** como

$$\mathbf{a} = \frac{m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2}{m_1 + m_2} \qquad 6.5$$

La Ec. 6.4 puede escribirse en la forma

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext} \qquad 6.6$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. La Ec. 6.6 es idéntica en su forma a la segunda ley de Newton, pero se aplica a un sistema de objetos más que a un objeto solo.

La aceleración **a** no es la aceleración de cualquier masa del sistema sino de un punto matemático, denominado el *centro de masa*. Las coordenadas x e y del centro de masa vienen dadas en función de las coordenadas x e y de los objetos por

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \qquad 6.7$$

El centro de masa es idéntico al centro de gravedad definido en el Apart. 3.2 y a menudo los dos términos se intercambian. Sin embargo, el término centro de masa es preferible en el presente contexto ya que la gravedad no aparece en el tratamiento. Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema del centro de masa. *La aceleración del centro de masa de un sistema de objetos es igual a la fuerza externa total que actúa sobre el sistema dividida por la masa total de los objetos.* Aunque este teorema ha sido demostrado sólo para el caso de un sistema de dos objetos, es cierto para sistemas con un número cualquiera de objetos. Las coordenadas del centro de masa en el caso general de un sistema con n objetos son

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad 6.8$$

donde $\sum_{i=1}^{n}$ es el símbolo para la suma desde 1 hasta n.

Ejemplo 1. Una mujer que está de pie sobre una balanza levanta repentinamente los brazos hasta llevarlos por encima de su cabeza. ¿Es la lectura de la balanza en este proceso mayor, menor o igual que en el caso normal?

La lectura de la balanza es siempre igual al módulo de la fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ ejercida por la balanza. Mientras la mujer está de pie inmóvil, su centro de masa permanece en reposo, de modo que, de acuerdo con la Ec. 6.6, la fuerza externa total sobre ella es cero. Como las fuerzas externas son $\mathbf{F}_c$ y la fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$, para que su suma sea cero debemos tener

$$F_c = F_g = mg$$

Es decir, mientras la mujer permanece inmóvil la lectura de la balanza es su verdadero peso.

Cuando la mujer levanta los brazos, ella eleva la posición de su centro de masa. Como el centro de masa estaba inicialmente en reposo, debe adquirir una aceleración hacia arriba cuando comienza a subir. Según la Ec. 6.6 esto quiere decir que $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_g$ está dirigida hacia arriba, y como $\mathbf{F}_c$ es la fuerza hacia arriba, debemos tener

$$F_c > F_g$$

Es decir, cuando la mujer comienza a levantar los brazos, la lectura de la balanza es mayor que su verdadero peso.

Asimismo cuando los brazos de la mujer alcanzan su altura máxima, su centro de masa debe adquirir una aceleración hacia abajo hasta quedar en reposo en su nueva posición. Esto requiere que $\mathbf{F}_{ext}$ esté dirigida hacia abajo, o sea que $F_c < F_g$. Es decir, cuando la mujer va a dejar los brazos en reposo por encima de la cabeza, la lectura de la balanza es menor que su verdadero peso. Una vez que los brazos de la mujer quedan en reposo por encima de la cabeza, la lectura de la balanza vuelve a ser igual a su verdadero peso.

Analizar la situación cuando la mujer baja repentinamente los brazos.

Ejemplo 2. Un hombre de 80 kg está de pie en un extremo de una plataforma de 100 kg (Fig. 6.2*a*). La plataforma tiene 3 m de largo y se mueve sobre ruedas. Si el hombre camina hasta el otro extremo de la plataforma, ¿qué distancia *d* se desplaza ésta? Ignorar el rozamiento.

En ausencia de rozamiento no hay fuerza externa horizontal sobre el sistema hombre-plataforma. En consecuencia, como el centro de masa de este sistema estaba inicialmente en reposo, permanecerá en reposo mientras el hombre esté caminando.

Para calcular la posición inicial del centro de masa del sistema imponemos el sistema de coordenadas que se muestra en la Fig. 6.2, el cual tiene su origen en el borde izquierdo de la plataforma. En este sistema de coordenadas las posiciones iniciales del hombre y la plataforma son

$$x_m = 0 \quad \text{y} \quad x_p = 1{,}5 \text{ m}$$

donde la posición de la plataforma es la posición de su propio centro de masa. El centro de masa del sistema hombre-plataforma es entonces

$$X = \frac{(80 \text{ kg})(0) + (100 \text{ kg})(1{,}5 \text{ m})}{80 \text{ kg} + 100 \text{ kg}} = 0{,}833 \text{ m}$$

Cuando el hombre llega al otro extremo de la plataforma, ésta se ha desplazado hacia la izquierda una distancia desconocida *d* (Fig. 6.2*b*).

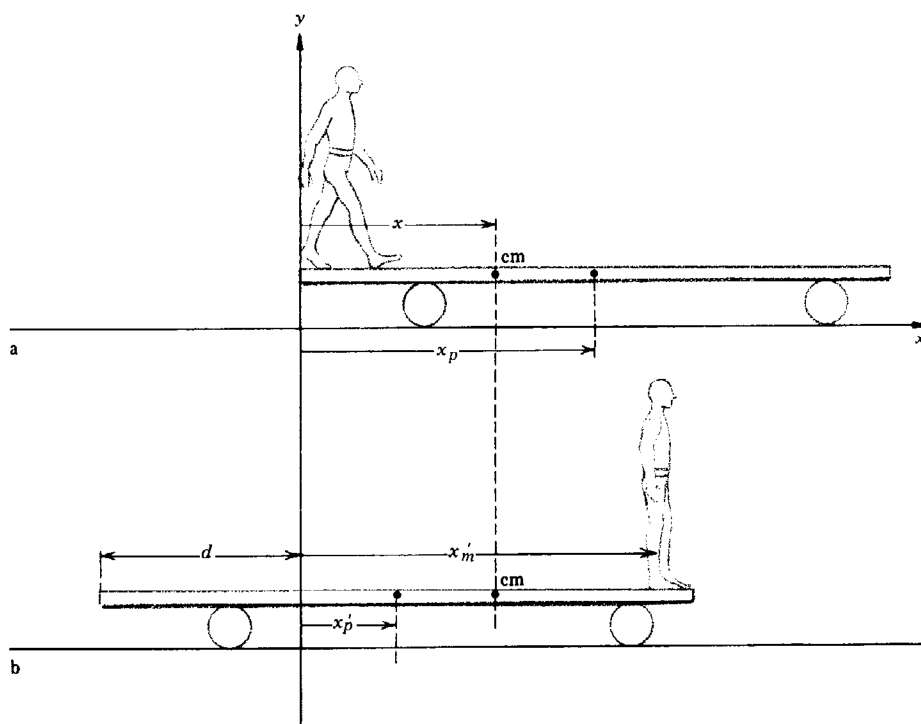


FIGURA 6.2
(*a*) Hombre de pie en un extremo de una plataforma móvil.
(*b*) Cuando el hombre camina hacia el otro extremo de la plataforma, ésta se desplaza en dirección opuesta con el fin de mantener fijo el centro de masa del sistema hombre-plataforma.

Ahora las posiciones del hombre y la plataforma con respecto al sistema fijo de coordenadas son

$$x'_m = (3 \text{ m}) - d \qquad \text{y} \qquad x'_p = (1{,}5 \text{ m}) - d$$

y por tanto la posición del centro de masa es

$$X = \frac{(80 \text{ kg})(3 \text{ m} - d) + (100 \text{ kg})(1{,}5 \text{ m} - d)}{180 \text{ kg}}$$

Como el centro de masa no se desplaza mientras el hombre camina, tenemos

$$X = \frac{390 \text{ kg} \cdot \text{m} - (180 \text{ kg})d}{180 \text{ kg}} = 0{,}833 \text{ m}$$

o

$$d = \frac{390 \text{ kg} \cdot \text{m} - (180 \text{ kg})(0{,}833 \text{ m})}{180 \text{ kg}} = 1{,}33 \text{ m}$$

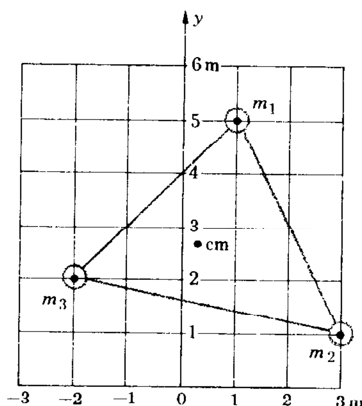


FIGURA 6.3
Tres masas en un sistema fijo de coordenadas.

Es decir, la plataforma se desplaza 1,33 m hacia la izquierda mientras el hombre camina hacia la derecha.

Ejemplo 3. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa del sistema de tres cuerpos de la Fig. 6.3 si $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 6$ kg? En la Fig. 6.3 se observa que las coordenadas x de las masas son $x_1 = 1$ m, $x_2 = 3$ m y $x_3 = -2$ m, de modo que por la Ec. 6.8 la coordenada x del centro de masa es

$$X = \frac{(5\ \text{kg})(1\ \text{m}) + (3\ \text{kg})(3\ \text{m}) + (6\ \text{kg})(-2\ \text{m})}{5\ \text{kg} + 3\ \text{kg} + 6\ \text{kg}} = 0{,}143\ \text{m}$$

Asimismo las coordenadas y de las masas son $y_1 = 5$ m, $y_2 = 1$ m e $y_3 = 2$ m, de modo que la coordenada y del centro de masa es

$$Y = \frac{(5\ \text{kg})(5\ \text{m}) + (3\ \text{kg})(1\ \text{m}) + (6\ \text{kg})(2\ \text{m})}{5\ \text{kg} + 3\ \text{kg} + 6\ \text{kg}} = 2{,}86\ \text{m}$$

La posición del punto con estas coordenadas está indicada por *cm* en la Fig. 6.3.

6.2. CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU

Definición. El *ímpetu* **p** de un objeto de masa m es

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{6.9}$$

donde **v** es la velocidad del objeto. El vector **p** tiene el módulo mv y la dirección de **v**. Por ejemplo, el ímpetu de un objeto de 3 kg con una velocidad de 5 m/s hacia el oeste es 15 kg · m/s dirigido asimismo hacia el oeste.

El ímpetu total de un sistema que contiene dos o más objetos es el vector suma de los ímpetus de los objetos individuales. Así para un sistema de dos masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, el ímpetu total es

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{6.10}$$

Supongamos ahora que en un intervalo de tiempo Δt las velocidades de un sistema de dos masas varían desde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$. El nuevo ímpetu es entonces

$$\mathbf{p}' = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2$$

y la variación del ímpetu $\Delta\mathbf{p}$ es

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{p} &= \mathbf{p}' - \mathbf{p} = (m_1 v'_1 + m_2 v'_2) - (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)\\ &= m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)\\ &= m_1\,\Delta\mathbf{v}_1 + m_2\,\Delta\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

Cuando dividimos miembro a miembro por Δt, obtenemos

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = m_1 \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \mathbf{v}_2}{\Delta t}$$

Por la Ec. 4.2. sabemos que si Δt es suficientemente pequeño, $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$ es igual a la aceleración, en cuyo caso

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2$$

Pero, de acuerdo con las Ecs. 6.5 y 6.6, tenemos

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{ext}$$

y por tanto

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{F}_{ext} \qquad 6.11$$

Aunque este importante resultado ha sido deducido para el caso de un sistema de dos masas, se cumple para sistemas con un número cualquiera de masas.

Si sobre un sistema de masas no actúa una fuerza externa, la Ec. 6.11 se convierte en

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = 0 \qquad \text{o} \qquad \Delta \mathbf{p} = 0$$

lo que significa que se conserva el ímpetu total del sistema. Esto es una prueba de la importante ley de la física que enunciamos a continuación.

Conservación del ímpetu. *El ímpetu total de un sistema aislado, o un sistema sobre el que la fuerza externa total es cero, se conserva.*

Ejemplo 1. Un rifle de 2 kg dispara una bala de 10 g con una velocidad inicial de 900 m/s. Si el rifle no se sujeta firmemente, ¿Cuál es su velocidad de retroceso?

El ímpetu inicial del sistema rifle-bala es cero, ya que antes de disparar tanto la bala como el rifle están en reposo. Si el rifle no se sujeta fuertemente, no hay fuerza horizontal sobre él al disparar la bala y el ímpetu horizontal sigue siendo cero. Así, una vez que se ha disparado la bala, el ímpetu del sistema es

$$0 = m_b v_b + m_r v_r = (0{,}010 \text{ kg})(900 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})v_r$$

donde se ha tomado positiva la velocidad de la bala. La velocidad de retroceso del rifle es entonces

$$v_r = -\frac{9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2 \text{ kg}} = -4{,}5 \text{ m/s}$$

El signo menos indica que la velocidad de retroceso del rifle está en dirección opuesta a la de la bala.

Ejemplo 2. Consideremos de nuevo el hombre que camina sobre la plataforma del ejemplo 2 del Apart. 6.1. Si camina desde un extremo de la plataforma al otro a una velocidad de 1,5 m/s (con respecto a la plataforma), ¿cuál es la velocidad de la plataforma (con respecto al suelo)?
Antes de que el hombre empiece a caminar el ímpetu total del sistema hombre-plataforma es cero dado que tanto el hombre como la plataforma están en reposo. El ímpetu horizontal permanece nulo cuando el hombre camina porque no existe fuerza horizontal externa sobre el sistema.
Sea v_p la velocidad de la plataforma (con respecto al suelo) cuando el hombre camina hacia la derecha (Fig. 6.2). Adoptamos el convenio de que una velocidad positiva es una velocidad dirigida hacia la izquierda, y negativa la dirigida hacia la derecha. Así la velocidad del hombre con respecto a la plataforma es —1,5 m/s, y su velocidad con respecto al suelo es

$$v_m = v_p - 1{,}5 \text{ m/s}$$

El ímpetu del sistema mientras el hombre está caminando es

$$0 = m_p v_p + m_m v_m = (100 \text{ kg})v_p + (80 \text{ kg})(v_p - 1{,}5 \text{ m/s})$$

y por tanto

$$v_p = \frac{120 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{180 \text{ kg}} = 0{,}667 \text{ m/s}$$

La velocidad del hombre con respecto al suelo es

$$v_m = v_p - 1{,}5 \text{ m/s} = -0{,}833 \text{ m/s}$$

Este último ejemplo plantea la cuestión de cómo se conserva el ímpetu durante el paseo normal, ya que cuando empezamos a andar nuestro ímpetu aumenta desde cero a $m_m v_m$, donde m_m y v_m son nuestra masa y nuestra velocidad. Por supuesto que una persona sola no es un sistema aislado; cuando empezamos a caminar la Tierra ejerce una fuerza externa sobre nosotros. Sin embargo, si consideramos que usted, lector, y la Tierra forman un sistema único, el ímpetu se conserva. En este caso la fuerza ejercida sobre usted es igual y opuesta a la fuerza que usted ejerce sobre la Tierra. La conservación del ímpetu exige que la Tierra retroceda con una velocidad v_e dada por

$$0 = m_m v_m + m_e v_e \quad \text{o sea} \quad v_e = -\frac{m_m v_m}{m_e}$$

donde m_e es la masa de la Tierra. Como m_e es tan grande, v_e es esencialmente cero. Así, en interacciones con la Tierra (o cualquier otro objeto de gran masa), la velocidad de retroceso puede ser demasiado pequeña para ser observada.

Balistocardiografía

Con cada latido del corazón se expulsan alrededor de 0,07 kg de sangre desde el ventrículo izquierdo a la aorta a una velocidad de unos 0,30 m/s. Así la sangre expulsada posee el ímpetu

$$p_1 = m_1 v_1 = (0{,}07\ \text{kg})(0{,}30\ \text{m/s}) = 0{,}021\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Si el cuerpo está completamente aislado de fuerzas externas, retrocederá con una velocidad v_2 dada por la conservación del ímpetu:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad \text{o} \quad v_2 = -\frac{m_1 v_1}{m_2}$$

donde m_2 es la masa del cuerpo. Para una persona de 70 kg la velocidad de retroceso es

$$v_2 = \frac{0{,}21\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{70\ \text{kg}} = -3 \times 10^{-3}\ \text{m/s}$$

El signo menos indica que el cuerpo retrocede en dirección opuesta a la dirección del movimiento de la sangre.

La Fig. 6.4 muestra que la porción de la aorta directamente conectada al ventrículo izquierdo, denominada *aorta ascendente*, sigue una línea casi paralela al eje cabeza-pie del cuerpo. De este modo la sangre expulsada se desplaza inicialmente hacia la cabeza y el cuerpo retrocede inicialmente hacia los pies. Cuando la sangre llega a la parte alta de la aorta ascendente (el *arco aórtico*), su velocidad es invertida y, en consecuencia, la del cuerpo.

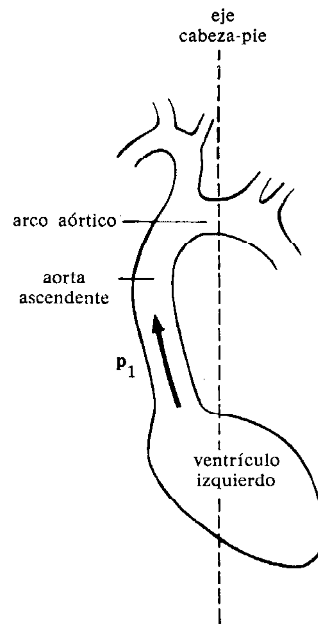


FIGURA 6.4
La aorta ascendente sigue una línea que es casi paralela al eje cabeza-pie del cuerpo.

El movimiento del cuerpo puede detectarse en un instrumento llamado balistocardiógrafo, que consiste en una ligera plataforma rígida sostenida horizontalmente por chorros de aire (Fig. 6.5). Éste es un soporte virtualmente sin rozamiento, de modo que cuando un individuo es atado firmemente a la plataforma, el individuo y la plataforma se desplazan horizontalmente con cada latido del corazón. Este movimiento es detectado electrónicamente y el resultado, cuando se registra en función del tiempo, recibe el nombre de *balistocardiograma* (BCG). Se diseñan balistocardiógrafos para medir el desplazamiento, la velocidad o la aceleración de la plataforma. La Fig. 6.6 compara balistocardiogramas normales de velocidad y aceleración con un electrocardiograma (ECG) normal. En pacientes con anomalías cardíacas el balistocardiograma muestra cambios característicos que prometen hacer de él un valioso instrumento en el diagnóstico de las enfermedades cardíacas.

6.3. CHOQUES

El choque de dos objetos es un fenómeno interesante que tiene lugar en áreas muy diferentes de la física. Por ejemplo, la mayoría de las

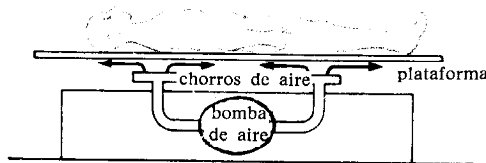


FIGURA 6.5
Un balistocardiógrafo consiste en una plataforma sostenida por chorros de aire.

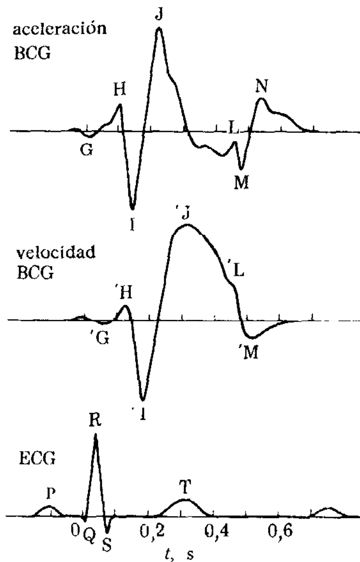


FIGURA 6.6
Balistocardiogramas (BCG) típicos de aceleración y velocidad comparados con un electrocardiograma típico (ECG).

reacciones químicas se llevan a cabo a través de una sucesión de choques binarios entre átomos, moléculas y radicales. Muchos experimentos en física nuclear y de partículas implican el choque de una partícula rápida producida en un acelerador con una partícula blanco estacionaria. Y por supuesto también hay que tener en cuenta los cotidianos choques entre automóviles. Todos estos procesos de choque son similares en el sentido en que están regidos por las leyes de conservación de la energía (Apart. 5.5) y de conservación del ímpetu (Apart. 6.2).

Consideremos dos masas m_1 y m_2 que se dirigen una hacia otra con velocidades v_1 y v_2 (Fig. 6.7*a*). Limitaremos la discusión al movimiento unidimensional, con el convenio de que una velocidad positiva es una velocidad dirigida hacia la derecha y una velocidad negativa es una velocidad hacia la izquierda. La energía cinética inicial y el ímpetu de las masas son

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad \text{y} \qquad p = m_1v_1 + m_2v_2$$

Después de chocar las masas, sus velocidades son v_1' y v_2' (Fig. 6.7*b*) y la energía cinética y el ímpetu son

$$K' = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad \text{y} \qquad p' = m_1v_1' + m_2v_2'$$

El ímpetu se conserva durante el proceso de choque, de modo que $p = p'$, o sea

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \qquad 6.12$$

La energía total también se conserva durante el choque pero no necesariamente la energía cinética sola, puesto que parte de la energía cinética inicial puede convertirse en energía interna I de las masas. Así, en general, tenemos

$$K = K' + \Delta I$$

o

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 + \Delta I \qquad 6.13$$

donde ΔI es el cambio en la energía interna de las masas.
Ahora discutiremos algunos tipos particulares de choques.

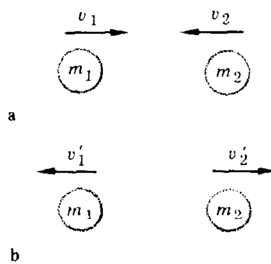


FIGURA 6.7
(*a*) Dos masas dirigiéndose una hacia otra con velocidades v_1 y v_2.
(*b*) Las dos masas después de chocar retroceden con velocidades v_1' y v_2'.

Choques elásticos

Los choques elásticos son colisiones en las que se conserva la energía cinética, es decir, en las que $\Delta I = 0$. Estos choques son comunes entre átomos y moléculas pero ocurren sólo de manera aproximada entre objetos macroscópicos, tales como bolas de billar y deslizadores de mesa de aire. En un choque **elástico** unidimensional es posible predecir las velocidades finales v_1' y v_2' dadas las velocidades iniciales v_1 y v_2. Las ecuaciones que rigen un choque elástico son las Ecs. 6.12 y 6.13 con $\Delta I = 0$. Volveremos a escribir estas ecuaciones llevando todos los términos con m_1 al primer miembro y todos los términos con m_2 al segundo:

$$m_1v_1 - m_1v_1' = m_2v_2' - m_2v_2$$
$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 - \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 = \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 - \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

Tras sacar factor común estas ecuaciones se convierten en

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \qquad 6.14$$
$$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \qquad 6.15$$

Dividiendo la Ec. 6.15 por la 6.14 se obtiene

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

o

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \qquad 6.16$$

Esta última ecuación establece que en un choque elástico la velocidad relativa $v_2' - v_1'$ a que las dos masas se separan es igual a la velocidad relativa $v_1 - v_2$ a que se aproximan una a otra.
Por sencillez consideremos en detalle sólo el caso particular en el que m_2 está inicialmente en reposo; esto es, $v_2 = 0$. En este caso las Ecs. 6.14 y 6.16 se convierten en

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \qquad 6.17$$
$$v_1 = v_2' - v_1' \qquad 6.18$$

Éstas son dos ecuaciones con las dos incógnitas v_1' y v_2', las cuales se despejan simultáneamente para dar

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \qquad 6.19$$
$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \qquad 6.20$$

Ejemplo 1. Una masa de 2 kg con una velocidad inicial de 5 m/s efectúa un choque elástico frontal con una masa estacionaria de 1 kg. ¿Cuáles son las velocidades de las masas después de la colisión?
En este problema tenemos

$$v_1 = 5\ \text{m/s} \qquad v_2 = 0 \qquad m_1 = 2\ \text{kg} \qquad m_2 = 1\ \text{kg}$$

y, por tanto, a partir de las Ecs. 6.19 y 6.20 se obtiene

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(2\ \text{kg} - 1\ \text{kg})(5\ \text{m/s})}{2\ \text{kg} + 1\ \text{kg}} = 1{,}67\ \text{m/s}$$
$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(2)(2\ \text{kg})(5\ \text{m/s})}{2\ \text{kg} + 1\ \text{kg}} = 6{,}67\ \text{m/s}$$

Como ambas velocidades son positivas, las dos masas se desplazan hacia la derecha después del choque. Obsérvese asimismo que la Ec. 6.16 sirve de verificación de estos resultados:

$$v_2' - v_1' = 6{,}67\ \text{m/s} - 1{,}67\ \text{m/s} = 5\ \text{m/s} = 5\ \text{m/s} = v_1 - v_2$$

Ejemplo 2. Un objeto en movimiento efectúa un choque elástico frontal con un objeto estacionario de la misma masa. ¿Cuáles son las velocidades finales de los dos objetos?
Dado que en este problema $v_2 = 0$ y $m_1 = m_2$, las Ecs. 6.19 y 6.20 dan

$$v_1' = 0 \qquad \text{y} \qquad v_2' = v_1$$

Es decir, el objeto incidente es llevado al reposo y el objeto estacionario se desplaza hacia adelante con la velocidad inicial del objeto incidente.

Choques inelásticos

Los choques inelásticos son colisiones en las que la energía cinética final es menor que la inicial, es decir, en las que parte de la energía cinética se convierte en energía interna I. Estos choques ocurren entre átomos y moléculas así como entre objetos macroscópicos. En el caso de átomos y moléculas la energía interna se da en forma de excitaciones atómicas y moleculares, que son a menudo necesarias antes de que pueda haber una reacción química. De aquí que en los choques inelásticos una cuestión importante sea el conocer el valor máximo posible del cambio en la energía interna ΔI que se produce en una situación dada.
La Ec. 6.16 no es válida para choques inelásticos. En su lugar tenemos

$$v_1 - v_2 > v_2' - v_1' \qquad \text{o} \qquad \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} < 1$$

Esto es, en un choque inelástico la velocidad con que se separan las masas es menor que la velocidad con que se aproximan.
En este punto es conveniente introducir la siguiente definición.
Definición. El *coeficiente de restitución* e se define como la razón de la velocidad de separación a la velocidad de aproximación:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \qquad 6.21$$

Este coeficiente es igual a 1 para choques elásticos y está entre 0 y 1 para choques inelásticos. Cuando $e = 0$, las masas no se mueven por separado sino que permanecen juntas y se desplazan como un solo objeto; esto recibe el nombre de *choque completamente inelástico.*
Vamos a restringirnos de nuevo al caso en el que m_2 está inicialmente en reposo ($v_2 = 0$), de modo que la Ec. 6.21 se convierte en

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1}$$

o

$$ev_1 = v_2' - v_1' \qquad 6.22$$

Esta última ecuación reemplaza a la 6.18 para choques inelásticos. Cuando despejamos v_1' y v_2', del sistema formado por las Ecs. 6.17 y 6.22 se obtiene

$$v_1' = \frac{(m_1 - em_2)v_1}{m_1 + m_2} \qquad 6.23$$

$$v_2' = \frac{(1 + e)m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad 6.24$$

Obsérvese que estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones de los choques elásticos (Ecs. 6.19 y 6.20) cuando $e = 1$.
Según la Ec. 6.13 la variación en la energía interna es

$$\Delta I = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 - (\tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 - \tfrac{1}{2}m_2 v_2'^2)$$

Cuando se sustituyen en esta última ecuación los valores de v_1' y v_2' dados por las Ecs. 6.23 y 6.24, se obtiene tras algunas manipulaciones algebraicas

$$\Delta I = (1 - e^2)\frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} \qquad 6.25$$

Cuando $e = 1$ (choque elástico), $\Delta I = 0$ como es de esperar. El valor máximo de ΔI tiene lugar cuando $e = 0$ (choque completamente inelástico) y es

$$\Delta I_{max} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}K \qquad 6.26$$

donde K es la energía cinética inicial de la masa incidente. La conservación del impulso prohíbe que toda la energía cinética incidente se convierta en energía interna porque el sistema final debe poseer ímpetu y, por tanto, energía cinética.

Ejemplo 3. Una bala de 0,050 kg con una velocidad de 700 m/s se empotra en un bloque de madera de 1,5 kg que puede sufrir un retroceso. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del bloque? ¿Cuál es el cambio que experimenta la energía interna del sistema?
La velocidad inicial del bloque es cero ($v_2 = 0$), y tanto el bloque como la bala tienen la misma velocidad final ($v_1' = v_2'$), de modo que la conservación del ímpetu (Ec. 6.12) da

o $$u'_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}050\ \text{kg})(700\ \text{m/s})}{1{,}55\ \text{kg}} = 22{,}58\ \text{m/s}$$

Este resultado puede obtenerse también a partir de la Ec. 6.23 con $e = 0$.
Las energías cinéticas inicial y final son

$$K = \tfrac{1}{2}\, m v_1'^2 = \tfrac{1}{2}\,(0{,}050\ \text{kg})(700\ \text{m/s})^2 = 12{,}250\ \text{J}$$
$$K' = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + m_2)v_1'^2 = \tfrac{1}{2}\,(1{,}55\ \text{kg})(22{,}58\ \text{m/s})^2 = 395\ \text{J}$$

de modo que el cambio en la energía interna es

$$\Delta I = K - K' = 11{,}855\ \text{J}$$

Este resultado también se puede obtener utilizando la Ec. 6.25.

Ejemplo 4. Un automóvil de 1500 kg que se desplaza a 24 m/s choca con un camión de 3000 kg que está parado. Inmediatamente después del choque la velocidad del camión es 10 m/s. ¿Cuál es la velocidad del automóvil inmediatamente después del choque? ¿Cuál es el coeficiente de restitución del choque? ¿Cuál es el cambio que experimenta la energía interna del sistema?
En este problema tenemos

$$m_1 = 1500 \text{ kg} \qquad m_2 = 3000 \text{ kg}$$
$$v_1 = 24 \text{ m/s} \qquad v_2 = 0 \qquad v_2' = 10 \text{ m/s}$$

De acuerdo con la conservación del ímpetu (Ec. 6.12) la velocidad del automóvil inmediatamente después del choque es

$$= \frac{(1500 \text{ kg})(24 \text{ m/s}) + (3000 \text{ kg})(0) - (3000 \text{ kg})(10 \text{ m/s})}{1500 \text{ kg}}$$
$$= 4 \text{ m/s}$$

Teniendo en cuenta la definición del coeficiente de restitución (Ec. 6.21) se obtiene

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{10 \text{ m/s} - 4 \text{ m/s}}{24 \text{ m/s} - 0} = 0{,}25$$

Las energías cinéticas inicial y final del sistema son

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}(1500 \text{ kg})(24 \text{ m/s})^2 + 0$$
$$= 4.32 \times 10^5 \text{ J}$$
$$K' = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = \tfrac{1}{2}(1500 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(3000 \text{ kg})(10 \text{ m/s})^2$$
$$= 1{,}62 \times 10^5 \text{ J}$$

y, por tanto, el cambio en la energía interna es

$$\Delta I = K - K' = 2{,}70 \times 10^5 \text{ J}$$

Ésta es la energía que se emplea en doblar los parachoques de los vehículos. (También puede obtenerse a partir de la Ec. 6.25.)

PROBLEMAS

1. Una masa de 10 kg y otra de 15 kg están separadas 5 m. ¿A qué distancia de la masa de 10 kg se encuentra el centro de masa de este sistema?
   Resp. 3 m.
2. Calcular la distancia del centro de masa del sistema Tierra-Luna al centro de la Tierra. Usar los datos del Apéndice VIII.

OBSERVACIÓN. Es el centro de masa del sistema Tierra-Luna y no el centro de la Tierra que se mueve alrededor del Sol en una órbita casi circular.

3. Hallar las coordenadas x e y del centro de masa de las tres masas que aparecen en la Fig. 6.8.
   Resp. 0,7 m; 1,4 m.

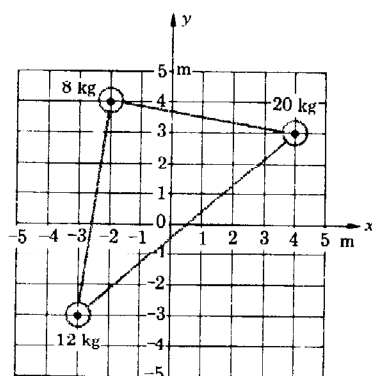


FIGURA 6.8. Problemas 3 y 5.

*4. Demostrar el teorema del centro de masa para un sistema de tres masas.

5. La Fig. 6.8 muestra tres masas unidas por barras sin peso. ¿Cuál es la aceleración del centro de masa de este sistema cuando a la masa de 20 kg se aplica una fuerza horizontal de 260 N?
Resp. 6,5 m/s^2.

6. Un tarro cerrado que pesa 2,000 N contiene una mosca cuyo peso es 0,005 N. El tarro se coloca sobre una balanza (*a*) ¿Cuál es la lectura de la balanza mientras la mosca está posada sobre una pared interior del tarro? (*b*) ¿Qué marca la balanza cuando la mosca vuela dando vueltas dentro del tarro a velocidad constante? (Despréciese el peso del aire que hay dentro del tarro.)

7. Un bloque de 2 kg y otro de 3 kg colocados sobre una superficie sin rozamiento están unidos por una cuerda, tal como indica la Fig. 6.9. Al bloque de 3 kg se aplica una

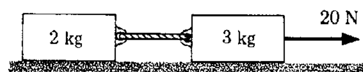


FIGURA 6.9. Problema 7.

fuerza horizontal de 20 N. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del sistema formado por los dos bloques? (*b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda que los une?
Resp. (*a*) 4 m/s^2; (*b*) 8 N.

8. Repetir el Prob. 7 con un coeficiente de rozamiento cinético entre los bloques y la superficie de 0,30.

9. Un patinador de 35 kg y otro de 55 kg están de pie separados 5 m. Cada uno sujeta un extremo de una soga y tirán hacia sí de ella hasta que se encuentran. Suponiendo que no hay fuerza de rozamiento sobre los patines, ¿cuánto se desplaza cada patinador?
Resp. 3,67 m; 2,33 m.

*10. Un patinador de 75 kg y otro de 50 kg están de pie separados 0,5 m. Mientras se mantienen con las manos unidas extienden los brazos hasta separarse 2,2 m. Suponiendo que no existe fuerza de rozamiento sobre los patines, ¿cuánto se desplaza cada patinador?

11. ¿Cuál es el ímpetu de una bala de 20 g que se desplaza con una velocidad de 800 m/s?
Resp. 16 kg-m/s?

12. ¿Cuál es el ímpetu total de un sistema consistente en una masa de 25 kg que se desplaza a 7 m/s hacia la derecha y una masa de 35 kg que se desplaza a 3 m/s hacia la izquierda?

13. Un San Bernardo de 50 kg salta desde una canoa de 40 kg en reposo con una velocidad horizontal (con respecto al agua) de 1,2 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso de la canoa?
Resp. 1,5 m/s.

14. Una muchacha de 40 kg que corre a una velocidad de 3 m/s salta sobre un trineo de 8 kg. ¿Cuál es la velocidad del sistema muchacha-trineo inmediatamente después de que la muchacha se haya posado sobre el trineo?

*15. Una cápsula espacial con una masa de 500 kg lleva un astronauta de 90 kg. La cápsula se desplaza inicialmente a una velocidad de 60 m/s con respecto a la Tierra. Si el astronauta corre con una velocidad de 4 m/s (con respecto a la cápsula) en la dirección del movimiento de la cápsula, ¿cuál es la velocidad de la cápsula (con respecto a la Tierra)?
Resp. 59,4 m/s.

16. Explicar por qué es imposible, partiendo del reposo, que una persona camine sobre una superficie completamente sin rozamiento.

17. Una masa de 500 g con una velocidad inicial de 2 m/s efectúa un choque frontal elástico con una masa en reposo de 300 g. ¿Cuáles son las velocidades de las masas después del choque?
Resp. 0,5 y 2,5 m/s.

18. Una molécula de hidrógeno con una velocidad inicial de 1200 m/s efectúa un choque frontal elástico con una molécula de oxígeno en reposo. La razón de las masas de las moléculas es $m_o/m_H = 16$. ¿Cuáles son las velocidades de las moléculas después del choque?

*19. En un choque frontal elástico con una masa en reposo, la masa incidente retrocede hacia atrás con una velocidad mitad de su velocidad incidente. (*a*) ¿Cuál es la razón m_1/m_2 de sus masas? (*b*) ¿Cuál es la velocidad final de la masa blanco m_2 expresada como una fracción de la velocidad incidente v_1?
Resp. (*a*) ⅓; (*b*) ½ v_1.

*20. En un choque frontal elástico con una masa en reposo, la masa incidente continúa moviéndose hacia adelante con una velocidad final que es un tercio de la velocidad final de la partícula blanco. (*a*) ¿Cuál es la razón m_1/m_2 de las masas? (*b*) ¿Cuáles son las velocidades finales de las masas expresadas como múltiplos de la velocidad incidente v_1?

21. Un camión de 5000 kg que marcha a 20 m/s choca de frente contra un automóvil parado de 1200 kg. (*a*) ¿Cuál es el cambio máximo que experimenta la energía interna del sistema? (*b*) Si el choque es completamente inelástico, ¿cuál es la velocidad de los vehículos inmediatamente después del choque?
Resp. (*a*) $1{,}935 \times 10^5$ J; (*b*) 16,1 m/s.

22. Repetir el Prob. 21 siendo el automóvil el que va a 20 m/s y choca contra el camión que está parado.

23. Una molécula de nitrógeno con una velocidad incidente de 300 m/s efectúa un choque frontal inelástico con una molécula de oxígeno en reposo. La razón de las masas es $m_N/m_O = 7/8$. La velocidad de la molécula de nitrógeno es cero después del choque. (*a*) ¿Cuál es el coeficiente de restitución en este choque? (*b*) ¿Cuál es la velocidad final de la molécula de oxígeno? (*c*) ¿Qué fracción de la energía cinética incidente se convierte en energía interna?
Resp. (*a*) 0,875; (*b*) 262,5 m/s; (*c*) 0,125.

*24. Demostrar que en un choque frontal inelástico con una masa estacionaria en el que la masa incidente m_1 queda en reposo la fracción de la energía cinética incidente convertida en energía interna es

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2}$$

25. Una masa de 5 kg con una velocidad inicial de 12 m/s efectúa un choque frontal inelástico con una masa estacionaria de 10 kg. El coeficiente de restitución del choque es 0,75. (*a*) ¿Cuáles son las velocidades finales de las masas? (*b*) ¿Cuál es el cambio que experimenta la energía interna del sistema?
Resp. (*a*) —2 y 7 m/s; (*b*) 105 J.

26. ¿Qué fracción de la energía cinética incidente se convierte en energía interna en un choque completamente inelástico entre partículas de igual masa?

BIBLIOGRAFÍA

MANLEY, M. T., C. D. THURSFIELD y J. B. MCGUINNES: «Aspects of Non-invasive Cardiac Monitoring», *Biomedical Engineering*, **9**:144 (1974). Descripción de un moderno balistocardiógrafo y discusión del tipo de información clínica que da.

STARR, Isaac y ABRAHAM NOORDERGRAFF: «Ballistocardiography in Cardiovascular Research», J. B. Lippincott Company, Filadelphia, 1967. Detalles completos sobre la teoría y la práctica de la balistocardiografía.

Parte 2: Propiedades de la Materia

Capítulo 7 Fluidos

Un sólido es una sustancia rígida que conserva su forma frente a fuerzas externas de distorsión, mientras que un fluido es una sustancia no rígida (gas o líquido) que no conserva su forma frente a tales fuerzas. En cambio, un fluido fluye siempre que actúan sobre él fuerzas de distorsión. Este capítulo discute las propiedades fundamentales de los fluidos, comunes tanto a gases como a líquidos. Estas propiedades se aplican lo mismo al flujo de aire a través de los tubos bronquiales que al flujo de sangre por los vasos sanguíneos. Las propiedades específicas de gases y líquidos se tratan en los capítulos 8 y 9.

7.1. LAS TRES FASES DE LA MATERIA

Al discutir las propiedades de la materia es conveniente clasificarla en tres fases: gaseosa, líquida y sólida. Muchas sustancias pueden pasar de una fase a otra por cambios de temperatura y de presión. El ejemplo más familiar es el agua. De hecho, es la única sustancia que corrientemente se encuentra en las tres fases (vapor, agua líquida y hielo). También hemos visto, sin duda, cómo una vela pasa de la fase sólida a la líquida cuando se la calienta y puede que hayamos visto alguna vez una experiencia con aire líquido, que es en realidad nitrógeno en su fase líquida. Semejantes transformaciones de sustancias de una fase a otra son corrientes en muchos procesos industriales y de laboratorio.

Un *sólido* se caracteriza por poseer un *volumen* y una *forma* definidos. Su forma sólo se puede modificar por la aplicación de una fuerza considerable, como por ejemplo la que se necesita para doblar una barra de acero. Esta rigidez de forma es el resultado de las intensas fuerzas existentes entre las moléculas del sólido, las cuales están unidas estrechamente en posiciones fijas. Para doblar un sólido, debe alterarse esta disposición molecular que es muy estable y ello requiere la aplicación de una fuerza intensa.

Un *líquido* se caracteriza por poseer un *volumen* definido, pero no una forma definida. Un líquido fluye para adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene. No obstante, tiene un volumen definido que conserva a pesar de los cambios de forma. Las moléculas de un líquido están casi tan apretadas como en un sólido,* pero no tienen posiciones fijas. Un líquido no posee rigidez porque sus moléculas se mueven libremente unas con respecto a otras. Por otro lado y prescindiendo de su forma, una cantidad dada de líquido ocupa un volumen definido, debido a la fuerte atracción entre sus moléculas.

Un *gas* se caracteriza por no poseer ni volumen ni forma definidos.

* Las moléculas de H_2O están en realidad más apretadas en el agua que en el hielo.

Un *gas* se expandirá hasta llenar cualquier recipiente en el que se le coloque, y si el recipiente se abre, el gas escapará por la abertura. (Sólo la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra impide que la atmósfera gaseosa se extienda por el espacio. La Luna, que ejerce solamente un sexto de la fuerza gravitatoria terrestre, no puede retener una atmósfera gaseosa.) En un gas diluido, las moléculas están tan separadas que sólo ejercen fuerzas entre sí cuando chocan. Por consiguiente, cada molécula se desplaza libremente en línea recta hasta que choca con otra molécula o con las paredes de su recipiente. Es este movimiento molecular libre el que da a un gas su natural expansibilidad. Además, todos los gases muy diluidos tienden a poseer las mismas propiedades porque la frecuencia de los choques moleculares es tan pequeña que el comportamiento de gases distintos no se ve afectado por diferencias en la naturaleza de las fuerzas entre sus moléculas.

Los gases poseen propiedades específicas como resultado de su expansibilidad mientras que los líquidos poseen también propiedades específicas por el hecho de presentar una superficie. Sin embargo, gases y líquidos tienen en común muchas propiedades que proceden de su falta de rigidez. La palabra *fluido* se emplea para referirnos a gases y líquidos cuando se tratan aquellas propiedades que son comunes a ambos. Estas propiedades comunes de los fluidos se estudian en este capítulo, mientras que las específicas de gases y líquidos se tratarán en los capítulos 8 y 9, respectivamente.

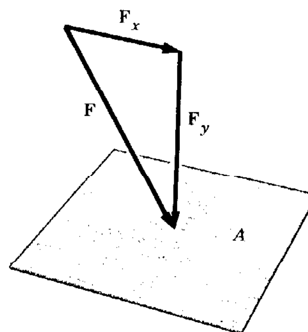


FIGURA 7.1
Una fuerza **F** que actúa sobre una superficie de área *A*. $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son, respectivamente, las componentes paralela y perpendicular a la superficie.

7.2. PRESIÓN

Las fuerzas que ejerce un fluido sobre el medio que le rodea vienen caracterizadas por una sola magnitud, la *presión* en el fluido, que juega un papel análogo al de la tensión en una cuerda flexible (apartado 2.2.). La presión en un fluido puede resultar de la aplicación de una fuerza externa o del peso del propio fluido (es decir, de la fuerza de la gravedad sobre él). A fin de considerar por separado estos dos orígenes de la presión del fluido, despreciaremos en este apartado los efectos de la gravedad.

Definición. *Presión* es la fuerza por unidad de área que se ejerce perpendicularmente a una superficie. Consideremos la fuerza **F** que actúa sobre la superficie de área *A* de la Fig. 7.1. La presión *p* sobre esta superficie es

$$p = \frac{F_y}{A} \qquad 7.1$$

donde F_y, es la componente de **F** perpendicular a la superficie.

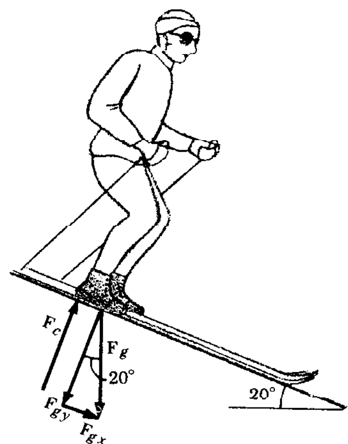


FIGURA 7.2
Esquiador sobre una pendiente. $\mathbf{F}_{gy}$ es la fuerza perpendicular (de contacto) que ejerce el esquiador sobre la pendiente.

Ejemplo 1. ¿Cuánto vale la presión ejercida por la nieve sobre los esquís de un esquiador de 80 kg que se desliza por una pendiente de 20° (Fig. 7.2)? El área de los dos esquís juntos es de 0,30 m².

La componente de la fuerza de gravedad perpendicular a la pendiente es

$$F_{gy} = F_g \cos 20^\circ = (80 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(0{,}940) = 737 \text{ N}$$

Esta fuerza es contrarrestada por una fuerza de contacto $\mathbf{F}_c$ de igual módulo que ejerce la nieve sobre los esquís. Por lo tanto, la presión sobre los esquís vale

$$p = \frac{737\ \mathrm{N}}{0.30\ \mathrm{m}^2} = 2460\ \mathrm{N/m}^2$$

El concepto de presión es de utilidad limitada en el estudio de los sólidos ya que, por definición, implica sólo una parte de la fuerza que puede estar presente. Además, el valor de la presión puede variar considerablemente de un punto a otro de un sólido. Por ejemplo, la presión sobre los esquís en el ejemplo 1 será diferente en los distintos puntos de los esquís, ya que la fuerza de contacto no se distribuye uniformemente a lo largo de ellos. Sin embargo, ninguna de estas dificultades aparece en los fluidos debido a dos de sus propiedades específicas.

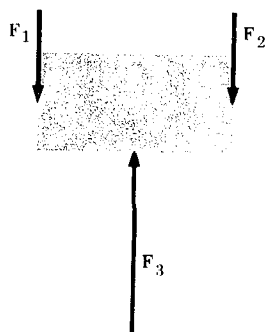


FIGURA 7.3
Tres fuerzas en acción sobre un objeto. Estas fuerzas tienden a doblar el objeto más que a desplazarlo o hacerlo girar.

Propiedad 1 de los fluidos. *Un fluido en reposo no puede ejercer una fuerza paralela a una superficie.* Este hecho notable tiene su origen en la falta de rigidez del fluido. Si el fluido ejerciese una fuerza paralela a una superficie, la superficie, por supuesto, ejercería una fuerza paralela sobre el fluido. La Fig. 7.3 muestra un objeto con dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ aplicadas paralelamente a dos lados y una fuerza $\mathbf{F}_3 = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ aplicada perpendicularmente a la base. La fuerza total y el momento total sobre el objeto son nulos, de modo que el objeto está en equilibrio, siempre que no se doble ni se rompa. Un sólido, que puede resistir o doblarse (hasta un cierto punto), estará en equilibrio bajo estas condiciones. Sin embargo, un fluido, que carece de rigidez, comenzará a fluir. Un fluido no puede permanecer en reposo si se aplican sobre él fuerzas paralelas, y de aquí que un fluido en reposo no pueda ejercer fuerzas paralelas a una superficie. Otro modo de decir esto es que *un fluido no posee coeficiente estático de rozamiento.* Imaginemos un bote de madera que flota en el agua. Si se aplica al bote una fuerza $\mathbf{F}$ paralela al agua, por pequeña que sea la fuerza, el bote no permanecerá en reposo porque el agua no puede aplicar una fuerza paralela para equilibrar $\mathbf{F}$. Sin embargo, una vez que el bote se pone en movimiento, la situación cambia, puesto que el fluido se mueve ahora con respecto al bote. Un fluido en movimiento ejerce una fuerza paralela a una superficie, cuyo módulo aumenta con la velocidad (Apart. 7.5.). Por consiguiente, el bote adquiere una aceleración bajo la acción de $\mathbf{F}$ hasta que alcanza la velocidad a la que el módulo de la fuerza de rozamiento del agua se hace igual al módulo de $\mathbf{F}$. De manera análoga, el aire (que es un fluido) ofrece poca resistencia a los objetos que se mueven lentamente, pero esta resistencia se hace grande para los objetos a gran velocidad.

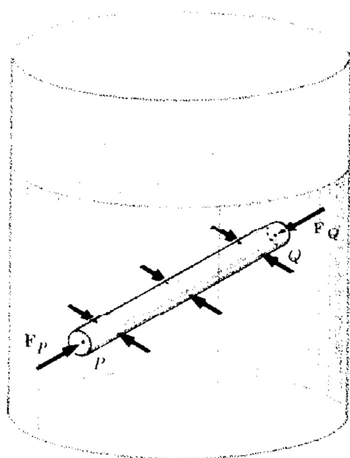


FIGURA 7.4
Fuerzas en una región cilíndrica de un fluido. La superficie del cilindro es un límite imaginario que define la región de interés.

OBSERVACIÓN. Un lubricante reduce el rozamiento entre dos objetos sólidos mediante la introducción de una delgada capa de fluido, como el aceite, entre sus superficies. Dado que el propio fluido no puede ejercer fricción estática, el rozamiento entre las superficies se ve grandemente reducido. El movimiento de las articulaciones del cuerpo está lubricado por el fluido sinovial, que da como resultado un coeficiente de fricción estática de sólo 0,015. Éste es mucho más pequeño que el que se puede obtener para superficies mecánicas. El pequeño valor del coeficiente de fricción es absolutamente esencial a causa de las grandes fuerzas de contacto que se ejercen en las articulaciones.

Propiedad 2 de los fluidos (ley de Pascal). *En ausencia de la gravedad, es decir,* despreciando el peso del propio fluido, *la presión en un fluido en reposo es la misma en todas partes.*

Esta propiedad queda verificada demostrando que en dos puntos P y Q cualesquiera del fluido la presión es la misma. De este modo, elijamos dos puntos P y Q en un fluido en reposo y consideremos el fluido que hay dentro de la región cilíndrica que se muestra en la Fig. 7.5. Puesto que el fluido está en reposo en cualquier punto, la fuerza total sobre este cilindro de fluido, como sobre otra región cualquiera del fluido, debe ser cero. Además, según la propiedad 1 de los fluidos, las fuerzas sobre esta región son perpendiculares a su superficie. Por lo tanto, si p_P es la presión en el punto P, y p_Q es la presión en el punto Q, existe una fuerza de módulo

$$F_P = p_P A$$

perpendicular al cilindro en P y una fuerza de módulo

$$F_Q = p_Q A$$

perpendicular al cilindro en Q, siendo A el área de cualquiera de los extremos del cilindro. Dado que estas fuerzas son paralelas al eje longitudinal del cilindro y todas las demás fuerzas son perpendiculares a este eje, las fuerzas F_P y F_Q deben tener el mismo módulo si la fuerza total sobre el eje ha de ser nula. Por lo tanto, tenemos

$$F_P = F_Q$$

luego $$p_P A = p_Q A \quad \text{o} \quad p_P = p_Q$$

Puesto que P y Q son dos puntos cualesquiera del fluido, esto demuestra que la presión es la misma en cualquier punto del fluido.

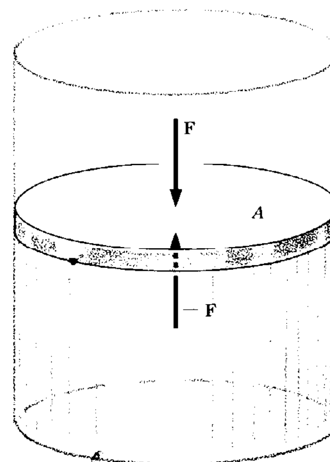


FIGURA 7.5
Fluido encerrado en un cilindro con un émbolo móvil de área A.

OBSERVACIÓN. La propiedad 1 es esencial en la demostración de la propiedad 2 porque nos asegura que las fuerzas sobre el cilindro no poseen componentes paralelas a su eje.

Para ver cómo se aplican en la práctica estas propiedades de los fluidos, consideremos un fluido contenido en un cilindro de sección transversal A (Fig. 7.6). Si se aplica al émbolo móvil que cierra la parte superior del cilindro una fuerza **F** dirigida hacia abajo, el fluido debe aplicar al émbolo, cuando éste está en reposo, la fuerza opuesta —**F**. Por lo tanto, en el equilibrio, la presión ejercida por el fluido sobre el émbolo es $p = F/A$, que, por la ley de Pascal, es también la presión en cualquier punto del fluido. (Recuérdese que en este apartado no se tiene en cuenta la gravedad.)

Supongamos ahora que este cilindro está conectado por un tubo a un cilindro más pequeño de sección transversal A' (Fig. 7.6). ¿Cuál es el módulo F' de la fuerza que debe aplicarse al émbolo más pequeño a fin de mantener el equilibrio? Dado que la presión es la misma en cualquier punto del fluido, la presión ejercida por el fluido sobre el cilindro pequeño debe ser también $p = F/A$. Por otro lado, la fuerza ejercida por el fluido sobre el émbolo más pequeño debe tener un módulo F' para equilibrar la fuerza aplicada, de modo que $p = F'/A'$. Igualando estos dos valores de la presión, tenemos

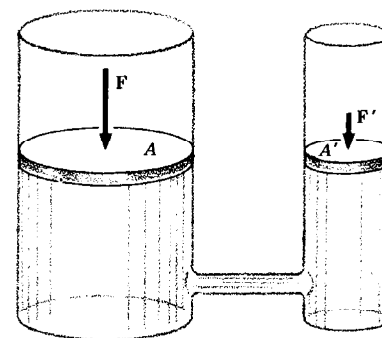


FIGURA 7.6
Dos cilindros provistos de émbolos móviles y conectados por un tubo.

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F'}{A'}$$

o

$$F' = pA' = \frac{A'}{A}F$$

Ejemplo 2. Si las áreas de las secciones transversales de los cilindros de la Fig. 7.6 valen $A = 0{,}1$ m² y $A' = 0{,}02$ m², ¿qué fuerza F' debe aplicarse al émbolo más pequeño para contrarrestar una fuerza $F = 90$ N aplicada al émbolo mayor?
La presión sobre el fluido es

$$p = \frac{F}{A} = \frac{900 \text{ N}}{0{,}1 \text{ m}^2} = 9000 \text{ N/m}^2$$

por lo tanto, la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido sobre el émbolo menor es

$$pA' = (9000 \text{ N/m}^2)(0{,}02 \text{ m}^2) = 180 \text{ N}$$

Por consiguiente, para mantener el sistema en equilibrio, se ha de aplicar una fuerza hacia abajo de sólo 180 N sobre el émbolo más pequeño. Éste es el principio del elevador hidráulico empleado corrientemente para levantar grandes pesos.

TABLA 7.1. **Factores de conversión entre unidades de presión.** Cada cifra indica el valor de una unidad de la columna de la izquierda en las unidades del encabezamiento de cada columna. Por ejemplo 1 lb/pulg² igual a 51,7 mm Hg.

	pascal (N/m² ‹ Pa)	dyn/cm²	lb/pie²	lb/pulg²	atm	bar	mbar	mm Hg (Torr) a 0° C	cm H_2O a 4° C
N/m²	1	10	$2{,}09\times10^{-2}$	$1{,}45\times10^{-4}$	$9{,}87\times10^{-6}$	10^{-5}	10^{-2}	$7{,}50\times10^{-3}$	$1{,}02\times10^{-2}$
dyn/cm²	10^{-1}	1	$2{,}09\times10^{-3}$	$1{,}45\times10^{-5}$	$9{,}87\times10^{-7}$	10^{-6}	10^{-3}	$7{,}50\times10^{-4}$	$1{,}02\times10^{-3}$
lb/pie²	47,9	479	1	$6{,}94\times10^{-3}$	$4{,}73\times10^{-4}$	$4{,}79\times10^{-4}$	0,479	0,359	0,488
lb/pulg²	$6{,}89\times10^{3}$	$6{,}89\times10^{4}$	144	1	$6{,}80\times10^{-2}$	$6{,}89\times10^{-2}$	68,9	51,7	70,3
atm	$1{,}01\times10^{5}$	$1{,}01\times10^{6}$	$2{,}12\times10^{3}$	14,7	1	1,01	$1{,}01\times10^{3}$	760	$1{,}03\times10^{3}$
bar	10^{5}	10^{6}	$2{,}09\times10^{3}$	14,5	0,987	1	10^{3}	750	$1{,}02\times10^{3}$
mbar	10^{2}	10^{3}	2,09	$1{,}45\times10^{-2}$	$9{,}87\times10^{-4}$	10^{-3}	1	0,750	1,02
mm Hg (Torr) a 0° C	133	$1{,}33\times10^{3}$	2,78	$1{,}93\times10^{-2}$	$1{,}32\times10^{-3}$	$1{,}33\times10^{-3}$	1,33	1	1,36
cm H_2O a 4° C	98,1	981	2,05	$1{,}42\times10^{-2}$	$9{,}68\times10^{-4}$	$9{,}81\times10^{-4}$	0,981	0,736	1

Las dimensiones de la presión son

$$[p] = \left[\frac{f}{l^2}\right]$$

Definición. La unidad SI de presión es el Pascal (Pa), que es un newton por metro cuadrado (N/m²),

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Desgraciadamente no es una unidad muy práctica, de modo que rara vez se utiliza. Unidades más comunes son las *atmósferas* (atm), las

libras por pulgada cuadrada (lb/pulg^2), los milímetros de mercurio (mm Hg, o Torr) y los *milibares* (mbar). Por ejemplo, la presión barométrica podría expresarse como 989 mbar, mientras que la presión sanguínea como 120 mm Hg (o 120 Torr).

Existen otras unidades que se utilizan frecuentemente en medicina y en ciencia, de modo que hay que saber pasar con facilidad de unas a otras. La tabla 7.1 da los factores de conversión entre las unidades más comunes. El origen y objeto de algunas de estas unidades será explicado en el próximo apartado.

OBSERVACIÓN. En la tabla 7.1, bar, atm, mm Hg y cm H_2O son abreviaturas de los nombres de las unidades. En un cálculo los mm de mm Hg no pueden suprimirse como los m^2 en N/m^2. Las cuatro letras son parte de la abreviatura, lo mismo que las letras a-t-m. No podemos, pues, suprimir parte de una abreviatura.

7.3. EL EFECTO DE LA GRAVEDAD SOBRE LOS FLUIDOS

La ley de Pascal sólo es cierta en tanto que la fuerza de la gravedad sobre el fluido pueda despreciarse, en cuyo caso se puede considerar que la presión es producida enteramente por fuerzas externas, por ejemplo, los émbolos de las Figs. 7.6 y 7.7. La importancia relativa de la fuerza de la gravedad sobre un fluido depende principalmente de la densidad de éste.

Densidad

Definición. La *densidad** ρ de una sustancia es el cociente entre su masa m y su volumen V,

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad 7.2$$

La densidad es una propiedad característica de una sustancia, independiente de su volumen o su masa.

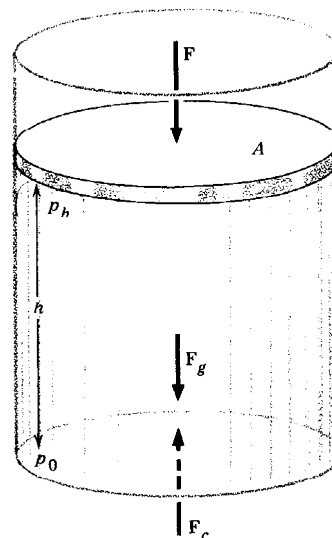


FIGURA 7.7
Fuerzas sobre el fluido contenido en un cilindro. $\mathbf{F}_g$ es la fuerza de la gravedad (peso) del propio fluido, en tanto que **F** y $\mathbf{F}_c$ son las fuerzas ejercidas sobre el fluido por el émbolo y por la base del cilindro.

Ejemplo 1. La masa de 3 l (3000 cm^3) de etanol es 2367 g. ¿Cuál es la densidad del etanol? ¿Cuál es la masa de 5 cm^3 de etanol?

Por la definición de densidad (Ec. 7.2) tenemos

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2367 \text{ g}}{3000 \text{ cm}^3} = 0{,}789 \text{ g/cm}^3$$

Como la densidad es una propiedad de la sustancia, la masa de 5 cm^3 de etanol es

$$m = V\rho = (5 \text{ cm}^3)(0{,}789 \text{ g/cm}^3) = 3{,}94 \text{ g}$$

La masa de 1 cm^3 es evidentemente 0,789 g, lo que demuestra que la densidad de una sustancia es precisamente su masa por unidad de volumen.

Las densidades de algunos sólidos, líquidos y gases comunes vienen dadas en la tabla 7.2. Estas densidades se midieron a una presión de 1 atm (760 mm Hg = 1,01 × 10^5 N/m^2) y a la temperatura indicada. La densidad de un sólido o un líquido varía muy poco con los cam-

* ρ es la letra griega rho.

bios de temperatura y presión, mientras que la densidad de un gas depende fuertemente de ambas. Esto puede verse en la Tabla 7.2 comparando la variación de la densidad del aire con la temperatura y la correspondiente del agua.

TABLA 7.2. **Densidades de algunas sustancias comunes a 1 atm (760 mm Hg).**

Sustancia	Temperatura °C	Densidad g/cm³	Densidad kg/m³
Sólidos			
Aluminio	20	2,7	2 700
Hueso	20	1,6	1 600
Cobre	20	8,5	8 500
Vidrio	20	2,6	2 600
Granito	20	2,7	2 700
Hierro	20	7,7	7 700
Plomo	20	11,3	11 300
Acero	20	7,7	7 700
Agua (hielo)	0	0,917	917
Madera de arce	20	0,7	700
Líquidos			
Aire (líquido)	−183	1,14	1 140
Plasma sanguíneo	37	1,03	1 030
Sangre	37	1,05	1 050
Etanol (alcohol etílico)	20	0,791	791
Glicerina	0	1,26	1 260
Hidrógeno (líquido)	−253	0,07	70
Mercurio	0	13,6	13 600
Oxígeno (líquido)	−183	1,14	1 140
Triclorometano (cloroformo)	20	1,483	1 483
Agua pura	4	1,00	1 000
	30	0,996	996
	100	0,958	958
Agua del mar	15	1,025	1 025
Gases			
Aire	0	0,00130	1,30
	10	0,00125	1,25
	20	0,00120	1,20
	30	0,00116	1,16
Argón	0	0,00178	1,78
Dióxido de carbono	0	0,00198	1,98
Helio	0	0,000178	0,178
Hidrógeno	0	0,0000899	0,0899
Nitrógeno	0	0,00125	1,25
Oxígeno	0	0,00143	1,43
Agua (vapor)	100	0,000596	0,596

OBSERVACIÓN. La densidad del agua a 4° C es exactamente de 1,000 g/cm³ porque originariamente el gramo fue definido como la masa de un centímetro cúbico de agua pura a esta temperatura.

Las densidades se expresan la mayoría de las veces en gramos por centímetro cúbico, que es una unidad cgs. La unidad SI de densidad es el kilogramo por metro cúbico. Es fácil pasar de una unidad a otra puesto que 1 kg = 10^3 g y 1 m = 10^2 cm. Así tenemos

$$1 \text{ kg/m}^3 = \frac{10^3 \text{ g}}{(10^2 \text{ cm})^3}$$

$$= \frac{10^3 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

y por tanto

$$1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

De aquí que para convertir gramos por centímetro cúbico en kilogramos por metro cúbico sólo hemos de multiplicar por 10^3. La tabla 7.2 da las densidades en ambas unidades.

Propiedad 3 de los fluidos

Para estudiar el efecto de la gravedad sobre la presión, consideremos el fluido dentro del cilindro de la Fig. 7.7. Se aplica una fuerza **F** perpendicular al émbolo, que tiene una sección transversal de área A, de tal manera que la presión directamente bajo el émbolo es

$$p_0 = \frac{F}{A}$$

El subíndice 0 indica que ésta es la presión en la parte superior del fluido. Si la gravedad fuese despreciada, la presión p_h en la parte inferior del fluido sería, de acuerdo con la ley de Pascal, igual a p_0. Sin embargo, a causa de la gravedad, la fuerza total hacia abajo sobre el fluido es $\mathbf{F} + \mathbf{F}_g$, donde $\mathbf{F}_g$ es la fuerza de la gravedad sobre el fluido. Puesto que el fluido está en equilibrio, debe existir una fuerza de contacto hacia arriba $\mathbf{F}_c = -(\mathbf{F} + \mathbf{F}_g)$ ejercida por el fondo del cilindro sobre el fluido. La reacción a $\mathbf{F}_c$ es la fuerza $\mathbf{R}_c = -\mathbf{F}_c = \mathbf{F} + \mathbf{F}_g$ que ejerce el fluido hacia abajo sobre el fondo del cilindro. Así la presión p_h en el fondo es

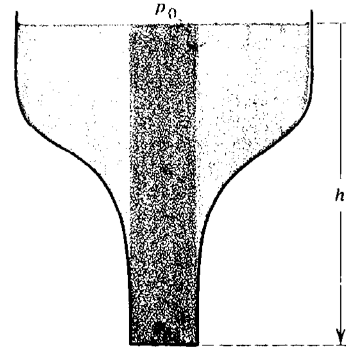


FIGURA 7.8
Recipiente en forma de embudo lleno de agua. La base sólo soporta la columna de agua que está directamente por encima de ella, de modo que p_h viene dada por la Ec. 7.4.

$$p_h = \frac{F + F_g}{A} = \frac{F}{A} + \frac{F_g}{A}$$

$$= p_0 + \frac{F_g}{A} \qquad 7.3$$

La presión en la parte inferior del fluido es mayor que en la superficie debido al peso del propio fluido.
Este aumento de presión con la profundidad está relacionado con la densidad ρ del fluido. Dado que el volumen del fluido en el cilindro es $V = Ah$, donde h es la altura del fluido, la masa de éste es $m = \rho V = \rho Ah$. Por lo tanto, el peso del fluido es

$$F_g = mg = \rho Ahg$$

y, de acuerdo con esta expresión, es evidente que la Ec. 7.3 puede escribirse

$$p_h = p_0 + \rho gh \qquad 7.4$$

o bien

$$p_h - p_0 = \rho gh \qquad 7.5$$

La ecuación 7.5 da la corrección a la ley de Pascal (propiedad 2 de los fluidos) debida al peso del fluido. Si ρ y h son ambas pequeñas,

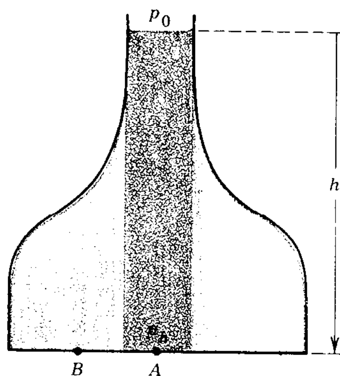


FIGURA 7.9
Recipiente en forma de embudo lleno de agua. El área sombreada de la base en torno al punto A soporta la columna de agua que está directamente encima de ella, de aquí que la presión en A venga dada por la Ec. 7.4.

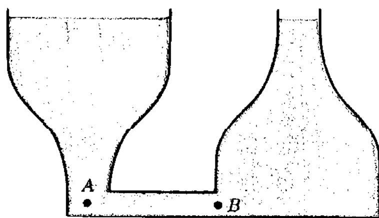


FIGURA 7.10
Cuando los recipientes de las Figs. 7.9 y 7.10 se conectan, el agua alcanza la misma altura en ambos.

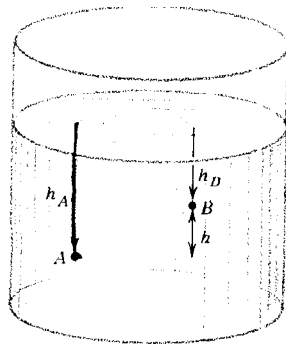


FIGURA 7.11
La presión en dos puntos A y B de un fluido.

la diferencia de presión debida a la gravedad puede ser despreciable. Sin embargo, si ρ o h es grande, la diferencia de presión puede ser importante.

La ecuación 7.4 es mucho más general que lo que pudiera indicar su sencilla deducción. Por ejemplo, la Fig. 7.8 muestra un recipiente en forma de embudo lleno de agua. La presión p_0 en la superficie libre del agua es precisamente la presión de la atmósfera. La presión p_h en el fondo viene dada por la Ec. 7.4, donde h es la distancia vertical desde la superficie al fondo. Este resultado algo sorprendente se deduce del hecho de que la fuerza ejercida por el fondo sólo tiene que soportar la columna de agua que está directamente sobre él. El resto del agua está soportado por los costados del recipiente.

Quizá sea más sorprendente que la presión p_h en el fondo del recipiente de la Fig. 7.9 venga dada también por la Ec. 7.4. La región sombreada en esta figura muestra que hay una columna de agua de altura h sobre el punto A del fondo, de modo que la presión en A se calcula por medio de la Ec. 7.4. Pero la presión debe ser la misma en todos los puntos del fondo porque si la presión en A fuese mayor que en B, el agua fluiría de A a B.

Puede demostrarse la validez de la Ec. 7.4 llenando con agua los recipientes de las Figs. 7.8 y 7.9 y conectándolos por medio de un tubo, como se indica en la Fig. 7.10. Los niveles de agua en los recipientes se ajustan ellos mismos hasta que, en el equilibrio, las presiones en los puntos A y B son iguales. Esto significa que si la Ec. 7.4 es válida, el agua alcanzará la misma altura en los dos recipientes. A este resultado se llega experimentalmente. La presión en un punto de un fluido depende de la distancia del punto a la superficie libre del fluido, pero no depende de la forma del recipiente.

Por supuesto, no hay nada especial con respecto al fondo del recipiente. La presión en un punto del interior del fluido también viene dada por la Ec. 7.4, donde h es la distancia del punto a la superficie. Así, la presión en un fluido aumenta continuamente con la profundidad bajo la superficie.

Consideremos dos puntos A y B en un fluido (Fig. 7.11). Sea h_A la distancia vertical que separa a A de la superficie y h_B la que separa a B. Según la Ec. 7.4, las presiones p_A y p_B en estos puntos son

$$p_A = p_0 + \rho g h_A$$

y

$$p_B = p_0 + \rho g h_B$$

Restemos la segunda ecuación de la primera para obtener

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= (p_0 + \rho g h_A) - (p_0 + \rho g h_B) \\ &= \rho g h_A - \rho g h_B = \rho g(h_A - h_B) \end{aligned}$$

donde $h_A - h_B$ es la distancia vertical entre los puntos A y B. Ésta es la generalización de la ley de Pascal exigida para incluir el efecto de la gravedad. Esto puede enunciarse formalmente de la siguiente manera:

Propiedad 3 de los fluidos. *La presión en un fluido es la misma para todos los puntos de igual profundidad y la diferencia de presión entre dos puntos A y B, de profundidades respectivas h_A y h_B, es*

$$p_A - p_B = \rho g h_A - \rho g h_B = \rho g(h_A - h_B) \qquad 7.6$$

Aquí h_A y h_B son positivas cuando se miden por debajo de la superficie del fluido (Fig. 7.11).

OBSERVACIÓN. La propiedad 3 supone que la densidad del fluido es la misma en todos los puntos entre A y B. La densidad de un líquido varía muy poco con los cambios de temperatura y presión, de modo que en la mayoría de las situaciones prácticas es válida esta suposición. Por otro lado, la densidad de un gas varía apreciablemente con los cambios de temperatura y presión, de aquí que la densidad puede no ser la misma en todos los puntos. En este caso habría que utilizar la densidad media entre A y B.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la presión sobre un buzo situado 10 m por debajo de la superficie de un lago?

Sea p_0 la presión en la superficie (presión atmosférica) y p_A la presión a 10 m de profundidad. Con $h_0 = 0$, la Ec. 7.6 puede escribirse así

$$p_A - p_0 = \rho g h_A - \rho g h_0 = \rho g h_A$$

La densidad del agua dulce es $1{,}0 \times 10^3$ kg/m³ (tabla 7.2), luego la presión p_A a una profundidad $h_A = 10$ m es

$$\begin{aligned} p_A &= p_0 + (1{,}00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}80 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) \\ &= p_0 + 0{,}980 \times 10^5 \frac{\text{kg-m/s}^2}{\text{m}^2} \\ &= p_0 + 0{,}980 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Aquí hemos hecho uso de que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg-m/s}^2$. La presión p_0 en la superficie es la presión atmosférica que es de unos $1{,}0 \times 10^5$ N/m². La presión a 10 m de profundidad es por lo tanto $p_A = 1{,}98 \times 10^5$ N/m², o sea casi el doble de la presión en la superficie. Si el buzo estuviese en agua del mar, el cálculo sería el mismo excepto en el valor de la densidad. Utilizando la densidad del agua del mar dada en la tabla 7.2 se obtiene

$$\begin{aligned} p_A &= p_0 + (1{,}025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}80 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) \\ &= p_0 + 1{,}04 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Presión atmosférica

Vivimos en el fondo de un «mar» de aire, la atmósfera, que ejerce una presión p_0 que al nivel del mar es de unas 14,7 lib/pulg², o sea $1{,}01 \times 10^5$ N/m². La unidad de presión denominada atmósfera se define mediante la relación

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg} = 1{,}0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Esta unidad es igual a la presión media de la atmósfera al nivel del mar, aunque la presión real varía en un 5 % según las condiciones meteorológicas. La presión media en un lugar situado por encima del nivel del mar es menor que la medida a este nivel, debido a que hay menos aire por encima de él.

La ecuación 7.6 puede ser empleada para calcular la presión (media) del aire p_A en un lugar situado por encima del nivel del mar, pero se requiere un poco de cuidado. Las distancias en la Ec. 7.6 se miden

desde la parte superior del fluido, mientras que la elevación de un lugar geográfico se mide a partir del nivel del mar, es decir, desde el fondo del fluido. Sin embargo, puesto que en la Ec. 7.6 sólo interviene la diferencia de distancias por debajo de la superficie, estas distancias pueden medirse hacia abajo a partir de un nivel de referencia apropiado.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la presión atmosférica p_A en la ciudad de México, situada a 1500 m sobre el nivel del mar?

Para hallar la presión p_A en la ciudad de México es conveniente medir las distancias a partir de allí. Esto es, se hace h_A igual a cero, de modo que la profundidad a nivel del mar es $h_0 = 1500$ m. (Recuérdese que las distancias son positivas medidas hacia abajo.) La tabla 7.2 da la densidad del aire a nivel del mar igual a 1,2 kg/m³. En la ciudad de México la densidad es alrededor de 1,0 kg/m³, luego habría que emplear una densidad media de 1,1 kg/m³. Entonces la Ec. 7.6 da

$$\begin{aligned} p_A - p_0 &= \rho g h_A - \rho g h_0 = -\rho g h_0 \\ &= -(1{,}1\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}5 \times 10^3\ \text{m}) \\ &= -0{,}16 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \end{aligned}$$

Como era de esperar, la presión en la ciudad de México es menor que la presión a nivel del mar. Con $p_0 = 1{,}01 \times 10^5$ N/m², la presión en la ciudad de México es

$$\begin{aligned} p_A &= p_0 - 0.16 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \\ &= 0{,}85 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \end{aligned}$$

La densidad del aire disminuye con la elevación sobre el nivel del mar porque disminuye la presión. Si la densidad fuese una constante, igual a su valor a nivel del mar, la altura de la atmósfera podría calcularse fácilmente a partir de la Ec. 7.6. La presión p_A en la cima de esta atmósfera hipotética es, por supuesto, cero y la distancia h_A igualmente cero. Si h_0 es la distancia a la que se encuentra el nivel del mar medida a partir del límite de la atmósfera, la Ec. 7.6 da

$$p_A - p_0 = \rho g h_A - \rho g h_0$$

o sea

$$0 - p_0 = 0 - \rho g h_0$$

de donde

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1{,}0 \times 10^5\ \text{N/m}^2}{1{,}2\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2} \\ &= 8.5 \times 10^3\ \text{m} = 8.5\ \text{km} \end{aligned}$$

Así, una atmósfera de densidad constante tendría sólo 8,5 km (5,3 millas) de altura. La atmósfera real se extiende mucho más arriba, pero con densidad decreciente. La densidad real a una altitud de 8,5 km es 0,5 kg/m³, que es menos de la mitad de la densidad a nivel del mar. A una altitud de 18 km la densidad es sólo un décimo del valor a nivel del mar.

Los organismos vivos no son aplastados por la presión de la atmósfera porque los fluidos que llevan dentro están prácticamente a la misma presión. Por ejemplo, la presión del fluido en el interior de una célula es igual a la que hay fuera, de modo que no existe fuerza neta sobre la pared de la célula. La presión sanguínea en las arterias es mayor que la atmosférica, de aquí que exista una fuerza hacia afue-

desde la parte superior del fluido, mientras que la elevación de un lugar geográfico se mide a partir del nivel del mar, es decir, desde el fondo del fluido. Sin embargo, puesto que en la Ec. 7.6 sólo interviene la diferencia de distancias por debajo de la superficie, estas distancias pueden medirse hacia abajo a partir de un nivel de referencia apropiado.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la presión atmosférica p_A en la ciudad de México, situada a 1500 m sobre el nivel del mar?
Para hallar la presión p_A en la ciudad de México es conveniente medir las distancias a partir de allí. Esto es, se hace h_A igual a cero, de modo que la profundidad a nivel del mar es $h_0 = 1500$ m. (Recuérdese que las distancias son positivas medidas hacia abajo.) La tabla 7.2 da la densidad del aire a nivel del mar igual a 1,2 kg/m³. En la ciudad de México la densidad es alrededor de 1,0 kg/m³, luego habría que emplear una densidad media de 1,1 kg/m³. Entonces la Ec. 7.6 da

$$\begin{aligned} p_A - p_0 &= \rho g h_A - \rho g h_0 = -\rho g h_0 \\ &= -(1.1\ \text{kg/m}^3)(9,8\ \text{m/s}^2)(1,5 \times 10^3\ \text{m}) \\ &= -0,16 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \end{aligned}$$

Como era de esperar, la presión en la ciudad de México es menor que la presión a nivel del mar. Con $p_0 = 1,01 \times 10^5$ N/m², la presión en la ciudad de México es

$$\begin{aligned} p_A &= p_0 - 0.16 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \\ &= 0,85 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \end{aligned}$$

La densidad del aire disminuye con la elevación sobre el nivel del mar porque disminuye la presión. Si la densidad fuese una constante, igual a su valor a nivel del mar, la altura de la atmósfera podría calcularse fácilmente a partir de la Ec. 7.6. La presión p_A en la cima de esta atmósfera hipotética es, por supuesto, cero y la distancia h_A igualmente cero. Si h_0 es la distancia a la que se encuentra el nivel del mar medida a partir del límite de la atmósfera, la Ec. 7.6 da

$$p_A - p_0 = \rho g h_A - \rho g h_0$$

o sea

$$0 - p_0 = 0 - \rho g h_0$$

de donde

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1,0 \times 10^5\ \text{N/m}^2}{1,2\ \text{kg/m}^3 \times 9,8\ \text{m/s}^2} \\ &= 8.5 \times 10^3\ \text{m} = 8.5\ \text{km} \end{aligned}$$

Así, una atmósfera de densidad constante tendría sólo 8,5 km (5,3 millas) de altura. La atmósfera real se extiende mucho más arriba, pero con densidad decreciente. La densidad real a una altitud de 8,5 km es 0,5 kg/m³, que es menos de la mitad de la densidad a nivel del mar. A una altitud de 18 km la densidad es sólo un décimo del valor a nivel del mar.
Los organismos vivos no son aplastados por la presión de la atmósfera porque los fluidos que llevan dentro están prácticamente a la misma presión. Por ejemplo, la presión del fluido en el interior de una célula es igual a la que hay fuera, de modo que no existe fuerza neta sobre la pared de la célula. La presión sanguínea en las arterias es mayor que la atmosférica, de aquí que exista una fuerza hacia afue-

ra sobre las paredes de las arterias. Ésta queda compensada por las fuerzas hacia dentro ejercidas por la tensión en las paredes.

Presión manométrica

Definición. *La presión manométrica* $\bar{p}$ es la diferencia entre la presión absoluta p de un fluido y la presión atmosférica p_0:

$$\bar{p} = p - p_0 \qquad 7.7$$

Las presiones en los fluidos del cuerpo siempre son presiones manométricas.

Por ejemplo, la presión media de la sangre en el hombre, al ser bombeada por el corazón en la aorta, es de unas 2 lb/pulg² (100 mm Hg). Ésta es la presión manométrica, o sea, lo que excede la presión de la sangre de la presión atmosférica. Ésta es la magnitud de interés fisiológico, puesto que se trata de la presión que es mantenida activamente por el sistema circulatorio. Si la presión atmosférica es 760 mm Hg, la Ec. 7.7 muestra que la presión absoluta de la sangre en la aorta es

$$p = p_0 + \bar{p} = 760 \text{ mm Hg} + 100 \text{ mm Hg} = 860 \text{ mm Hg}$$

OBSERVACIÓN. La presión manométrica real en la aorta varía considerablemente durante cada ciclo cardíaco. La presión máxima *(sistólica)*, que es corrientemente de unos 120 mm Hg, tiene lugar cuando el corazón se contrae, y la presión mínima *(diastólica)*, que es de unos 80 mm Hg, ocurre cuando el corazón se relaja. A efectos de discusión sólo es necesario a menudo considerar la presión manométrica media en la aorta, que viene a ser de unos 100 mm Hg.

La sangre fluye de la aorta a las arterias principales del cuerpo. Estas arterias, a su vez, se ramifican en vasos cada vez más pequeños, alcanzando en último término los capilares que son los vasos más pequeños del cuerpo. Una arteria de diámetro mayor que 0,3 cm ofrece poca resistencia al flujo de la sangre, de modo que la presión en ella sólo depende de su distancia vertical a la aorta, de acuerdo con la Ec. 7.6. (La presión en los vasos sanguíneos más pequeños se discute en el Apart. 7.5.)

Ejemplo 4. En una persona que permanece erguida, los pies están a unos 1,35 m por debajo del corazón. ¿Cuál es la diferencia entre la presión p_B de la sangre en una arteria del pie y la presión p_A de la sangre en la aorta?

En la tabla 7.2 la densidad de la sangre es $\rho = 1{,}05 \times 10^3$ kg/m³, por lo cual la diferencia de presiones es

$$\begin{aligned} p_B - p_A &= \rho g h \\ &= (1{,}05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)(1{,}35 \text{ m}) \\ &= 1{,}37 \times 10^4 \text{ Pa} \\ &= (1{,}37 \times 10^4)(7{,}50 \times 10^{-3}) \text{ mm Hg} \\ &= 103 \text{ Torr} \end{aligned}$$

En este cálculo se ha utilizado la tabla 7.1 para pasar de newtons por metro cuadrado a milímetros de mercurio.
La diferencia $p_B - p_A$ de dos presiones absolutas es igual a la diferencia $p_B - p_A$ de las presiones manométricas correspondientes. Esto se deduce de la Ec. 7.7 porque

$$p_A = \bar{p}_A + p_0 \qquad \text{y} \qquad p_B = \bar{p}_B + p_0$$

de modo que

$$\begin{aligned} p_B - p_A &= (\bar{p}_B + p_0) - (\bar{p}_A + p_0) \\ &= \bar{p}_B - \bar{p}_A \end{aligned}$$

Así, la presión manométrica arterial $\bar{p}_B$ en los pies es 103 Torr mayor que la presión manométrica $\bar{p}_A$ de la aorta. Si se toma $\bar{p}_A$ igual a 100 Torr, esto significa que $\bar{p}_B$ es 203 Torr, o dos veces la presión de la aorta. Esta presión elevada origina a veces hinchazón en las piernas de las personas que tienen que permanecer de pie todo el día.
En posición erguida, la parte superior de la cabeza se encuentra a unos 0,45 m por encima de la aorta. Mediante un cálculo similar a este último, se obtiene que la presión sanguínea en la cabeza es menor que en la aorta en 35 Torr. Estas presiones son iguales cuando el cuerpo está tendido boca abajo, dado que entonces la cabeza y el corazón están al mismo nivel. Por lo tanto, la presión sanguínea en la cabeza desciende desde 100 a 65 Torr cuando una persona pasa de una posición tendida a otra erguida. Para mantener un flujo constante de sangre al cerebro, las arterias de la cabeza se dilatan para así compensar la caída de presión. Como este ajuste no es instantáneo, puede aparecer una momentánea sensación de mareo si una persona se incorpora con demasiada rapidez.

Ejemplo 5. La cabeza de una jirafa está a 2,5 m por encima de su corazón. ¿Cuál es la diferencia entre la presión de la sangre de una jirafa en el corazón y en la cabeza?
La diferencia entre la presión manométrica $\bar{p}_B$ en el corazón y la presión manométrica $\bar{p}_A$ en la cabeza es

$$\begin{aligned} \bar{p}_A - \bar{p}_B = \rho g h &= (1{,}05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)(2{,}5 \text{ m}) \\ &= 2{,}6 \times 10^4 \text{ Pa} = 193 \text{ Torr} \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. La presión $\bar{p}_A$ de la sangre cuando entra en la cabeza de la jirafa ha de ser como mínimo de 60 Torr para empujar la sangre a través del cerebro. Por consiguiente, la presión en el corazón ha de ser por lo menos

$$\bar{p}_B = \bar{p}_A + 193 \text{ Torr} = 253 \text{ Torr}$$

que es mayor que la presión aórtica en cualquier otro mamífero. Las jirafas han sido recientemente estudiadas para descubrir cómo soportan estas presiones extraordinarias (Warren, 1974).

Normalmente la presión absoluta es positiva,* mientras que la presión manométrica puede ser positiva o negativa. Una presión manométrica negativa significa simplemente que la presión absoluta es menor

* La presión absoluta negativa se discute en el Apart. 9.5.

que la atmosférica. Por ejemplo, en la respiración, los pulmones producen una presión menor que la atmosférica, de aquí que el aire a presión atmosférica se vea forzado a penetrar en ellos. Durante una inhalación sosegada, la presión manométrica en los pulmones es alrededor de —7 cm H_2O. Si la presión atmosférica es 1030 cm H_2O, la Ec. 7.7. muestra que la presión absoluta en los pulmones es

$$p = p_0 + \bar{p} = 1030 \text{ cm } H_2O + (-7 \text{ cm } H_2O) = 1023 \text{ cm } H_2O$$

El manómetro

La presión manométrica se mide fácilmente con un dispositivo conocido con el nombre de *manómetro de tubo abierto*. Consiste en un tubo en forma de U lleno parcialmente con un líquido, generalmente mercurio o agua. El tubo se monta en posición vertical con una regla graduada detrás de él (Fig. 7.12). Un extremo del tubo se conecta al vaso cuya presión manométrica se desea medir y el otro extremo se deja abierto a la atmósfera. En la Fig. 7.12 el manómetro está midiendo la presión pulmonar p durante la espiración. El individuo exhala en el lado izquierdo del manómetro, de modo que la presión en el punto B es p. Dado que la presión en el punto O es precisamente la presión atmosférica p_0, la presión p_A en el punto A viene dada por

$$p_A - p_0 = \rho g(h_A - h_0) = \rho g h$$

donde h_A y h_0 son las distancias de los puntos A y O medidas a partir del borde superior de la regla graduada. Según la propiedad 3 de los fluidos la presión en B es igual a la presión en A porque estos puntos están al mismo nivel. Por lo tanto, la presión absoluta p en los pulmones viene dada por

$$p = p_0 + \rho g h$$

y su presión manométrica es precisamente $\rho g h$. Así, el manómetro de tubo abierto mide directamente la presión manométrica en función de la densidad del líquido y la diferencia de alturas h de las dos columnas de líquido.

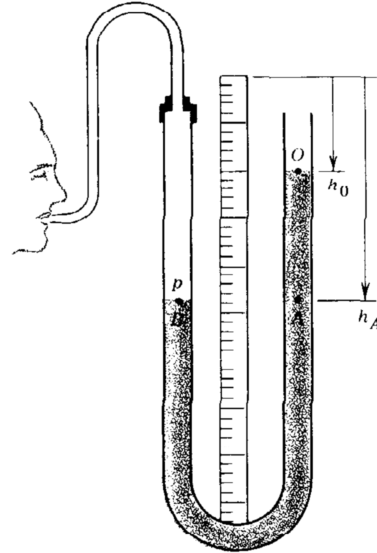


FIGURA 7.12
Manómetro de mercurio midiendo la presión pulmonar durante la espiración.

Ejemplo 6. Con la espiración máxima una persona que sopla en un lado de un manómetro de agua produce una diferencia de 65 cm entre las alturas de las dos columnas de agua (Fig. 7.12). ¿Cuál es la presión manométrica ejercida por los pulmones de dicha persona?
En este problema, $h = 0{,}65$ m y $\rho = 1{,}00 \times 10$ kg/m³, por lo cual la presión manométrica es

$$\bar{p} = \rho g h = (1{,}00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(0{,}65 \text{ m})$$
$$= 6{,}37 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

OBSERVACIÓN. Asimismo esta presión puede expresarse directamente como 65 cm H_2O, lo cual quiere decir que se trata de una presión suficiente para levantar 65 cm una columna de agua. Por lo tanto 65 cm H_2O equivalen a $6{,}37 \times 10^3$ Pa, luego

$$1 \text{ cm } H_2O = \frac{6370 \text{ N/m}^2}{65} = 98 \text{ Pa}$$

Ésta es la conversión de centímetros de agua en pascals dada en la tabla 7.1.

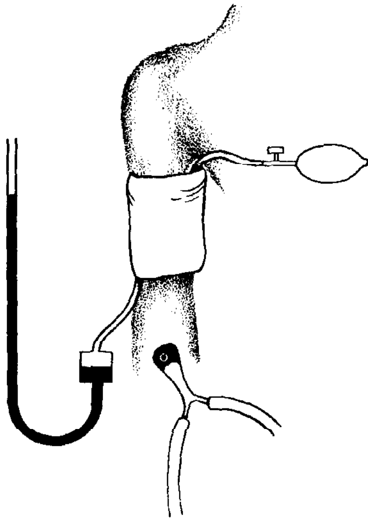


FIGURA 7.13
Manómetro de mercurio midiendo la presión sanguínea. El manómetro está conectado a una bolsa cerrada que puede hincharse con aire al apretar la pera de goma.



FIGURA 7.14
Medida de la presión sanguínea por medio de un manómetro clínico con una sola columna visible de mercurio.
(W. A. Baum Co. Inc.)

La presión sanguínea

La presión sanguínea se mide utilizando un manómetro de mercurio. El instrumento está unido a una bolsa cerrada que se arrolla alrededor del brazo (Figs. 7.13 y 7.14). En primer lugar, la presión del aire en la bolsa se eleva bien por encima de la presión sanguínea sistólica inyectando aire dentro de ella. Esto aplasta la arteria braquial del brazo interrumpiendo el flujo de sangre en las arterias del antebrazo. A continuación se suelta gradualmente el aire de la bolsa al tiempo que se utiliza un estetoscopio para escuchar la vuelta del pulso al antebrazo. El primer sonido ocurre cuando la presión en la bolsa es exactamente igual a la presión sistólica, porque entonces la sangre a esa presión máxima puede abrirse paso a través de la arteria aplastada. Este limitado flujo de sangre hace en la arteria un característico sonido de golpeteo que se detecta con el estetoscopio. La diferencia en las alturas (en milímetros) de las columnas de mercurio cuando aparece por primera vez este sonido es igual por lo tanto a la presión sistólica expresada en milímetros de mercurio. Por último, se deja escapar más aire de la bolsa para bajar más la presión en ella. El sonido cesa cuando la presión iguala a la presión diastólica, porque entonces la sangre a baja presión es capaz de pasar a través de la arteria del brazo. La diferencia en las alturas de las dos columnas de mercurio cuando cesa el sonido es igual a la presión sanguínea diastólica en milímetros de mercurio. Para asegurar que las presiones medidas son iguales a las presiones en la aorta, debe colocarse la bolsa en el brazo a la altura del corazón.

Los manómetros clínicos consisten en una columna larga y estrecha conectada a una columna corta y ancha, como se muestra en la Fig. 7.13. Sólo es visible la columna larga (Fig. 7.14), mientras que la columna corta permanece en el interior del instrumento. La columna larga viene calibrada por el fabricante para leer la verdadera diferencia entre la altura del mercurio en las dos columnas. Por ejemplo, a una presión de 100 mm Hg el mercurio en la columna corta puede estar a 9 mm por debajo del nivel cero mientras que en la columna larga el mercurio se encontraría a 91 mm por encima de dicho nivel. En este caso el punto 91 mm sobre la indicación de presión cero se marcará como 100 mm Hg. La ventaja de tal disposición es que el practicante puede leer la presión directamente en una columna. Como no hay dos tubos de vidrio de exactamente el mismo diámetro, cada instrumento se ha de calibrar individualmente. Ello no es necesario en los manómetros en los que se lee la altura del mercurio en ambas columnas.

El barómetro

En principio puede usarse también un manómetro para medir la presión de la atmósfera. Todo lo que se necesita es reducir a cero la

presión en una columna mientras la otra se deja abierta a la atmósfera. Esto se hace en la Fig. 7.15 conectando la columna de la izquierda a una bomba de vacío. La presión en el punto B es entonces precisamente ρgh y es igual a la presión de la atmósfera en A.

En la práctica el vacío se obtiene de la siguiente manera. Un tubo de vidrio, cerrado por un extremo, se llena con mercurio y se invierte dentro de un recipiente de mercurio (Fig. 7.16). Si el tubo es de más de 76 cm de largo, cierta cantidad de mercurio sale fuera dejando en el extremo cerrado un vacío. La presión (en milímetros de mercurio) en el punto A es igual a la altura (en milímetros) de la columna de mercurio, mientras que la presión en el punto B es igual a la presión atmosférica. Puesto que estos puntos están al mismo nivel, la altura de la columna mide la presión atmosférica. Este instrumento se denomina *barómetro*.

La presión atmosférica media a nivel del mar soportará una columna de mercurio de 760 mm de alta (unas 30 pulg, o 2,5 pies). Esta presión puede soportar una columna de agua de 34 pies de altura (unos 10,33 m), siendo el cociente entre 34 y 2,5 pies igual al cociente entre la densidad del mercurio y la densidad del agua. El agua se extrae de un pozo haciendo bajar la presión del aire en el extremo superior de un tubo. La presión más elevada de la atmósfera en el extremo inferior del tubo obliga al agua a subir por él, del mismo modo que en la Fig. 7.15. Dado que la presión más baja que puede producir la bomba es cero, la altura máxima a que puede ser elevada el agua por este procedimiento es 34 pies. (En el Apart. 9.5 se explica el mecanismo que permite a los árboles altos elevar el agua muchos metros desde sus raíces a sus ramas más altas.)

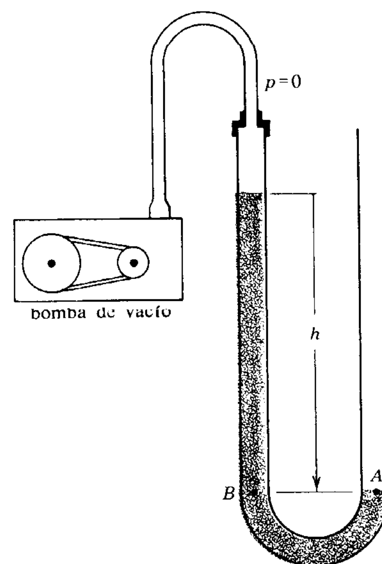


FIGURA 7.15
Manómetro midiendo la presión del aire. En uno de los brazos del manómetro se hace el vacío por medio de una bomba.

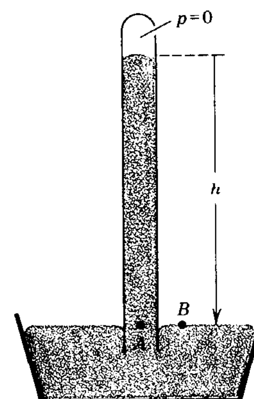


FIGURA 7.16
Barómetro de mercurio.

7.4. EMPUJE

La fuerza de empuje $\mathbf{F}_b$ que ejerce un fluido sobre un objeto sumergido en él puede calcularse a partir de las propiedades discutidas en los Aparts. 7.2 y 7.3. Por lo tanto, consideremos las fuerzas ejercidas sobre el bloque sumergido en el fluido de la Fig. 7.17. La fuerza $\mathbf{F}_B$ ejercida por el fluido sobre la cara superior está dirigida hacia abajo (propiedad 1 de los fluidos), y su módulo es $p_B A$, donde A es el área de esta cara y p_B es la presión en el fluido a esta profundidad. Análogamente la fuerza $\mathbf{F}_A$ sobre la cara inferior está dirigida hacia arriba y su módulo es $p_A A$. La suma de estas fuerzas tiene por módulo

$$F_A - F_B = p_A A - p_B A$$

y está dirigida hacia arriba, ya que $F_A > F_B$. De acuerdo con la Ec. 7.6 (propiedad 3) este módulo puede escribirse así

$$\begin{aligned} F_A - F_B &= A\rho_F g(h_A - h_B) \\ &= A\rho_F gh \end{aligned} \qquad 7.8$$

donde ρ_F es la densidad del fluido y h es la altura del bloque.

La suma de las fuerzas sobre las otras caras del bloque es nula, porque para una región cualquiera sobre una cara vertical, como por ejemplo S en la Fig. 7.17, existe otra región S' en la cara opuesta con la misma área y presión. Dado que las fuerzas sobre estas dos regio-

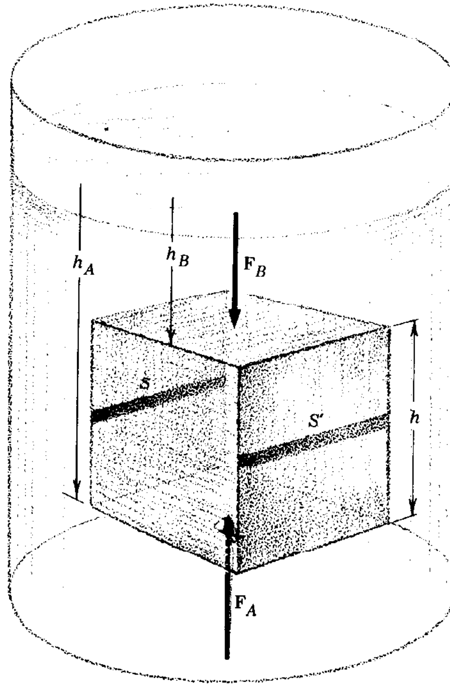


FIGURA 7.17
Fuerzas sobre un bloque sumergido en un fluido.

nes tienen igual módulo pero sentido opuesto, su suma es cero. Todas las otras regiones sobre las caras verticales pueden ser acopladas de un modo similar, de tal manera que la fuerza total sobre estas caras sea nula. Así, la Ec. 7.8 da el módulo de la fuerza total ejercida por el fluido sobre el bloque. Ésta es la fuerza de empuje $\mathbf{F}_b$.

La fuerza de empuje se puede escribir algo diferente observando que Ah es el volumen V del bloque, así que $\rho_F Ah = \rho_F V$ es la masa m_F de un volumen igual de fluido. La fuerza de empuje sobre un objeto de volumen V es

$$F_b = F_A - F_B = \rho_F V g$$
$$= m_F g = \text{peso de un volumen igual de fluido}$$

Este resultado, aunque deducido para el caso especial de un bloque rectangular, es válido en general y puede enunciarse formalmente como sigue:

Principio de Arquímedes. *La fuerza de empuje ejercida por un fluido sobre un objeto es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.* Por supuesto que el volumen del fluido desplazado por un objeto que está completamente sumergido es igual al volumen del propio objeto. El principio de Arquímedes incluye también casos en los que el objeto flota. En estos casos sólo parte del objeto está en el fluido, y así el volumen de fluido desplazado es igual al volumen del objeto que queda por debajo de la superficie del fluido.

OBSERVACIÓN. No es difícil ver por qué el principio de Arquímedes es cierto incluso para objetos de forma irregular. Lo que hay que recordar es que dado que el fluido sólo está en contacto con la superficie del objeto, la fuerza que ejerce sobre éste depende sólo de la forma del objeto y no del material del que está hecho. Así la fuerza de empuje sobre el objeto de forma irregular de la Fig. 7.18 es la misma que la fuerza de empuje sobre cualquier otro objeto de igual forma. En la Fig. 7.19 se ha eliminado el objeto, pero se ha delineado una región de fluido de la misma forma. El fluido dentro de esta región está en equilibrio bajo las acciones de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de empuje debida al resto del fluido, de aquí que la fuerza de empuje sobre la región sea igual al peso del fluido en el interior de la misma. Esta misma fuerza de empuje actúa sobre cualquier otro objeto de la misma forma.

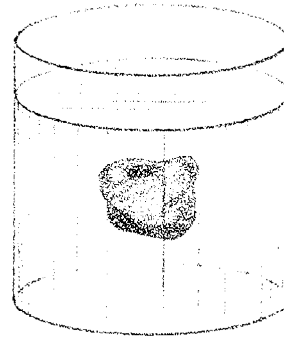


FIGURA 7.18
Objeto de forma irregular sumergido en un fluido.

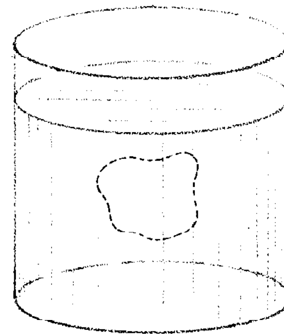


FIGURA 7.19
Región de fluido de la misma forma que el objeto de la Fig. 7.18.

La fuerza total **F** que actúa sobre un objeto completamente sumergido en un fluido es la suma de la fuerza de empuje y de la fuerza de la gravedad:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_g$$

La fuerza de la gravedad está dirigida hacia abajo y su módulo es

$$F_g = m_O g = \rho_O V g$$

donde m_O = masa del objeto
ρ_O = densidad del objeto
V = volumen del objeto

La fuerza de empuje está dirigida hacia arriba y su módulo viene dado por la Ec. 7.8. Por lo tanto el módulo de la fuerza total es

$$\begin{aligned} F &= F_b - F_g \\ &= \rho_F g V \quad \rho_O g V \\ &= (\rho_F - \rho_O) g V \end{aligned}$$

En general esta fuerza no será nula, de modo que el objeto no estará en equilibrio. Si F es positiva, es decir, si la densidad ρ_F del fluido es mayor que la densidad ρ_O del objeto, la fuerza total está dirigida hacia arriba, y el objeto sube a la superficie del fluido. En el equilibrio, el objeto flota con sólo una parte de su volumen V' sumergida. La fuerza de empuje $\rho_F V'$ es entonces igual a la fuerza de la gravedad $\rho_O g V$,

$$\rho_F g V' = \rho_O g V \qquad \text{o} \qquad \frac{V'}{V} = \frac{\rho_O}{\rho_F}$$

Esto indica que la fracción del volumen del objeto que está sumergido es igual al cociente de la densidad del objeto por la densidad del fluido.

Ejemplo 1. La densidad del cuerpo humano es de unos 0,98 g/cm³. Cuando una persona flota inmóvil en agua dulce, ¿qué fracción de su cuerpo estará sumergida?
La fracción sumergida de dicha persona es

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_O}{\rho_F} = \frac{0{,}98 \text{ g/cm}^3}{1{,}00 \text{ g/cm}^3} = 0{,}98$$

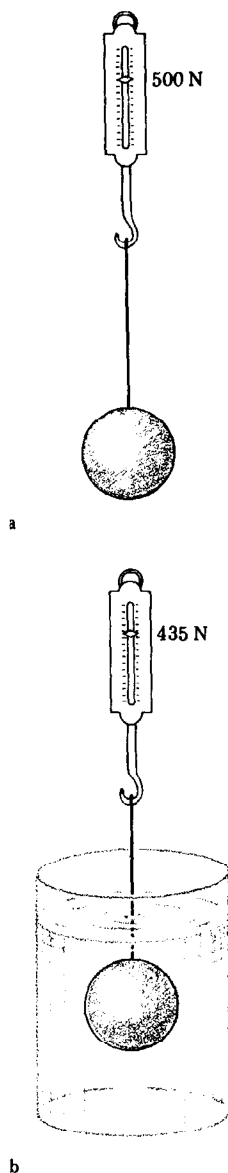


FIGURA 7.20
(a) La balanza indica 500 N cuando el objeto está suspendido en el aire. (b) La balanza marca 435 N cuando el objeto está en el agua.

Por consiguiente, sólo el 2 por ciento de su cuerpo está por encima del agua, lo que no es suficiente para incluir la nariz o la boca.
Si F es negativa, es decir, si la densidad ρ_F del fluido es menor que la densidad ρ_O del fluido, la fuerza total está dirigida hacia abajo y el objeto desciende hasta el fondo del fluido. En el equilibrio, el fondo ejerce una fuerza de contacto hacia arriba de módulo

$$\begin{aligned} F_c &= -F = -(\rho_F - \rho_O)gV \\ &= -(W_F - W_O) \\ &= W_O - W_F \end{aligned} \qquad 7.9$$

donde W_O es el peso del objeto y $W_F = F_b$ es el peso de igual volumen de fluido. La fuerza de constacto es menor que en ausencia de fluido debido precisamente al empuje.

Ejemplo 2. Un objeto de metal está colgado de una balanza de resorte. Cuando el objeto está en el aire (Fig. 7.20a), la escala graduada marca 500 N, pero cuando el objeto se introduce en el agua (Fig. 7.20 b), la escala marca 453 N. ¿Cuál es el volumen y la densidad del objeto?
El valor indicado por la balanza cuando el objeto permanece en el agua es la fuerza de contacto dada por la Ec. 7.9, por lo tanto, el peso de un volumen igual de agua es

$$W_F = W_O - F_c = 500 \text{ N} - 435 \text{ N} = 65 \text{ N}$$

y la masa de un volumen igual de agua es

$$m_F = \frac{W_F}{g} = \frac{65 \text{ N}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 6{,}6 \text{ kg}$$

Como la densidad ρ_F del agua es conocida, el volumen V_O del objeto puede hallarse calculando el volumen de agua desplazada:

$$V_O = V_F = \frac{m_F}{\rho_F} = \frac{6{,}6 \text{ kg}}{1000 \text{ kg/m}^3} = 6{,}6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

La masa del objeto se conoce por su peso en el aire

$$m_O = \frac{W_O}{g} = \frac{500 \text{ N}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 51{,}0 \text{ kg}$$

de modo que su densidad es

$$\rho_O = \frac{m_O}{V_O} = \frac{51{,}0 \text{ kg}}{6{,}6 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 7{,}7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Un objeto puede permanecer suspendido en un fluido sólo si ρ_O es exactamente igual a ρ_F. Los peces son capaces de satisfacer esta condición porque poseen una vejiga natatoria bajo su espina dorsal (Figura 7.21). Esta cavidad de paredes delgadas se llena con una mezcla de oxígeno y nitrógeno obtenida de la sangre. Variando la cantidad de gas de la cavidad, puede variarse el volumen del pez sin modificar su

masa, lo que le permite ajustar su densidad. Para flotar suspendido en el agua, ha de ajustar su densidad hasta igualar a la del agua ambiente.

Cuando se mezclan dos fluidos inmiscibles de densidades diferentes, el fluido de densidad más pequeña flota sobre el de densidad mayor. Por ejemplo, el aceite flota sobre el agua porque su densidad es menor que la del agua. Incluso si los dos fluidos son miscibles, el menos denso flotará sobre la superficie del más denso si se tiene cuidado en no mezclarlos. Este hecho es de importancia fundamental para la circulación del agua en un lago y la del aire en la atmósfera. En la tabla 7.1 se observa que estos dos fluidos son más densos a bajas que a altas temperaturas. En verano, como el agua de la superficie es calentada por el sol, se hace menos densa que la más fría situada debajo. Por lo tanto, el agua caliente de la superficie flota sobre la más fría y evita mezclarse con el agua de los niveles más bajos del lago debido a su propio empuje. Como consecuencia, el nivel inferior permanece estancado y su contenido de oxígeno se va agotando. En otoño, como el lago se enfría, la temperatura del agua llega a hacerse uniforme, de modo que el viento es capaz de mezclar los niveles superiores e inferiores, reponiéndose así el contenido de oxígeno de los niveles bajos. En invierno se hiela el agua de la superficie. Es un hecho notable de la naturaleza el que el agua sea una de las pocas sustancias cuya densidad es menor en estado sólido que en estado líquido. Por lo tanto, el hielo flota en la superficie. Esto evita que el lago se hiele hasta el fondo, lo que acarrearía, por supuesto, la muerte para todos los peces. Toda el agua que queda por debajo del hielo está a una temperatura un poco por encima de la de congelación. En primavera, cuando se disuelve el hielo, el lago está a una temperatura uniforme, de manera que el viento puede volver a mezclar el agua de los niveles inferior y superior.

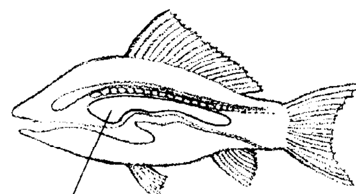


FIGURA 7.21
Vejiga natatoria de un pez.

En la circulación de la atmósfera ocurre precisamente lo contrario. Durante el día el sol calienta la superficie de la Tierra, y ésta calienta a su vez el aire de la atmósfera inferior. Este aire más caliente asciende, mientras que el aire de arriba, más frío y denso, desciende. Así, existe normalmente una constante mezcla vertical del aire de la superficie y el del nivel superior. Esta circulación se ve detenida temporalmente bajo ciertas condiciones meteorológicas en las que el aire anormalmente caliente de la atmósfera superior se mueve por encima del aire más frío de la superficie. Durante estas *inversiones térmicas* el aire contaminado durante el día se va acumulando sobre la ciudad, causando gran sufrimiento e incluso la muerte de personas que padecen enfermedades pulmonares. (El hecho de que ocurran inversiones térmicas demuestra de manera dramática que para eliminar la contaminación del aire dependemos de la normal circulación de éste.)

7.5. FLUJO DE FLUIDOS

Los tres últimos apartados han tratado la física de los fluidos en reposo. La dinámica de los fluidos, la física del movimiento de los fluidos, es mucho más compleja y un tratamiento completo de ella cae fuera del ámbito de este libro. Sin embargo, es de gran importancia para entender diversos fenómenos tales como el vuelo de los

aviones, los pájaros y los insectos por el aire, el flujo de la sangre a través de los vasos del sistema circulatorio, y la circulación del aire en la atmósfera. Aunque los principios fundamentales de la dinámica de los fluidos son precisamente las leyes de Newton del movimiento, las ecuaciones matemáticas que describen cómo rigen estas leyes el comportamiento de un fluido en movimiento son en general muy complejas. En este apartado vamos a considerar algunos aspectos sencillos del movimiento de los fluidos relacionados con el flujo a través de tuberías y los aplicaremos a la circulación de la sangre por los vasos del sistema circulatorio.

Viscosidad

Una de las principales diferencias entre un fluido en movimiento y un fluido en reposo es que un fluido en movimiento ejerce una fuerza paralela a una superficie, cosa que no hace un fluido en reposo (propiedad 1 de los fluidos, Apart. 7.2). Cuando un fluido fluye por una superficie, ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{\parallel}$ paralela a la superficie y en la dirección del flujo. La reacción $\mathbf{F}_v$ a $\mathbf{F}_{\parallel}$ es una fuerza ejercida sobre el fluido por la superficie y dirigida en sentido opuesto a la dirección del flujo. Esta fuerza, llamada *fuerza viscosa,* juega un papel en el flujo de fluidos análogo al del rozamiento en el movimiento de un sólido sobre otro. Es decir, la fuerza viscosa se opone al movimiento. Para mantener un flujo permanente debe aplicarse al fluido una fuerza motriz externa que equilibre la fuerza viscosa.

El caso más simple es el de un fluido que se mueve a lo largo de una superficie plana S_1, como se representa en la Fig. 7.22. A fin de mantener el flujo, existe una segunda superficie S_2, situada en la parte superior del fluido, que se mueve en la dirección del flujo con velocidad constante v. Dado que el fluido ejerce la fuerza $\mathbf{F}_{\parallel}$ paralela a S_1, debe aplicarse a S_1 a fin de mantenerla en reposo, una fuerza externa $\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_{\parallel}$.* La fuerza viscosa $\mathbf{F}_v$ es la reacción a $\mathbf{F}_{\parallel}$, de modo que

$$\mathbf{F}_v = -\mathbf{F}_{\parallel} = -(-\mathbf{F}_a) = \mathbf{F}_a$$

Así, $\mathbf{F}_v$ se determina midiendo la fuerza externa $\mathbf{F}_a$ necesaria para impedir que S_1 se mueva.

OBSERVACIÓN. $\mathbf{F}_a$ y $\mathbf{F}_v$ son dos fuerzas diferentes que resultan ser iguales. $\mathbf{F}_a$ es la fuerza aplicada a S_1 por algún agente externo, mientras que $\mathbf{F}_v$ es la fuerza viscosa aplicada por S_1 al fluido.

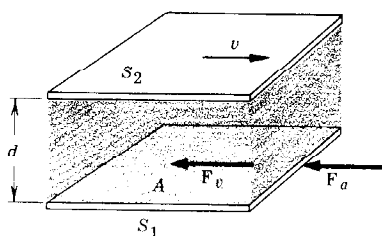


FIGURA 7.22
Flujo de fluido a lo largo de una superficie plana S_1. La superficie superior S_2 se desplaza con velocidad v a fin de mantener el flujo, permaneciendo fija S_1.

Del estudio de F_v llevado a cabo utilizando un dispositivo de placas análogo al de la Fig. 7.22, se obtiene que el módulo de F_v es directamente proporcional a la velocidad v de S_2 y al área A de S_1 e inversamente proporcional a la distancia d entre las superficies. Esto se expresa mediante la fórmula

$$F_v = \frac{\eta A v}{d} \qquad 7.10$$

* El fluido también puede aplicar a S_1 una fuerza perpendicular, pero ésta es precisamente la presión del fluido que ya ha sido estudiada.

donde η† es una constante, llamada *viscosidad*, que es característica del fluido.

Para entender con más claridad lo que está pasando, es necesario examinar el movimiento del fluido con más detalle. Los estudios han demostrado que la capa de fluido adyacente a una superficie se adhiere a la superficie y se mueve con ella. Es decir, no hay movimiento de esta capa de fluido con respecto a la superficie. Por ejemplo, la capa de fluido adyacente a S_2 no se desliza a lo largo de la superficie: se mueve con la misma velocidad v que S_2 (Fig. 7.23). La capa de fluido que está inmediatamente debajo es arrastrada por esta primera capa, pero con una velocidad ligeramente más pequeña porque una capa de fluido se desliza sobre la otra. Esta segunda capa de fluido arrastra a su vez a la capa siguiente con una velocidad aún más pequeña, y así sucesivamente, hasta que se alcanza la capa de fluido adyacente a S_1. Dado que esta capa se adhiere a la superficie en reposo S_1, posee velocidad cero. Esto se muestra de manera esquemática en la Fig. 7.23, donde la velocidad de cada capa aparece indicada por una flecha cuya longitud es proporcional al módulo de v. El fluido se mueve con velocidades diferentes a distancias también diferentes de S_1, pero todas las capas de fluido se mueven paralelamente unas a otras. Éste es el *flujo laminar*, la forma más simple de movimiento de los fluidos.

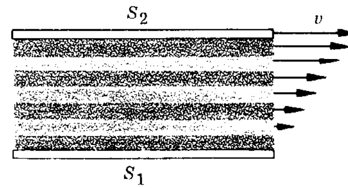


FIGURA 7.23
La velocidad de flujo entre las dos superficies de la Fig. 7.22 varía continuamente desde v, para el fluido en contacto con S_2, a cero, para el fluido en contacto con S_1.

Por lo tanto, la fuerza viscosa no tiene su origen, en realidad, en el deslizamiento del fluido a lo largo de una superficie (como con rozamiento) sino en el deslizamiento de una capa de fluido sobre otra. La fuerza viscosa es grande cuando es grande la fuerza necesaria para producir esta pérdida de velocidad debida al deslizamiento. La viscosidad η es una medida de la fuerza que es necesaria para deslizar una capa de fluido sobre otra. Un valor grande de η corresponde a un fluido muy viscoso como la glicerina o el aceite, mientras que un valor pequeño corresponde a un fluido ligero como el agua o el éter. La viscosidad es una propiedad intrínseca de un fluido y no depende de la naturaleza de la superficie a lo largo de la cual se mueve el fluido.

De la Ec. 7.10 se obtiene que las dimensiones de la viscosidad son

$$[\eta] = \frac{[f][l]}{[l^2][v]} = \frac{[f]}{[l][l/t]} = \frac{[f][t]}{[l^2]}$$

En el sistema SI las unidades de viscosidad son N-s/m², mientras que en el cgs son dina-s/cm².

Definición. La unidad SI de viscosidad recibe el nombre de *Poiseuille* (PI), y la unidad cgs el nombre de *poise* (P). La relación entre estas unidades es

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ N-s/m}^2 = \frac{10^5 \text{ dina-s}}{(10^2 \text{ cm})^2} = 10 \text{ dina-s/cm}^2 = 10 \text{ P}$$

† η es la letra griega eta.

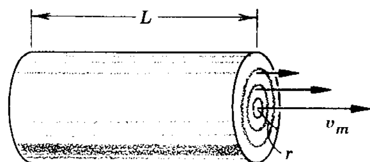


FIGURA 7.24
Flujo de fluido a través de una tubería de radio r y longitud L. La velocidad de flujo varía desde cero, para el fluido en contacto con la tubería, a v_m, para el flujo del centro de la tubería.

La tabla 7.3 da la viscosidad de algunos líquidos y gases comunes en unidades SI y cgs. Dado que la viscosidad de un fluido varía rápidamente con la temperatura, debe indicarse siempre la temperatura a la que ha sido medida la viscosidad. Obsérvese que la viscosidad de un gas es mucho menor que la de un líquido.

Flujo de fluidos en tuberías

Consideremos ahora el problema de un fluido que circula por una tubería de radio r y longitud L (Fig. 7.24). La velocidad de la capa de fluido adyacente a la pared de la tubería es cero, y el fluido se mueve a lo largo del eje central de la tubería con la velocidad máxima v_m. La velocidad en cada capa concéntrica de fluido varía continuamente de v_m a cero al ir alejándonos del eje central. Por lo tanto, la velocidad media del fluido es $\bar{v} = \frac{1}{2}v_m$.
Al movimiento del fluido por la tubería se opone la fuerza viscosa ejercida sobre el fluido por las paredes de la tubería. La ecuación 7.10 sólo se aplica al caso de dos superficies planas, pero puede emplearse para hacer un cálculo aproximado en el caso que nos ocupa. Tomemos como área en la Ec. 7.10 el área de la pared de la tubería, porque ésta es el área que está en contacto con el fluido. El área de la pared es igual a la longitud de la circunferencia multiplicada por la longitud de la tubería, o sea

TABLA 7.3. **Viscosidad de algunos gases y líquidos comunes.**

Fluido	Temperatura °C	Viscosidad: Poises (dina-s/cm², o P)	Viscosidad: Poiseuilles (N · s/m², o Pl)
Líquidos			
Acetona	25	$3{,}16 \times 10^{-3}$	$3{,}16 \times 10^{-4}$
Plasma sanguíneo	37	$1{,}5 \times 10^{-2}$	$1{,}5 \times 10^{-3}$
Sangre	37	4×10^{-2}	4×10^{-3}
Etanol	20	$1{,}20 \times 10^{-2}$	$1{,}20 \times 10^{-3}$
Éter	20	$2{,}33 \times 10^{-3}$	$2{,}33 \times 10^{-4}$
Glicerina	20	14,9	1,49
Mercurio	20	$1{,}55 \times 10^{-2}$	$1{,}55 \times 10^{-3}$
Aceite ligero de máquina	16	1,13	0,113
	38	0,34	$3{,}4 \times 10^{-2}$
Agua	0	$1{,}79 \times 10^{-2}$	$1{,}79 \times 10^{-3}$
	20	$1{,}00 \times 10^{-2}$	$1{,}00 \times 10^{-3}$
	37	$6{,}91 \times 10^{-3}$	$6{,}91 \times 10^{-4}$
	100	$2{,}82 \times 10^{-3}$	$2{,}82 \times 10^{-4}$
Gases			
Aire	0	$1{,}71 \times 10^{-4}$	$1{,}71 \times 10^{-5}$
	18	$1{,}83 \times 10^{-4}$	$1{,}83 \times 10^{-5}$
	40	$1{,}90 \times 10^{-4}$	$1{,}90 \times 10^{-5}$
Helio	20	$1{,}94 \times 10^{-4}$	$1{,}94 \times 10^{-5}$
Vapor de agua	100	$1{,}25 \times 10^{-4}$	$1{,}25 \times 10^{-5}$

$$A = 2\pi rL$$

En la Ec. 7.10 tomamos como distancia el radio r de la tubería porque ésta es la distancia a lo largo de la cual la velocidad del fluido varía de v_m a cero. Por último, como v tomamos la velocidad máxima del fluido v_m. El resultado es

$$F_v = \eta \frac{2\pi rLv_m}{r} = 2\pi\eta Lv_m$$

Este cálculo aproximado da la dependencia correcta de F_v con η, L y v_m, pero su valor resulta pequeño en un factor 2. Un análisis más cuidadoso muestra que

$$F_v = 4\pi\eta Lv_m \qquad 7.11$$

Esta fuerza viscosa se opone al flujo del fluido, luego para mantener un flujo constante debe existir una fuerza motriz de módulo F_v. Si se desprecia la gravedad, la única fuerza sobre el fluido está originada por la presión del fluido. El fluido que entra en la tubería por la izquierda a la presión p_1 ejerce una fuerza p_1A hacia la derecha sobre el fluido del interior de la tubería, donde ahora $A = \pi r^2$ es el área de la sección transversal de la tubería. El fluido que sale por la derecha de la tubería a la presión p_2 ejerce una fuerza p_2A hacia la izquierda sobre el fluido de la tubería. Si p_2 es menor que p_1, existirá una fuerza motriz neta

$$\begin{aligned} p_1A - p_2A &= (p_1 - p_2)A \\ &= (p_1 - p_2)\pi r^2 \end{aligned}$$

sobre el fluido y dirigida hacia la derecha. La condición de flujo constante es que esta fuerza motriz sea precisamente igual a F_v,

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = 4\pi\eta Lv_m$$

de modo que

$$v_m = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\eta L} \qquad 7.12$$

Esta ecuación da la velocidad en el centro de la tubería en función de la diferencia de presión entre los extremos de la tubería, el radio y la longitud de ésta y la viscosidad del fluido. Para una diferencia de presión dada, v_m aumenta con r y disminuye con η y L, lo cual es razonable. Despejando $p_1 - p_2$ de la Ec. 7.12, tenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{4\eta Lv_m}{r^2} \qquad 7.13$$

que da la diferencia de presión que se produce en un fluido cuando circula por una tubería.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la caída de presión en la sangre cuando pasa por un capilar de 1 mm de longitud y 2 μm ($=2 \times 10^{-6}$ m) de radio si la velocidad de la sangre en el centro del capilar es de 0,66 mm/s?

En este problema conocemos $L = 10^{-3}$ m, $r = 2 \times 10^{-6}$ m, $v_m = 6{,}6 \times 10^{-4}$ m/s y en la tabla 7.3 se encuentra que la viscosidad de la sangre es $\eta = 4 \times 10^{-3}$ Pl. Con estos valores en la Ec. 7.13, la caída de presión al pasar por un capilar resulta ser

$$p_1 - p_2 = \frac{4(4 \times 10^{-3}\ \text{N-s/m}^2)(10^{-3}\ \text{m})(0{,}66 \times 10^{-3}\ \text{m/s})}{(2 \times 10^{-6}\ \text{m})^2}$$
$$= 0{,}26 \times 10^{4}\ \text{Pa}$$
$$= (0{,}26 \times 10^{4})(7{,}50 \times 10^{-3})\ \text{Torr}$$
$$= 19.5\ \text{Torr}$$

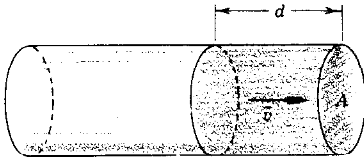


FIGURA 7.25
Sección de fluido de longitud d desplazándose a velocidad media $\bar{v}$.

Éste es un valor típico de la caída de presión en un capilar, aunque hay una gran variación de un capilar a otro.

La magnitud que más interesa no es la velocidad del flujo sino el volumen de fluido que pasa por segundo a través de un vaso. Éste recibe el nombre de *flujo Q del fluido* y está relacionado con la velocidad media de flujo $\bar{v}$ y el área de la sección transversal del vaso. La Fig. 7.24 muestra una sección de fluido de longitud d que circula por una tubería de radio r. Si la sección se desplaza a la velocidad media $\bar{v}$, saldrá de la tubería en el tiempo $t = d/\bar{v}$. El volumen V del fluido de esta sección es igual al área $A = \pi r^2$ de la sección transversal de la tubería multiplicada por la longitud d. Por consiguiente el flujo es

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{Ad}{d/\bar{v}} = A\bar{v}$$
$$= \pi r^2 \bar{v} \qquad 7.14$$

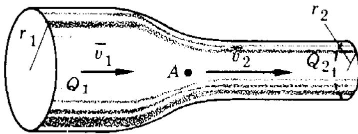


FIGURA 7.26
La velocidad del fluido varía cuando lo hace el radio de la tubería, ya que Q_1 y Q_2 son iguales.

La Fig. 7.26 muestra un flujo en una tubería cuyo radio varía de r_1 a r_2. Según la Ec. 7.14, el flujo en las dos secciones del tubo es

$$Q_1 = \pi r_1^2 \bar{v}_1 \qquad \text{y} \qquad Q_2 = \pi r_2^2 \bar{v}_2$$

Ahora bien, si Q_1 fuera mayor que Q_2, entraría en la región A más fluido del que sale de ella y habría una acumulación de fluido en A, lo cual es imposible. Asimismo, si Q_1 fuera menor que Q_2 se establecería un déficit de fluido en A. Como en realidad la cantidad de fluido en A permanece invariable, Q_1 ha de ser igual a Q_2. Por consiguiente tenemos

$$r_1^2 \bar{v}_1 = r_2^2 \bar{v}_2$$

Ello nos dice que si varía el radio de la tubería varía también la velocidad del fluido, de modo que el flujo permanece constante.

Ejemplo 2. En un adulto normal en reposo, la velocidad media a través de la aorta vale $\bar{v} = 0{,}33$ m/s. ¿Cuál es el flujo a través de una aorta de radio $r = 9$ mm?

El área de la sección transversal de la aorta es

$$A = \pi r^2 = (3{,}14)(9 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 2{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

por lo cual el flujo vale

$$Q = A\bar{v} = (2{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(0{,}33\ \text{m/s})$$
$$= 0{,}83 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s} = 83\ \text{cm}^3/\text{s}$$

La sangre pasa de la aorta a las arterias principales, luego a las más pequeñas (arteriolas), y por último, a los capilares. Cada vaso se divide en vasos mucho más pequeños, pero, aunque el área de la sección transversal de cada arteria es más pequeña que el área de la aorta, el área de la sección transversal total de todas las arterias principales es $20 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. Esto se representa de manera esquemática en la Fig. 7.27. Dado que el flujo total a través de todas estas arterias es el mismo que a través de la aorta, puede utilizarse la Ec. 7.14 para calcular la velocidad media de la sangre en las arterias. Haciendo uso del valor de Q hallado en el ejemplo 2 se obtiene

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}83 \times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s}}{20 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}$$
$$= 0{,}041\ \text{m/s}$$

Así, la sangre se mueve más lentamente en las arterias que en la aorta, porque el área de la sección transversal total de las arterias es mayor que el área de la aorta. El área de la sección transversal total de todos los capilares es $0{,}25\ \text{m}^2$, de modo que la velocidad media a través de ellos es de sólo $0{,}33 \times 10^{-3}$ m/s.

Las ecuaciones 7.12 y 7.14 pueden combinarse para dar una importante ecuación que relaciona el flujo con la diferencia de presión en una tubería. Para hacer esto recordemos que la velocidad en la tubería varía de cero en la pared a v_m en el centro. Por lo tanto, la velocidad media $\bar{v}$ es $1/2\ v_m$, y así la Ec. 7.14 puede escribirse

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi r^2 v_m$$

Sustituyendo en esta última expresión v_m por el segundo miembro de la Ec. 7.12, se obtiene la ecuación

$$Q = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} \qquad 7.15$$

que se conoce como *ley de Poiseuille*. Esta ley establece que la *cantidad de fluido que circula por una tubería es proporcional a la disminución de la presión a lo largo de la misma y a la cuarta potencia del radio de la tubería*. Esto es, para la misma diferencia de presión, circulará 16 veces más fluido por una tubería de 2 mm de radio que por otra de 1 mm de radio. La ecuación 7.15 es fundamental para entender correctamente cómo circula la sangre por el cuerpo.

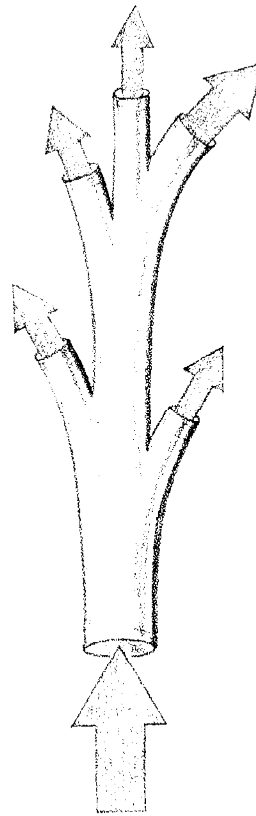


FIGURA 7.27
Sangre circulando desde la aorta hasta un cierto número de arterias más pequeñas. La suma de las áreas transversales de estas arterias es mayor que el área de la aorta, de aquí que la velocidad media a través de ellas sea más lenta que a través de la aorta.

OBSERVACIÓN. La ley de Poiseuille es realmente sólo una aproximación, válida cuando la velocidad de flujo $\bar{v}$ es suficientemente pequeña. Si la velocidad es grande, el flujo no consiste ya en capas concéntricas de fluido moviéndose todas paralelamente unas con respecto a otras a diferentes velocidades (flujo laminar). En cambio, aparece la turbulencia, en la que parte del fluido se mueve en pequeños círculos dentro de la tubería (remolinos). La teoría del flujo turbulento es muy compleja, y el fenómeno de la turbulencia no ha sido aún entendido completamente.

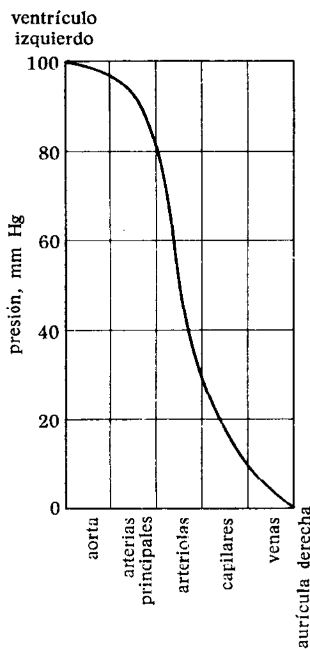


FIGURA 7.28
Representación esquemática de la variación que experimenta la presión de la sangre al circular a través del sistema circulatorio del cuerpo.

Flujo sanguíneo

La aorta es tan grande ($r = 9$ mm) que sólo se requiere una diferencia de presión de 3 mm Hg para mantener en ella un flujo normal de sangre. Así, si la presión de la sangre es de 100 mm Hg cuando entra en la aorta, se reduce a 97 mm Hg cuando pasa a las arterias principales. Dado que estos vasos tienen radios mucho más pequeños que la aorta, es necesaria una caída de presión de 17 mm Hg para mantener en ellas el flujo. Por lo tanto, la presión es de sólo 80 mm Hg cuando la sangre penetra en las arteriolas (pequeñas arterias). Estos vasos tienen radios aún más pequeños, de modo que para mantener el flujo en ellos se necesita una caída de presión de 55 mm Hg. Por último, existe una caída de presión adicional de 20 mm Hg cuando la sangre pasa por los capilares. (La caída de presión en los capilares es menor que en las arteriolas, aun cuando los capilares tienen radios mucho más pequeños, porque el número de éstos es tan grande que el flujo sanguíneo en cada uno de ellos es muy pequeño.) Por lo tanto, la presión de la sangre desciende a sólo 10 mm Hg cuando alcanza las venas. La Fig. 7.26 muestra de manera esquemática las variaciones de presión en la sangre en su movimiento a través del aparato circulatorio del cuerpo.

Es conveniente escribir la Ec. 7.15 en la forma

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{R} \qquad 7.16$$

donde

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \qquad 7.17$$

es la resistencia de un solo vaso. La ecuación 7.16 también es válida para una compleja red de vasos interconectados, como la de los vasos sanguíneos del sistema circulatorio, si se considera R como la resistencia total de la red. Esta resistencia total se calcula a partir de las resistencias de los vasos individuales de la red por el mismo procedimiento que el empleado para calcular la resistencia total de un circuito eléctrico (Apart. 18.2). La importancia de la Ec. 7.16 es que muestra la relación entre la presión sanguínea y la resistencia total.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la resistencia total del sistema circulatorio?
Ya hemos indicado que en un adulto normal $Q = 0{,}83 \times 10^{-4}$ m³/s y que la caída de presión total desde la aorta a los capilares es

$$p_1 - p_2 = 90 \text{ mm Hg} = 1{,}2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

Por lo tanto, la resistencia total de todas las arterias, arteriolas y capilares del cuerpo es

$$R = \frac{p_1 - p_2}{Q} = \frac{1{,}2 \times 10^4 \text{ N/m}^2}{0{,}83 \times 10^{-4} \text{ m}^3\text{/s}}$$
$$= 1{,}44 \times 10^8 \text{ N-s/m}^5$$

Si la resistencia total del cuerpo crece de manera anormal, la presión sanguínea debe aumentar para mantener normal el flujo de sangre. Ésta es la situación de hipertensión (presión sanguínea alta), que

es la causa del 12 por ciento de las defunciones. Por otro lado, si la resistencia se reduce mientras la presión sanguínea permanece invariable, el flujo Q aumenta. Durante la realización de un ejercicio físico hay un aumento en la presión y una disminución en la resistencia total lo que hace que se produzca un gran flujo sanguíneo, necesario en estos casos. La disminución de la resistencia se produce por un aumento en los radios de los vasos sanguíneos (vasodilatación). Dado que R es inversamente proporcional a la cuarta potencia de r, un pequeño aumento en el radio produce una gran disminución en la resistencia.

El efecto de la presión sanguínea alta es hacer que el corazón trabaje más que en condiciones normales. La potencia disponible P del corazón es el trabajo que éste realiza por segundo para impulsar la sangre. Si la sangre avanza una distancia d en el tiempo t, la potencia es

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = F\bar{v}$$

donde $\bar{v}$ es la velocidad media de la sangre cuando sale del corazón y F es la fuerza media ejercida por el corazón sobre la sangre. Esta fuerza es precisamente la presión p ejercida por el corazón sobre la aorta multiplicada por el área de la sección transversal de la aorta

$$F = pA$$

y por lo tanto

$$P = pA\bar{v} = pQ \qquad 7.18$$

donde hemos utilizado la Ec. 7.14. La Ec. 7.18 muestra que el trabajo por segundo hecho por el corazón aumenta con la presión sanguínea.

Ejemplo 4. ¿Cuál es la potencia del corazón de un adulto normal en reposo?

La presión media y el flujo sanguíneo medio en un adulto normal en reposo valen $p = 100$ mm Hg $= 1{,}3 \times 10^4$ N/m^2 y $Q = 0{,}83 \times 10^{-4}$ m^3/s, de modo que la potencia del corazón es

$$P = pQ = (1{,}3 \times 10^4 \text{ N/m}^2)(0{,}83 \times 10^{-4} \text{ m}^3\text{/s})$$
$$= 1{,}1 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 1{,}1 \text{ J/s} = 1{,}1 \text{ W}$$

Así, la potencia normal del corazón es sólo de 1 W, o sea el 1 por ciento de la potencia total consumida por el cuerpo (Apart. 5.6).

PROBLEMAS

1. Una bailarina de ballet que pesa 50 kp está apoyada sobre la punta del pie. ¿Cuál es la presión sobre el área del suelo que toca, si la punta de su pie tiene un área de 22,7 cm^2?
   Resp. 217006,3 N/m^2.
2. El filo de un cincel tiene un área de 0,12 pulg^2. Cuando se golpea con un martillo, el cincel ejerce una fuerza momentánea de 20 lb sobre un ladrillo. ¿Cuál es la presión ejercida directamente debajo del filo del cincel?
3. Una explosión origina un aumento momentáneo en la presión del aire ambiente *(sobrepresión)*. Calcular la fuerza total ejercida por una sobrepresión de 2758 N/m^2 sobre la pared de un edificio de 6 m de alto y 9 m de ancho.
   Resp. 148 932 N.

4. La presión sistólica de un paciente es 220 mm Hg. Convertir esta presión en (*a*) pascals, (*b*) libras por pulgada cuadrada y (*c*) centímetros de agua.
5. La presión (manométrica) del aire suministrado a un paciente por medio de un respirador es 20 cm H_2O. Convertir esta presión en (*a*) newtons por metro cuadrado, (*b*) libras por pulgada cuadrada y (*c*) torrs.
Resp. (*a*) 1962 N/m²; (*b*) 0,284 lb/pulg²; (*c*) 14,7 torr.
6. Los diámetros de los émbolos grande y pequeño de un elevador hidráulico (Fig. 7.6) son 6,0 y 1,5 pulg, respectivamente. (*a*) ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse al émbolo más pequeño para levantar un automóvil de 2000 lb colocado sobre el émbolo grande? (*b*) Si el émbolo pequeño desciende 5 pulg, ¿cuánto sube el émbolo grande?
7. Se aplica una fuerza de 4 N al émbolo de una jeringa hipodérmica cuya sección transversal tiene un área de 2,5 cm² (figura 7.29). (*a*) ¿Cuál es la presión (manométrica) en el fluido que está dentro de la jeringa? (*b*) El fluido pasa a través de una aguja hipodérmica cuya sección transversal tiene un área de 0,008 cm². ¿Qué fuerza habría de aplicarse al extremo de la aguja para evitar que el fluido saliera? (*c*) ¿Cuál es la fuerza mínima que debe aplicarse al émbolo para inyectar fluido en una vena en la que la presión sanguínea es 12 mm Hg?
Resp. (*a*) $1,6 \times 10^4$ N/m²; (b) 0,0128 N; (*c*) 0,40 N.

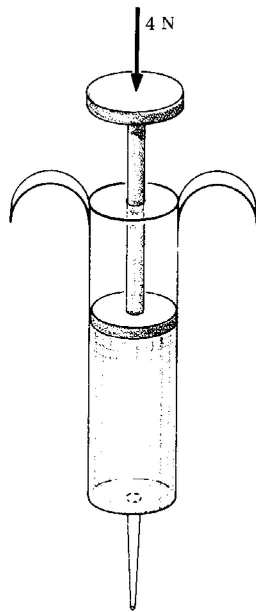


FIGURA 7.29. Problema 7.

8. El corazón impulsa sangre a la aorta a una presión media de 100 mm Hg. Si el área de la sección transversal de la aorta es 3 cm², ¿cuál es la fuerza media ejercida por el corazón sobre la sangre que entra en la aorta?
9. ¿Cuál es la masa de 200 ml de triclorometano?
Resp. 297 g.
10. Calcular la masa del aire de una habitación de 6 m de ancho, 10 m de larga y 4 m de alta.
11. (*a*) Calcular la masa de un cilindro de aluminio de 10 cm de largo y 4 cm de diámetro. (*b*) La masa de un cilindro de tungsteno del mismo tamaño y forma es 1758 g. ¿Cuál es la densidad del tungsteno?
Resp. (*a*) 339 g; (*b*) 14 g/cm³.
12. Una pulgada de agua (pulg H_2O), unidad de presión utilizada a veces en terapia respiratoria, es la presión ejercida por una columna de agua de 1 pulg de alta. Hacer la conversión de pulgadas de agua a (*a*) centímetros de agua y (*b*) milímetros de mercurio.
13. La pulgada de mercurio es una unidad de presión que se emplea a veces en meteorología. Hacer la conversión de pulgadas de mercurio a (*a*) milímetros de mercurio y (*b*) atmósferas.
Resp. (*a*) 1 pulg Hg = 25,4 mm Hg; (b) 1 pulg Hg = 0,0333 atm.
14. Un dique presenta un escape a 4 m por debajo de la superficie del agua. Si el área del agujero es 1,5 cm², ¿cuál es la fuerza que debe aplicar un niño holandés al agujero para evitar que se salga el agua?
15. (*a*) Fluye plasma desde un frasco a través de un tubo hasta una vena del paciente. Cuando el frasco se mantiene a 1,5 m por encima del brazo del paciente, ¿cuál es la presión del plasma cuando penetra en la vena? (*b*) Si la presión san-

guínea en la vena es 12 mm Hg, ¿cuál es la altura mínima a la que debe mantenerse el frasco para que el plasma fluya en la vena? (*c*) Supongamos que un astronauta necesita una transfusión en la Luna. ¿A qué altura mínima habría que mantener el frasco en este caso? En la Luna g es 1,63 m/s².
Resp. (*a*) 114 mm Hg; (*b*) 0,16 m (debido a la viscosidad del plasma, el frasco debe mantenerse mucho más alto que esto para conseguir un flujo apreciable); (*c*) 0,95 m.

16. En un primitivo experimento para demostrar la existencia de la presión sanguínea, se hacía pasar la sangre de una arteria de un caballo hasta el fondo de un tubo vertical. ¿A qué altura subía la sangre en el tubo? Supóngase que la presión sanguínea del caballo es 80 mm Hg y que la densidad de la sangre del caballo es la misma que la de la sangre humana.

17. Algunas personas experimentan molestias de oído al subir en un ascensor a causa del cambio de presión. Si la presión detrás del tímpano no varía durante la subida, la disminución de la presión exterior da lugar a una fuerza neta sobre el tímpano dirigida hacia afuera. (*a*) ¿Cuál es la variación en la presión del aire al subir 100 m en un ascensor? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre un tímpano de área 0,6 cm²?
Resp. (*a*) 1176 N/m²; (*b*) 0,07 N.

18. Alrededor de 1646 Pascal llevó a cabo el experimento que se muestra en la figura 7.30. Se conectó un tubo muy largo, cuya sección transversal tenía un área $A = 3 \times 10^{-5}$ m², a un barril de vino que tenía una tapa de área $A' = 0,12$ m². Primero se llenó el barril de agua y a continuación se añadió agua al tubo hasta que el barril reventó. Esto sucedió cuando la columna de agua era de 12 m de alta. Precisamente antes de que el barril reventara, ¿cuál era (*a*) el peso del agua contenida en el tubo, (*b*) la presión (manométrica) del agua sobre la tapa del barril, (*c*) la fuerza neta ejercida sobre la tapa?

OBSERVACIÓN. Obsérvese que el agua contenida en el tubo, aunque pesaba menos de 1 lb, era capaz de ejercer una fuerza de miles de libras sobre la tapa del barril.

19. Con un intenso esfuerzo de inspiración, por ejemplo, aspirando a fondo, la presión manométrica en los pulmones puede reducirse a —80 mm Hg. (*a*) ¿Cuál es la altura máxima a la que puede ser sorbida el agua en una paja? (*b*) La ginebra tiene una densidad de 920 kg/m³. ¿Cuál es la altura máxima a la que puede ser sorbida la ginebra en una paja?
Resp. (*a*) 1,08 m; (*b*) 1,18 m.

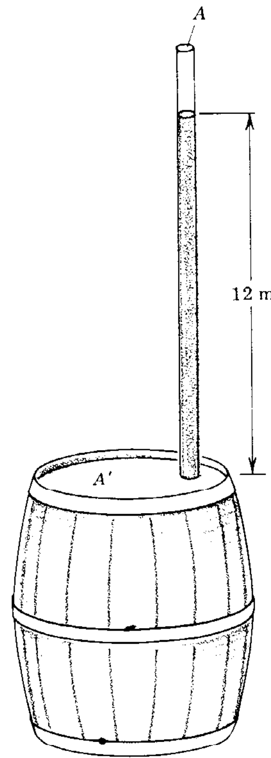


FIGURA 7.30. Problema 18.

20. Un manómetro de mercurio está conectado a una vasija del modo que se indica en la Fig. 7.31. (*a*) ¿Cuál es la presión (manométrica) en la vasija? (*b*) ¿Cuál es la presión absoluta en la vasija, suponiendo que la presión atmosférica es $1,01 \times 10^5$ N/m²? (*c*) Si se duplica la presión absoluta en la vasija, ¿cuál es la presión manométrica?

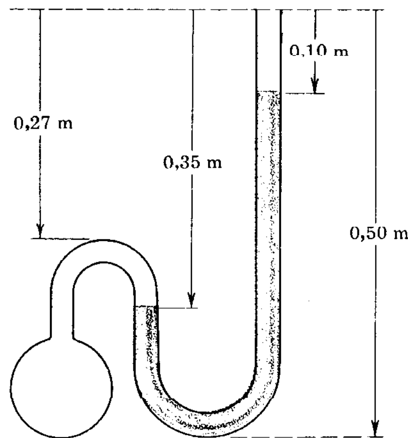


FIGURA 7.31. Problema 20.

21. Un manómetro de mercurio está conectado a una vasija tal como se representa en la Fig. 7.32. (*a*) Si la altura d_A de la columna de la izquierda es 0,22 m, ¿cuál es la altura d_B de la columna de la derecha cuando la presión manométrica dentro de la vasija es $0{,}16 \times 10^5$ N/m²? (*b*) ¿Cuáles son las alturas d_A y d_B cuando la presión manométrica es $0{,}32 \times 10^5$ N/m²?
Resp. (*a*) 0,34 m; (*b*) 0,16 y 0,40 m.

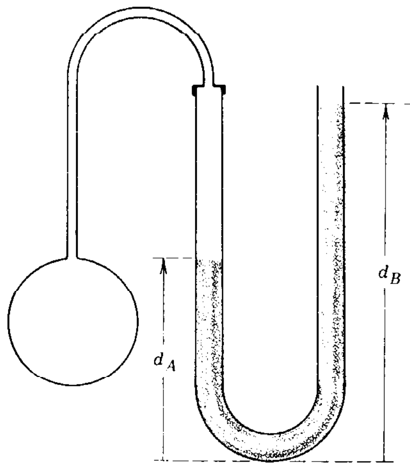


FIGURA 7.32. Problema 21.

22. Un cilindro cuya sección transversal tiene un área $A = 4 \times 10^{-4}$ m² está conectado mediante un tubo a una de las ramas de un manómetro de mercurio (Fig. 7.33). ¿Cuál es la diferencia de alturas en las dos columnas cuando se coloca una masa de 3 kg sobre el émbolo del cilindro?

23. ¿Qué altura habría de tener un barómetro llenado con glicerina?
Resp. 8,18 m.

* 24. Se sumerge un objeto hemisférico en un fluido (Fig. 7.34). Demostrar que la fuerza total **F** sobre la porción curvada del hemisferio, es decir, el vector suma de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los puntos de esta superficie, tiene el módulo $F = \pi r^2 p$, donde r es el radio de la esfera y p es la presión en el fluido. (*Indicación:* Hallar primero la fuerza total sobre

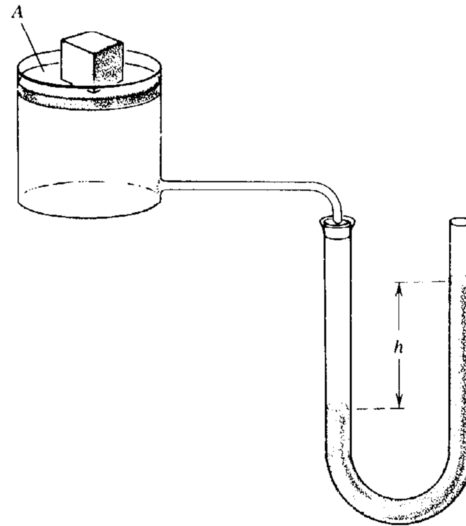


FIGURA 7.33. Problema 22.

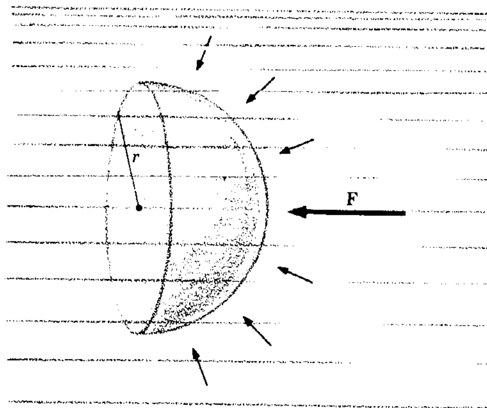


FIGURA 7.34. Problema 24.

la superficie plana y utilizar luego la primera ley de Newton. No tener en cuenta las variaciones de la presión con la profundidad.)

25. En 1654 Otto von Guericke hizo una demostración en Magdeburgo del efecto de la presión del aire. Para desalojar el aire de entre dos hemisferios de metal hizo uso de una bomba de aire que él mismo había inventado. Tiros de ocho caballos, tirando de cada hemisferio, fueron después incapaces de separarlos. Si el radio de cada hemisferio era 0,3 m y la presión dentro de ellos 0,1 atm, ¿qué fuerza habría tenido que ejercer cada tiro de caballos para separar los hemisferios? (Usar el resultado del Prob. 24.)
Resp. $2{,}57 \times 10^4$ N.

26. ¿Qué fracción de un iceberg queda por debajo de la superficie del agua?

27. Una «burbuja» de aire caliente (30 °C), formada cerca del suelo, asciende en el aire frío (10 °C) situado encima del suelo. (*a*) Si el volumen de la burbuja es 8 m³, ¿cuál es la fuerza total sobre ella? (*b*) ¿Cuál es la aceleración ascendente de la burbuja si se desprecia la resistencia del aire?
Resp. (*a*) 7,06 N; (*b*) 0,76 m/s².

28. ¿Cuál es la aceleración ascendente de un bloque de madera que se suelta en el fondo de un lago?

29. Un bloque de aluminio de 2 kg está en el agua colgado de una cuerda unida a una balanza (Fig. 7.35). ¿Cuál es la indicación de la balanza?
Resp. 12,3 *N*.

* 30. Cuando un peso *W* colgado de una cuerda unida a una balanza se sumerge en el agua (Fig. 7.35), la balanza marca *W'*. Demostrar que la densidad ρ del objeto colgado es

$$\rho = \frac{W}{W - W'}\rho_w$$

donde ρ_w es la densidad del agua.

31. La velocidad v_m de la sangre en el centro de un capilar es 0,066 cm/s. La longitud *L* del capilar es 0,1 cm y su radio *r* es 2×10^{-4} cm. (*a*) ¿Cuál es el flujo *Q* en el capilar? (*b*) Hacer un cálculo aproximado del número total de capilares del cuerpo a partir del hecho de que el flujo a través de la aorta es 83 cm³/s.
Resp. (*a*) $4{,}14 \times 10^{-9}$ cm³/s; (*b*) 2×10^{10}.

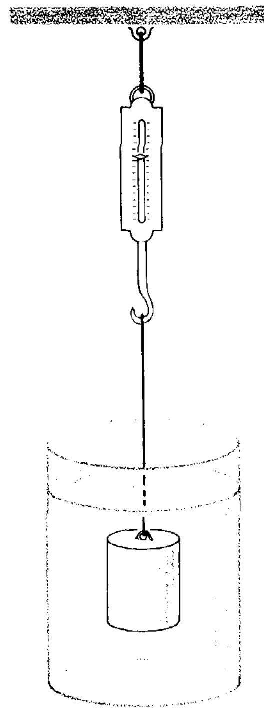


FIGURA 7.35. Problemas 29 y 30.

32. (*a*) Calcular la resistencia que presenta a la sangre el capilar descrito en el Prob. 31. (*b*) Calcular la resistencia cuando el radio del capilar se dilata hasta $2{,}5 \times 10^{-4}$ cm.

33. (*a*) ¿Cuál es la resistencia al agua de un capilar de vidrio de 20 cm de longitud y 0,06 cm de radio? (*b*) ¿Cuál es el flujo a través del capilar cuando la diferencia de presión entre sus extremos es 15 cm H_2O? (*c*) ¿Qué diferencia de presión da un flujo de 0,5 cm³/s?
Resp. (*a*) $3{,}93 \times 10^9$ N-s/m⁵; (*b*) 0,374 cm³/s; (*c*) 20 cm H_2O.

34. (*a*) ¿Cuál es la resistencia al agua de una aguja hipodérmica de 8 cm de longitud y 0,04 cm de radio interno? (*b*) La aguja está unida a una jeringa con un émbolo de 3,5 cm² de área. ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse al émbolo para conseguir que el agua fluya de la jeringa a una vena con una velocidad de flujo de $Q = 2$ cm³/s?

Supóngase que la presión en la vena es 9 mm Hg.

35. Durante la micción, la orina fluye desde la vejiga, donde su presión manométrica es 40 mm Hg, a través de la uretra hasta el exterior. Calcular el diámetro de una uretra femenina si se conocen los siguientes datos:
Longitud de la uretra femenina = 4 cm.
Flujo durante la micción = 21 cm^3/s.
Viscosidad de la orina = $6{,}9 \times 10^{-4}$ PI.
Resp. 1,4 mm.

* 36. (*a*) Demuéstrese que la presión sanguínea vale lo mismo en todos los mamíferos de la misma forma, a pesar de su distinto tamaño (la presión sanguínea extraordinariamente alta de la jirafa es consecuencia de su forma poco usual, no de su tamaño). (*b*) Demuéstrese que el flujo Q varía según L^2, siendo L el factor de escala (Apartado 1.4). (*Sugerencia:* Referirse a la discusión del Apart. 5.6.) (*c*) Demuéstrese que la resistencia total al flujo sanguíneo por parte del sistema circulatorio se rige por el factor L^3.

37. Se ha hallado experimentalmente que el flujo de un fluido de densidad ρ y viscosidad η a través de una tubería de radio r es laminar mientras el *numero de Reynolds*

$$\text{Re} = \frac{\bar{v}r\rho}{\eta}$$

es menor que 1000. Aquí $\bar{v}$ es la velocidad media del fluido en la tubería. A partir de los datos del Apart. 7.5, calcular el número de Reynolds para el flujo de sangre (*a*) a través de la aorta y (*b*) a través de un capilar típico.
Resp. (*a*) 780; (*b*) $1{,}73 \times 10^{-4}$.

* 38. (*a*) Demostrar que el número de Reynolds definido en el Prob. 37 puede escribirse también

$$\text{Re} = \frac{Q\rho}{\pi r\eta}$$

(*b*) Demostrar que el flujo de agua a través de un capilar será laminar siempre que Q (en centímetros cúbicos por segundo) sea menor que el diámetro del capilar (en milímetros).

* 39. Un fluido ejerce una fuerza viscosa F_v sobre un objeto que se desplaza a través de él. Para una pequeña esfera de radio r que se mueve lentamente con velocidad v, la fuerza viene dada por la ley de Stokes

$$F_v = 6\pi\eta rv$$

(*a*) ¿Cuál es la fuerza viscosa sobre una gotita de agua de radio $r = 0{,}02$ cm que se mueve en el aire con la velocidad $v = 2$ m/s? (*b*) Una gotita que cae aumenta su velocidad hasta que la fuerza viscosa equilibra el peso de la gotita. A partir de aquí la gotita cae a velocidad constante v_t, llamada *velocidad límite*. Demostrar que la velocidad límite viene dada por

$$v_t = \frac{2\rho r^2 g}{9\eta}$$

donde ρ es la densidad de la gotita y η es la viscosidad del aire. (*c*) ¿Cuál es la velocidad límite de la gotita en el caso (*a*)?
Resp. (*a*) $1{,}38 \times 10^{-7}$ N; (*c*) 4,76 m/s.

BIBLIOGRAFÍA

AIELLO, Gerald: «The Urinary Drop Spectrometer», *Physics Today*, **27**:23 (septiembre 1974). Se trata el desarrollo de técnicas e instrumentos para el estudio del flujo durante la micción, y sus posibles aplicaciones a la diagnosis de enfermedades del aparato urinario.

ALEXANDER, R. M.: «Functional Design in Fishes», Hutchinson University Library, Londres, 1967. En el capítulo 3 se discute el papel de la vejiga natatoria en el empuje del pez.

———: «Animal Mechanics», University of

Capítulo 8 Gases

Una cantidad dada de gas no posee un volumen o una densidad definidos sino que se expande hasta llenar el recipiente en el que está contenido. Sin embargo, hay una relación definida entre el volumen, la presión y la temperatura de un gas, de modo que una cantidad dada de gas ocupa un volumen definido a una presión y temperatura dadas. Aunque esta relación es muy compleja para un gas denso, o *real*, es muy simple para un gas diluido, o *ideal*. Las propiedades de un gas ideal son importantes en la práctica porque los gases que intervienen en la respiración son aproximadamente ideales. Estas propiedades son también de interés teórico porque pueden ser totalmente explicadas en función de los movimientos de las moléculas del gas. El estudio de los gases reales es necesario para entender la transformación entre las fases líquidas y gaseosas.

8.1. MASA ATÓMICA

La masa de un átomo o molécula individual se expresa corrientemente en *unidades de masa atómica* (u). Esta unidad se define en función de un átomo de carbono normal, ^{12}C, al que se asigna la masa de 12,00000 u. Puesto que un átomo de hidrógeno tiene alrededor de un doceavo de la masa de un átomo de carbono, su masa es 1,0 u. La masa de una molécula de hidrógeno, H_2, es 2,0 u, ya que cada molécula está compuesta de dos átomos de hidrógeno enlazados uno con otro. Del mismo modo, la masa de un átomo de oxígeno, O, es 16,0 u, en tanto que la masa de una molécula de oxígeno, O_2, es 32,0 u.

OBSERVACIÓN. El carbono está compuesto de dos tipos diferentes de átomos que poseen las mismas propiedades químicas pero masas diferentes. Estos *isótopos* del carbono se designan como ^{12}C y ^{13}C, respectivamente, indicando en el índice el número entero más próximo a la masa del átomo (Apart. 20.1). La tabla 20.1 da las masas exactas de los isótopos del carbono y de otros elementos, mientras que la tabla de los elementos del interior de la cubierta trasera da la masa media de los átomos que componen cada elemento. Por ejemplo, el 99 por ciento de los átomos de carbono son ^{12}C y el 1 por ciento son ^{13}C; por tanto la masa media del carbono es

$$m_C = \frac{99 \times m_{^{12}C} + 1 \times m_{^{13}C}}{100}$$
$$= \frac{99 \times 12\ u + 1 \times 13\ u}{100}$$
$$= 12,01\ u$$

En este capítulo utilizaremos las masas medias dadas en la tabla de los elementos a menos que especifiquemos un isótopo particular por medio de un índice.

Se ha hallado experimentalmente que la masa absoluta de un átomo de ^{12}C es

$$m_{^{12}C} = 19{,}92637 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Esto determina la conversión entre la unidad de masa atómica y el kilogramo dado que, por definición,

$$m_{^{12}C} = 12{,}00000 \text{ u}$$

Por consiguiente la conversión es

$$1 \text{ u} = \frac{19{,}92637 \times 10^{-27} \text{ kg}}{12}$$
$$= 1{,}660531 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}660531 \times 10^{-24} \text{ g}$$

En muchos casos es conveniente medir la cantidad de sustancia en *moles*, una unidad que especifica el número de moléculas en una sustancia, en lugar de en gramos o kilogramos que son las unidades de masa. Esto es cierto sobre todo en química porque la cantidad de sustancia que reacciona con una cantidad dada de otra, depende del número de moléculas de cada sustancia y no de sus masas. También es cierto en el estudio de los gases, porque las propiedades de un gas dependen del número de moléculas del gas y no de su masa.
El *mol* es un número tipo de moléculas, igual al número N_A de átomos en 12 g de carbono. La masa de N_A átomos de carbono es evidentemente $N_A m_c$, luego

$$N_A m_C = 12 \text{ g}$$

o sea

$$N_A = \frac{12 \text{ g}}{m_C} = \frac{12 \text{ g}}{19{,}9 \times 10^{-24} \text{ g}}$$
$$= 6{,}02 \times 10^{23}$$

Éste es el *número de Avogadro*. Un mol de una sustancia cualquiera es una cantidad de materia que contiene N_A moléculas de esa sustancia.
La masa en gramos $\mathfrak{M}$ de 1 mol es

$$\mathfrak{M} = N_A m \text{ (g)}$$

donde m(g) es la masa en gramos de una molécula individual. Como m(g) está relacionada con la masa en unidades de masa atómica m(u) de una molécula por medio de la ecuación de conversión

$$m(\text{g}) = 1{,}66 \times 10^{-24} \, m(\text{u})$$

tenemos

$$\mathfrak{M} = N_A m(\text{g}) = (6{,}02 \times 10^{23})(1{,}6 \times 10^{-24}) m(\text{u}) = m(\text{u})$$

Es decir, la masa $\mathfrak{M}$ de un mol de una sustancia en gramos es igual a la masa m (u) de una molécula individual en unidades de masa atómica.

Dado que $\mathfrak{M}$ es la masa (en gramos) de 1 mol de sustancia, n moles de sustancia tienen la masa $n\mathfrak{M}$ (en gramos). Si la sustancia ocupa un volumen V (en centímetros cúbicos), su densidad ρ (en gramos por centímetro cúbico) es

$$\rho = \frac{n\mathfrak{M}}{V} \qquad 8.1$$

La densidad de partículas η se define como el número de moléculas por unidad de volumen. Puesto que n moles contienen nN_A moléculas, la densidad de partículas de n moles de una sustancia en un volumen V es

$$\eta = \frac{nN_A}{V} \qquad 8.2$$

Ejemplo. ¿Cuál es la densidad de partículas en un tarro de 1500 cm^3 que contiene 8 g de oxígeno?
Dado que la masa de 1 mol de oxígeno ($m_{O_2} = 32$ u) es $\mathfrak{M} = 32$ g, hay 1/4 mol de oxígeno en el tarro, o sea 1/4 N_A moléculas. Por lo tanto, la densidad de partículas es

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}N}{1500\ cm^3}$$
$$= \frac{0.25 \times 6 \times 10^{23}\ moleculas}{1500\ cm^3}$$
$$= 10^{20}\ moleculas/cm^3$$

Puesto que un gas se expande hasta llenar el recipiente en el que está contenido, su densidad puede variarse modificando el tamaño del recipiente. Cuando la densidad de partículas es muy pequeña (menor que 10^{20} moléculas/cm^3), las moléculas del gas están tan separadas que raramente chocan entre sí. Las propiedades de un gas diluido como éste no dependen del tipo de moléculas del que está constituido, ya que sus moléculas raras veces interaccionan. Así, todos los gases tienden a tener el mismo comportamiento cuando η es pequeño. Este comportamiento, que caracteriza al *gas ideal,* se describe en los tres apartados siguientes.

8.2. TEMPERATURA

El concepto de temperatura es bastante sutil. Aunque todo el mundo tiene una idea aproximada de que la temperatura es una medida del grado relativo de calor o frío de una sustancia, esto no nos lleva muy lejos sin antes entender el significado físico de caliente y frío. Resulta que es mejor comenzar con una definición operacional de la temperatura, lo mismo que hicimos con la longitud y el tiempo en el Cap. 1. Después, cuando desarrollemos las propiedades del gas ideal, se hará patente el significado físico fundamental de la temperatura.

Desde el punto de vista operacional, la temperatura es lo que se mide con un termómetro. Un termómetro normal de laboratorio consiste en un tubo de vidrio cerrado con un bulbo en un extremo (Fig. 8.1). El bulbo y parte del tubo están llenos de un líquido (corrientemente mercurio), y el resto del tubo está vacío. La temperatura de una mezcla de agua y hielo se define como 0 °C en la escala Celsius.* Por lo tanto, para calibrar el termómetro, se coloca primero en una mezcla hielo-agua y se graba una línea por fuera del tubo frente a la posición donde termina la columna de mercurio. A continuación se coloca el termómetro en agua hirviendo, cuya temperatura (a la presión atmosférica) se define como 100 °C. El mercurio, al calentarlo, se dilata más que el vidrio, y sube por lo tanto en el tubo de vidrio. Se graba en el tubo una segunda línea frente a donde termina la columna de mercurio una vez que ha dejado de subir. Las marcas de temperaturas intermedias se hacen dividiendo la distancia entre la marca correspondiente a 0 °C y la correspondiente a 100 °C en 100 intervalos iguales. Por consiguiente, la temperatura de una sustancia se puede medir con este termómetro poniendo su bulbo en contacto con la sustancia y observando la posición donde termina la columna de mercurio. Si esto sucede en la vigésima división entre la línea de 0 °C y la de 100 °C, su temperatura es 20 °C. Las temperaturas por encima de 100 °C y por debajo de 0 °C se miden ampliando la escala por encima y por debajo de las marcas de 100 y 0 °C del tubo.

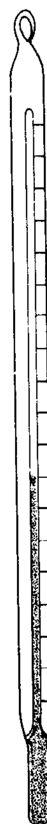


FIGURA 8.1
Termómetro de laboratorio.

Desgraciadamente, la temperatura medida de esta manera depende en cierto grado del líquido empleado en el termómetro. Por ejemplo, un termómetro de mercurio y un termómetro de alcohol, ambos calibrados del mismo modo, dan para la temperatura de una sustancia medidas ligeramente diferentes porque estos líquidos se dilatan con la temperatura de manera diferente. Se podría *definir* la temperatura especificando una sustancia particular a utilizar en el termómetro patrón, pero tal definición carece de significación física fundamental. Para conseguir una definición de temperatura más significativa sería deseable disponer de un termómetro que no dependiese de las propiedades particulares de cualquier sustancia. Puesto que todos los gases tienen el mismo comportamiento a baja densidad, se utiliza para la definición tipo de temperatura un termómetro de gas diluido.

En un termómetro de gas se encierra un gas diluido en un bulbo de vidrio que está conectado por medio de un tubo estrecho a un manómetro de mercurio (Fig. 8.2). La rama izquierda del manómetro está cerrada a presión cero, de manera que la diferencia en las alturas de las dos columnas de mercurio es igual a la presión absoluta del gas. Las dos ramas del manómetro están unidas por un tubo de goma flexible que permite que la rama de la izquierda pueda subirse o bajarse con respecto a la de la derecha. Durante la operación con este instrumento, la rama de la izquierda se desplaza arriba y abajo hasta que el mercurio de la derecha alcanza precisamente el tope del tubo manométrico. De este modo se mantiene constante el volumen ocupado por el gas.

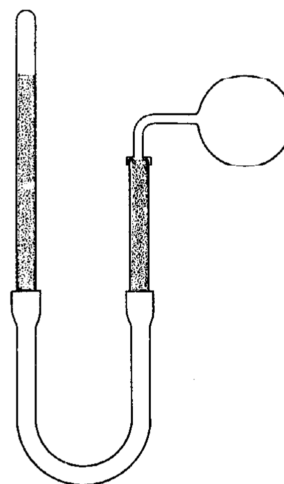


FIGURA 8.2
Termómetro de gas. Un bulbo de vidrio que contiene un gas diluido está conectado a un manómetro de mercurio.

Este instrumento se calibra midiendo primero la presión absoluta p_i en el bulbo cuando éste se coloca en una mezcla de hielo y agua (tem-

* El nombre de Celsius ha sido adoptado oficialmente para reemplazar al de centígrado en el uso internacional.

peratura del hielo). Cuando el bulbo se coloca después en agua hirviendo (temperatura del vapor), la presión del gas aumenta, de modo que parte del mercurio abandona la rama de la derecha. Levantando el tubo de la izquierda, el nivel del mercurio en el tubo de la derecha vuelve al tope del tubo. Una vez hecho este ajuste, se mide la presión p_s del gas a la temperatura del vapor. Los valores de p_i y p_s dependen, por supuesto, de la cantidad de gas que hay en el bulbo. Sin embargo, si la densidad de partículas η es suficientemente pequeña, el cociente p_s/p_i no depende ni del valor de η ni de la composición del gas. Se trata de una constante universal, independiente de las propiedades de cualquier sustancia. Mediante el empleo de gases muy diluidos se han hecho medidas muy cuidadosas de este cociente que ha resultado ser

$$\frac{p_s}{p_i} = 1{,}3661$$

Lo único especial acerca de las temperaturas del hielo y del vapor es que se reproducen con facilidad en el laboratorio, de aquí que sean puntos de calibración convenientes. No obstante, el cociente p/p_i, donde p es la presión en el bulbo a cualquier otra temperatura, es también independiente de la naturaleza del gas. Por lo tanto, es natural definir la escala fundamental de temperatura en función de este cociente.

Definición. La *temperatura fundamental o absoluta T* viene definida por

$$T = a\frac{p}{p_i} \qquad 8.3$$

donde p es la presión en el bulbo a esta temperatura y a es una constante arbitraria.

Esta constante se escoge de manera que la diferencia entre la temperatura del vapor T_s y la del hielo T_i sea exactamente 100 unidades de temperatura, o kelvins (K). Por definición, estas temperaturas vienen dadas por la Ec. 8.3 reemplazando p por p_s y p_i respectivamente. Es decir

$$T_s = a\frac{p_s}{p_i} = 1{,}3661a$$

$$T_i = a\frac{p_i}{p_i} = a$$

y por lo tanto su diferencia es

$$T_s - T_i = 1{,}3661a - a = 0{,}3661a$$

Igualando esto a 100 K obtenemos

$$T_s - T_i = 100\text{ K} = 0{,}3661a$$

o sea

$$a = \frac{100\text{ K}}{0{,}3661} = 273{,}15\text{ K} \qquad 8.4$$

Así la temperatura absoluta T del bulbo cuando su presión es p es

$$T = 273{,}15\text{ K} \times \frac{p}{p_i}$$

La temperatura es una nueva dimensión fundamental y su unidad de medida es el kelvin. Las diferentes escalas de temperatura de uso común se distinguen poniendo una letra detrás de la unidad. Una temperatura medida en la escala absoluta, o *Kelvin*, es designada por K. Por ejemplo, la temperatura del hielo es 273,15 K.
Puesto que la presión del gas en el bulbo no puede ser menor que cero, las temperaturas por debajo de 0 K no están definidas. De hecho, no existen temperaturas por debajo del cero absoluto, de modo que el punto cero de la escala absoluta corresponde a la temperatura más fría posible.
Una temperatura t en la escala Celsius está relacionada con la temperatura absoluta T por

$$t = T - 273.15 \qquad 8.5$$

En esta escala, la temperatura del hielo es 0° C, la temperatura del vapor es 100° C y el cero absoluto es —273,15° C. Obsérvese que el índice ° de grado se conserva en la temperatura Celsius pero se omite en la Kelvin.
Dado que el termómetro de gas no es conveniente para el uso ordinario de laboratorio, se emplean corrientemente en su lugar otros instrumentos como el termómetro de mercurio y los transductores térmicos. Estos instrumentos se calibran para medir la temperatura definida por el termómetro de gas.

8.3. EL GAS IDEAL

Ley de los gases ideales

Un *gas ideal* es un gas cuyas moléculas están tan separadas que raramente chocan unas con otras. Puesto que éste es el caso para cualquier gas real a baja densidad de partículas, todos los gases son ideales a baja densidad. Este hecho fue utilizado en el apartado anterior para definir la temperatura absoluta T en función de la presión p de un gas ideal a volumen constante. El resultado es la Ec. 8.3, que puede escribirse también

$$p = \frac{p_i}{a} T \qquad 8.6$$

Esto establece que, a volumen constante, la presión de un gas ideal es proporcional a la temperatura absoluta.
La dependencia existente entre p y el volumen del gas puede deducirse de la Ec. 8.6 en el supuesto de que p_i, la presión del gas a la temperatura del hielo, sea proporcional a la densidad de partículas,

$$p_i = b\eta \qquad 8.7$$

donde b es otra constante independiente de la composición química del gas. Esta suposición es razonable porque, como veremos en el apartado siguiente, la presión del gas es producida por las moléculas del gas al chocar con la pared del recipiente. Cuando se duplica la densidad de partículas, hay el doble de moléculas en el recipiente.

Para un gas diluido esto significa que choca con la pared el doble de moléculas y de aquí que la presión se vea duplicada.

OBSERVACIÓN. La Ec. 8.7 no es correcta si η es muy grande. En un gas denso, la frecuencia con que una molécula choca contra una pared se ve afectada por la presencia de las otras moléculas. Por un lado, después de chocar contra la pared, una molécula puede rebotar en alguna molécula próxima y chocar contra la pared una segunda vez. Este efecto tiende a aumentar la presión por encima del valor dado por la Ec. 8.7. Por otro lado, si las moléculas del gas se atraen entre sí fuertemente, pueden tener cierta tendencia a mantenerse unidas brevemente después de cada colisión. Este efecto tiende a disminuir la presión por debajo del valor de la Ec. 8.7. Por lo tanto, la presión en un gas real puede ser mayor o menor que la presión en un gas ideal (Apart. 8.5).

La densidad de partículas está relacionada con el número de moles n y con el volumen V del gas por medio de la Ec. 8.2, de modo que la Ec. 8.7 puede escribirse

$$p_i = \frac{bnN_A}{V}$$

Así, la dependencia existente en p y el volumen se obtiene sustituyendo por esta última expresión en la Ec. 8.6:

$$p = n\frac{bN_A}{a}\frac{T}{V} \qquad 8.8$$

La magnitud bN_A/a es la *constante R de los gases*. Sus dimensiones son [energía/kelvin], y su valor es

$$R = \frac{bN}{a} = 8{,}314 \text{ J/K}$$

En función de R, la Ec. 8.8 se convierte en

$$p = \frac{nRT}{V}$$

que es la ley de los gases ideales.

Definición. La *ley de los gases ideales*

$$pV = nRT \qquad 8.9$$

da la relación entre la presión p, el volumen V y la temperatura T de n moles de un gas ideal. Debe ponerse cuidado y atención en el uso de esta ecuación porque las magnitudes que aparecen en ella deben estar en la forma apropiada y en las unidades correctas. La presión es la presión absoluta en newtons por metro cuadrado, el volumen en metros cúbicos y la temperatura es la temperatura absoluta en kelvins.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la densidad de masa del oxígeno a *temperatura y presión normales* (TPN), es decir, a 0 °C y 1 atm?

Se utiliza la ley de los gases ideales a fin de determinar el número de moles n de un gas ideal en un volumen $V = 1$ m^3 a una presión de $p = 1$ atm $= 1{,}01 \times 10^5$ N/m^2 y una temperatura de $T = 273$ K. En primer lugar se despeja n de la Ec. 8.9 y después se aplican en ella estos valores. El resultado es

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1.01 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2})(1\ \mathrm{m^3})}{(8.31\ \mathrm{J/K})(273\ \mathrm{K})}$$

$$= 44{,}5$$

Puesto que la masa de un mol de oxígeno, O_2, es 32 g, la masa de 44,5 moles de oxígeno es 44,5 × 32 g = 1425 g = 1,425 kg. Por lo tanto la densidad TPN del oxígeno es 1,43 kg/m³ que concuerda con el valor dado en la tabla 7.2.

Ejemplo 2. Supongamos que el neumático de un automóvil se llena con aire a una temperatura de 20 °C hasta una presión (manométrica) de 24 lb/pulg². Después de recorrer 100 millas por una carretera, la temperatura del neumático es 50 °C. ¿Cuál es la presión del neumático a esta temperatura?
La mejor manera de proceder es, en primer lugar, volver a escribir la Ec. 8.9 de forma tal que las magnitudes que sufren variaciones queden a un lado de la ecuación y las que permanecen constantes, en el otro. En este caso T y p varían, pero no así el volumen V ni, por supuesto, n y R. Por lo tanto la Ec. 8.9 se puede escribir de nuevo en la forma

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} \qquad 8.10$$

A continuación, las magnitudes dadas deben ponerse en la forma apropiada. Las temperaturas Celsius deben expresarse en temperaturas absolutas y las presiones manométricas en presiones absolutas. De la Ec. 8.5 se tiene que la temperatura inicial es $T_I = 273 + 20 = 293$ K y la temperatura final, $T_F = 273 + 50 = 323$ K. Suponiendo que la presión atmosférica es 14,7 lb/pulg², la presión absoluta inicial es $p_I = 14{,}7 + 24{,}0$ lb/pulg² = 38,7 lb/pulg².
A la temperatura inicial, la Ec. 8.10 es

$$\frac{p_I}{T_I} = \frac{nR}{V}$$

y a la temperatura final es

$$\frac{p_F}{T_F} = \frac{nR}{V}$$

de modo que

$$\frac{p_I}{T_I} = \frac{p_F}{T_F}$$

Por último despejamos de aquí p_F

$$p_F = \frac{T_F}{T_I}\,p_I$$

$$= \frac{323\ \mathrm{K}}{293\ \mathrm{K}} \times 38.7\ \mathrm{lb/pulg^2}$$

$$= 42{,}6\ \mathrm{lb/pulg^2}$$

La presión manométrica en el neumático a la temperatura más elevada es 42,6 — 14,7 lb/pulg² = 27,9 lb/pulg², que resulta ser 3,9 lb/pulg² más alta que la presión manométrica inicial.

OBSERVACIÓN. En este último ejemplo no se necesita la constante R de los gases porque sólo se ha calculado lo que ha variado la presión. Como

se han utilizado proporciones para hallar p_F, la presión no ha tenido que ser convertida a unidades SI. En cambio, en el primer ejemplo se necesita R para poder calcular el número de moles de un gas en determinadas condiciones. Puesto que el valor de R está dado en unidades SI, todas las otras magnitudes habían de darse también en unidades SI. A menudo es más conveniente medir la presión en atmósferas, milímetros de mercurio o libras por pulgada cuadrada y el volumen en litros, centímetros cúbicos o pies cúbicos. En lugar de convertir estas unidades en unidades SI, se utiliza el valor de R que corresponde a estas unidades. La tabla 8.1 da los valores de R que han de ser empleados en la Ec. 8.9 cuando p y V se miden en estas otras unidades.

Ley de Dalton de la presión parcial

Un mol de aire seco consta de $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas, de las que el 78,1 por ciento son moléculas de nitrógeno, 20,9 por ciento de oxígeno, 0,9 por ciento de argón y 0,03 por ciento de dióxido de carbono. Puesto que, como hemos calculado, hay 44,5 moles de un gas ideal en 1 m^3 a TPN, hay $44{,}5 \times 0{,}209 = 9{,}31$ moles de oxígeno en 1 m^3 de aire a TPN. Las moléculas de oxígeno ejercen una presión parcial p_{O_2} igual a la presión que ejercerían si no estuviesen presentes las otras moléculas del gas. De la Ec. 8.9 se obtiene que esta presión es

$$p_{O_2} = \frac{nRT}{V} = \frac{(9{,}31 \times 8{,}31\ \text{J/K})(273\ \text{K})}{1\ \text{m}^3}$$
$$= 0{,}211 \times 10^5\ \text{N/m}^2$$
$$= 0{,}209\ \text{atm}$$

que es el 20,9 por ciento de la presión total de 1 atm ejercida por el aire.

Ley de Dalton de la presión parcial. *En una mezcla de gases ideales cada componente ejerce una presión parcial proporcional a su concentración molecular.* La presión total de la mezcla es igual, por consiguiente, a la suma de las presiones parciales de todos los gases componentes.

La ley de Dalton es importante porque los efectos fisiológicos de cada componente del aire dependen de la presión parcial que ejerce el componente en los pulmones y no de la presión total. Por ejemplo, la cantidad de nitrógeno que se disuelve en la sangre y en los tejidos del cuerpo es proporcional a la presión parcial del nitrógeno en los pulmones. La presión parcial del nitrógeno se hace peligrosamente elevada para un buzo a grandes profundidades.

TABLA 8.1. **Valores de la constante R de los gases para diversas unidades de presión y volumen.**
La temperatura aparece siempre en kelvins.

Volumen	Presión	R
m^3	N/m^2	8,314 J/K
1 litro	atm	$8{,}205 \times 10^{-2}$ atm-l/K
1 litro	mm Hg	62,4 mm Hg-l/K
cm^3	atm	82,05 atm-cm^3/K
cm^3	mm Hg	$6{,}24 \times 10^4$ mm Hg-cm^3/K
pie^3	atm	$2{,}90 \times 10^{-3}$ atm-pie^3/K
pie^3	lb/$pulg^2$	$4{,}26 \times 10^{-2}$ lb-pie^3/$pulg^2$-K

Respiración subacuática

En la respiración normal, el diafragma se desplaza hacia abajo aumentando el volumen de la cavidad torácica y, de acuerdo con la Ec. 8.9, rebajando la presión en el interior de los pulmones. Durante la inspiración esta presión desciende unos 3 mm Hg por debajo de la presión atmosférica, la cual impulsa el aire en los pulmones venciendo la resistencia que presentan al flujo los conductos por los que circula el aire (Apart. 7.5). Durante la espiración, el diafragma se eleva, con lo que disminuye el volumen de la cavidad torácica y sube la presión en los pulmones unos 3 mm Hg por encima de la presión atmosférica. Esto obliga al aire a salir de los pulmones. Por consiguiente, la presión del aire en los pulmones es normalmente muy próxima a la presión atmosférica, de modo que las presiones parciales del oxígeno y del nitrógeno en los pulmones son 0,209 y 0,781 atm, respectivamente.*

Un buzo sumergido puede respirar con normalidad a grandes profundidades si el aire que se le suministra está a una presión igual a la presión del agua que le rodea. Para suministrar aire a la presión reinante a requerimiento del buzo, es decir, cuando éste respira, se ha diseñado un moderno aparato autónomo de respiración subacuática (scuba). El aparato consta de un depósito de aire a alta presión (inicialmente por encima de 170 atm) conectado a una boquilla por medio de un tubo flexible. Un regulador entre el depósito y la boquilla permite al aire entrar en la boca del buzo a una presión igual a la del agua que le rodea.

La presión sobre un buzo aumenta alrededor de 1 atm por cada 10 m de profundidad (Apart. 7.3). A 60 m, por ejemplo, un buzo debe respirar aire a una presión de 7 atm. La presión parcial del nitrógeno a esta profundidad es $p_{N_2} = 0{,}78 \times 7$ atm $= 5{,}5$ atm. Esta presión tan elevada del nitrógeno origina que éste se disuelva en la sangre y en los tejidos en proporciones tóxicas, dando lugar a la *narcosis del nitrógeno,* con síntomas de optimismo y trastorno mental, semejantes a los de la intoxicación alcohólica *(éxtasis de la profundidad).*

Para que un hombre pueda vivir y trabajar con seguridad a grandes profundidades debe respirar una mezcla especial de gases. En las experiencias, en las que varios hombres vivieron durante semanas a profundidades de 200 m, se utilizó una mezcla de 97 % de helio y 3 % de oxígeno. El helio se empleó en vez del nitrógeno para evitar la narcosis. La baja concentración de oxígeno es necesaria para evitar la intoxicación por oxígeno que se produce cuando la presión de éste es elevada. Aun con una concentración del 3 % la presión parcial del oxígeno está por encima del nivel normal, pues la presión a 200 m es de 21 atm, por lo tanto la presión del oxígeno es $p_{O_2} = 0{,}03 \times 21$ atm $= 0{,}63$ atm, que es aún 3 veces la presión normal de oxígeno. A una presión parcial superior a 2 atm el oxígeno se hace lo suficientemente tóxico como para producir convulsiones y coma.

* Las presiones parciales del oxígeno y del nitrógeno en los pulmones son en realidad algo menores que éstas a causa del vapor de agua de los pulmones (Apart. 8.5).

8.4. TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES IDEALES

Presión, temperatura y energía cinética

La presión que ejerce un gas sobre las paredes de su recipiente es el resultado de los choques de las moléculas del gas con las paredes. Se puede calcular esta presión en función de la energía cinética media de las moléculas de un gas ideal y relacionar esta energía cinética con la temperatura.

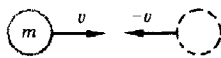


FIGURA 8.3
Una molécula que choca contra una pared perpendicularmente con velocidad v rebota en dirección opuesta con velocidad $-v$.

Una molécula de masa m que se mueve con velocidad v perpendicularmente hacia una pared rebotará con una velocidad $-v$ en la dirección opuesta (Fig. 8.3). Los ímpetus inicial y final de la molécula son por consiguiente mv y $-mv$, de modo que la variación del ímpetu es

$$\Delta p = -mv - mv = -2mv$$

Por la Ec. 6.11 la fuerza F_m ejercida sobre la molécula por la pared es

$$F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-2mv}{\Delta t}$$

donde Δt es el intervalo de tiempo durante el cual actúa F_m, es decir, el tiempo que tarda la molécula en cambiar de dirección. La fuerza de reacción

$$F_w = -F_m = \frac{2mv}{\Delta t}$$

es la fuerza ejercida por la molécula sobre la pared.

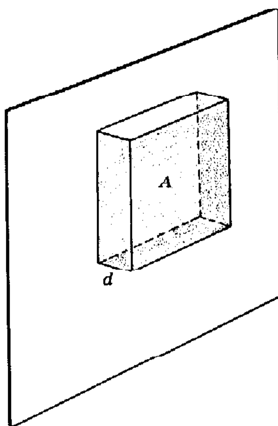


FIGURA 8.4
Una región de área A y profundidad d en la pared de un recipiente.

En la Fig. 8.4 vemos que todas las moléculas que chocan contra una superficie A de la pared en un tiempo Δt han de estar contenidas en una región de volumen $V = Ad$, donde $d = v\Delta t$ es la distancia que recorre una molécula con velocidad v durante el tiempo Δt. El número N de moléculas en este volumen es

$$N = \eta V = \eta A d = \eta A v\,\Delta t$$

donde η es la densidad de partículas. Claro está que no todas las moléculas de este volumen se mueven hacia la pared. Podemos suponer que, en promedio, un tercio de las moléculas se mueven en cada dirección, y que de este tercio que se mueve en una dirección determinada la mitad se mueve hacia la pared en tanto que la otra mitad se aleja de ella. Por lo tanto, en cada instante, de todas las moléculas del volumen V, sólo $(1/3)(1/2) = (1/6)$ se están moviendo perpendicularmente hacia la pared. La fuerza total que ejercen sobre la superficie A de la pared es

$$F = \tfrac{1}{6}NF_w = \tfrac{1}{6}(\eta A v\,\Delta t)\frac{2mv}{\Delta t} = \tfrac{1}{3}\eta A m v^2$$

y la presión que ejercen es

$$p = \frac{F}{A} = \tfrac{1}{3}\eta m v^2 \qquad 8.11$$

En realidad, las moléculas del gas tienen una amplia distribución de velocidades, de modo que v^2 en la Ec. 8.11 ha de reemplazarse por $\overline{v^2}$, el promedio del cuadrado de la velocidad. En función de la energía cinética media $K = \frac{1}{2} m\overline{v^2}$ de una molécula, la presión es

$$p = \tfrac{2}{3}\eta\bar{K}$$

Pero por la Ec. 8.2 tenemos

$$\eta = \frac{nN_A}{V}$$

y por consiguiente
$$p = \frac{2}{3}\frac{nN_A\bar{K}}{V}$$

La presión también se relaciona con la temperatura mediante la Ec. 8.9:

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Igualando ambas expresiones para p obtenemos la siguiente relación entre la temperatura y la energía cinética media de una molécula del gas

$$\frac{nRT}{V} = \frac{2}{3}\frac{nN_A\bar{K}}{V}$$

o

$$\bar{K} = \frac{3}{2}\frac{RT}{N_A} = \tfrac{3}{2}kT \qquad 8.12$$

donde $k = R/N_A$ se denomina la constante de Boltzmann. Como R es la constante de los gases para un mol de gas y N_A es el número de moléculas de un mol, la constante de Boltzmann k es la constante de los gases por molécula. Su valor es

$$k = \frac{8{,}314 \text{ J/K}}{6{,}02 \times 10^{23}} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

La constante de Boltzmann relaciona la temperatura absoluta T con la energía cinética media de las moléculas en un gas ideal. De hecho, la temperatura es precisamente una medida de esta energía cinética. Éste es el sentido físico fundamental de la temperatura. Esta conexión entre temperatura y energía tiene también importancia práctica porque, como veremos, explica la dependencia de la velocidad de las reacciones químicas con la temperatura.

Distribución de la energía cinética

La velocidad de una molécula de un gas cambia cuando choca con otras moléculas, de modo que en un instante cualquiera todas las moléculas de un gas tienen velocidades diferentes. Por lo tanto, algunas moléculas deben tener una energía cinética menor que la energía media K, mientras que otras tienen una energía cinética mayor que $\bar{K}$.

El número real de moléculas con energías diferentes puede ser calculado para un gas ideal, y el resultado concuerda con las medidas experimentales de las energías moleculares. La tabla 8.2 da este resultado y muestra la fracción f de moléculas con energía cinética mayor que $y\bar{K}$ para diversos valores de y. Por ejemplo, la tabla da $f = 0{,}112$ para $y = 2$, lo cual significa que en un instante cualquiera el 11,2 por ciento de las moléculas tiene una energía cinética mayor que el doble de la energía cinética media. Este resultado no depende de la temperatura del gas, aunque, por supuesto, sí depende el valor de $\bar{K}$.

TABLA 8.2. **Fracción f de las moléculas de un gas ideal con una energía cinética superior a $y\bar{K}$.** $\bar{K}$ es la energía cinética media de las moléculas del gas.

y	f
0,5	0,685
1	0,392
2	0,112
3	$0{,}29 \times 10^{-1}$
4	$0{,}76 \times 10^{-2}$
5	$0{,}18 \times 10^{-2}$
10	$0{,}14 \times 10^{-5}$
15	$0{,}94 \times 10^{-9}$
20	$0{,}59 \times 10^{-12}$
30	$0{,}24 \times 10^{-18}$
40	$0{,}77 \times 10^{-25}$
50	$0{,}31 \times 10^{-31}$
100	$0{,}11 \times 10^{-63}$

Ejemplo. ¿Cuáles son las fracciones de moléculas con energía cinética mayor que $31{,}05 \times 10^{-21}$ J a 300 K y a 375 K?
A la temperatura de 300 K, la energía cinética media de las moléculas de un gas es

$$\begin{aligned}\bar{K}_{300} &= \tfrac{3}{2}kT \\ &= (1{,}5 \times 1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K}) \\ &= 6{,}21 \times 10^{-21}\ \text{J}\end{aligned}$$

La fracción de moléculas de este gas con energía mayor que $E = 31{,}05 \times 10^{-21}$ J se obtiene calculando el factor

$$y = \frac{E}{\bar{K}_{300}} = \frac{31{,}05 \times 10^{-21}\ \text{J}}{6{,}21 \times 10^{-21}\ \text{J}} = 5$$

y utilizando después la tabla 8.2 para determinar $f_{300} = 0{,}18 \times 10^{-2}$. Si la temperatura del gas se eleva un 25 por ciento, es decir a 375 K, la energía cinética media se eleva también un 25 por ciento, o sea, $\bar{K}_{375} = 7{,}76 \times 10^{-21}$ J. A esta temperatura $y = 4$, de modo que la fracción f_{375} de moléculas con energía superior a E es $0{,}76 \times 10^{-2}$. Es decir, por cada 10 000 moléculas del gas, 18 tienen energía mayor que E a 300 K y 76 tienen energía mayor que E a 375 K. Así, hay

$$\frac{76}{18} = \frac{f_{375}}{f_{300}} = 4{,}2$$

veces más moléculas con energía mayor que E a 375 K que a 300 K. En este caso un aumento de temperatura del 25 por ciento produce un aumento del 420 por ciento en el número de moléculas con energía mayor que E.

La distribución de la energía en un gas determina la velocidad de una reacción química porque dos moléculas sólo pueden reaccionar químicamente si una choca con la otra con energía cinética suficiente para vencer la fuerza repulsiva entre sus electrones exteriores. Si la energía de una molécula es menor que un valor específico E_a, llamado *energía de activación* de la reacción, entonces rebotará en la otra molécula sin reaccionar con ella. El valor de E_a es característico de cada reacción química.

La velocidad de una reacción química depende evidentemente de la fracción de moléculas con energía superior a E_a, y esta fracción, como acabamos de ver en el caso de un gas, es muy sensible a la temperatura. El comportamiento de las moléculas de una sustancia disuelta en un líquido es análogo al de las moléculas de un gas, de modo que la distribución de la energía de estas moléculas también viene dada por la tabla 8.2. De aquí que las velocidades de reacción en gases y en disoluciones líquidas aumenten rápidamente con la temperatura. Por ejemplo, si la energía de activación de una cierta reacción es $E_a = 31{,}05 \times 10^{-21}$ J, entonces, como hemos visto en el último ejemplo, hay 4,2 veces más moléculas con energía mayor que E_a a 375 K que a 300 K. Por consiguiente, la reacción irá 4,2 veces más rápida a 375 K que a 300 K.

La sensibilidad de las funciones biológicas a la temperatura es una consecuencia directa de la dependencia de la temperatura que presentan las velocidades de las reacciones químicas. La actividad de un organismo cualquiera es un reflejo de las velocidades de los miles de reacciones diferentes que tienen lugar en su cuerpo. Por ejemplo, la velocidad de crecimiento de las bacterias y de otros organismos simples en un cultivo aumenta en un factor 2 ó 3 por cada aumento de 10 °C entre 10 y 30 °C. Es decir, la velocidad de crecimiento a 30 °C puede ser unas 9 veces la velocidad de crecimiento a 10 °C. Ésta es, por supuesto, la razón de por qué se emplea la refrigeración para retardar que los alimentos se estropeen.

La actividad de los insectos también depende mucho de la temperatura. La mayoría de los insectos quedan inmóviles a temperaturas por debajo de 10 °C (50 °F), aunque algunas mariposas nocturnas permanecen activas por debajo de 0 °C. Los animales de sangre caliente son capaces de desenvolverse en un intervalo de temperaturas ambiente mucho más amplio, ya que pueden mantener una temperatura corporal constante. Sin embargo, si un proceso febril elevase la temperatura del cuerpo, todos los procesos químicos que tienen lugar en él se verían acelerados. A una temperatura corporal de 43 °C (109,4 °F), que es 6 °C por encima de la normal, la velocidad del metabolismo en el hombre es el doble de la normal.

8.5. GASES REALES

La presión y el volumen de un gas real están relacionados por la ley de los gases ideales, Ec. 8.9, sólo cuando la densidad de partículas es pequeña. Cuando se aumenta la presión de un gas, la disminución

TABLA 8.3. **Temperaturas críticas de algunas sustancias.**

Sustancia	Temperatura crítica, °C
Amoníaco	132,4
Dióxido de carbono	31,0
Cloro	144
Etanol	126,9
Helio	−267,9
Iodo	512
Metano	−82,1
Nitrógeno	−146,9
Oxígeno	−118,5
Propano	96,8
Azufre	1040
Triclorometano (cloroformo)	262
Agua	374,1

de volumen produce un aumento en la densidad. Por lo tanto, a presión elevada, es de esperar que la relación presión-volumen de un gas real se desvíe de la de un gas ideal. Para la mayoría de los gases estas desviaciones se hacen apreciables a densidades por encima de 10^{21} partículas/cm^3, o sea, alrededor de 1 mol/l. Es decir, a una presión a la cual 1 mol de gas ocupe un volumen de 1 litro o cosa así, no es aplicable la ley de los gases ideales.

Diagramas p-V

En la Fig. 8.5 se representa la presión p en función del volumen V ocupado por un mol de agua en estado gaseoso. Cada curva da la variación de la presión con el volumen a una temperatura fija, de modo que estas curvas reciben el nombre de *isotermas* (que significa «de igual temperatura»). Las curvas de trazo fino son las relaciones pV para un gas ideal, mientras que las de trazo lleno son las relaciones reales del H_2O. Como era de esperar, la curva real se desvía apreciablemente de la ideal para valores de V menores que 1 ó 2 l.

Definición. La *temperatura crítica* de un gas es la temperatura por encima de la cual todas las isotermas son curvas continuas. La tabla 8.3 da las temperaturas críticas de algunas sustancias.

Las isotermas de la Fig. 8.5 son típicas de cualquier gas real. Por encima de una determinada temperatura crítica, las isotermas reales son curvas que se extienden un poco por debajo de la correspondiente isoterma ideal. La isoterma real se extiende por debajo de la isoterma ideal cuando las moléculas del gas se atraen tan fuertemente entre sí que tienden a permanecer juntas brevemente, después de la colisión, y por consiguiente chocan contra las paredes menos frecuentemente que las de un gas ideal. La isoterma real se extiende por encima de la isoterma ideal cuando las moléculas no se atraen fuertemente entre sí. En este caso tienden a rebotar rápidamente en cada choque y golpean las paredes con mayor frecuencia que en el caso de un gas ideal. Por debajo de la temperatura crítica, las isotermas ya no son simples curvas suaves sino que, como la isoterma de 350 °C de la Fig. 8.5, consisten en una sección horizontal que se empalma de forma brusca con una región que varía suavemente.

Un tramo horizontal en una isoterma indica que el volumen ocupado por el gas puede disminuir sin que aumente la presión. Esto es posible porque al comprimir el gas, parte de él se condensa en estado líquido. Sin embargo, un gas puede licuarse por compresión sólo si la temperatura está por debajo de la temperatura crítica del gas. La tabla 8.3 da la temperatura crítica de algunas sustancias comunes. Obsérvese que dos de las isotermas de la Fig. 8.5 están a temperaturas por encima de 374,1 °C, la temperatura crítica del agua, y una está por debajo de dicha temperatura crítica.

La isoterma de una sustancia a su temperatura crítica, la *isoterma crítica*, es horizontal sólo en un punto, *el punto crítico*. En la Fig. 8.6 aparecen representadas las isotermas del H_2O en las proximidades de su punto crítico. En esta figura se ha ampliado la escala en comparación con la de la Fig. 8.5 a fin de exhibir el detalle necesario. Una isoterma apenas por encima de la isoterma crítica presenta una deformación cerca del punto crítico (punto C de la Fig. 8.6), pero la

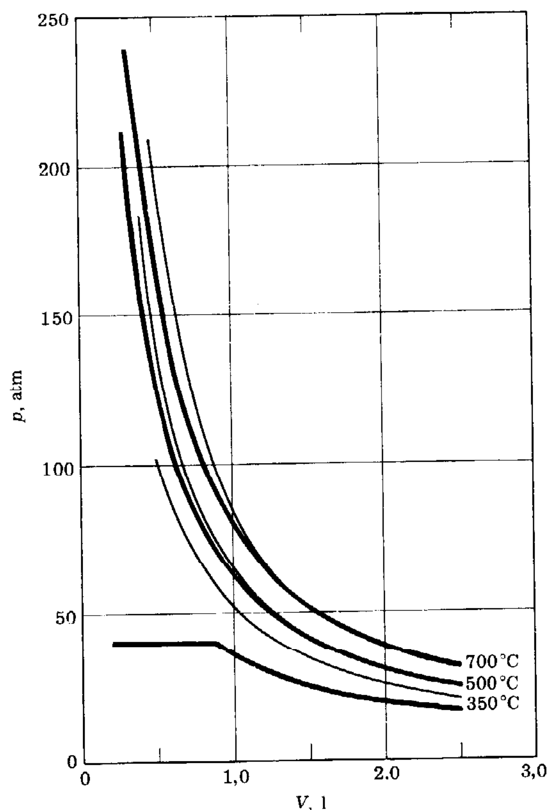


FIGURA 8.5
Representación gráfica de la presión p en función del volumen V ocupado por 1 mol de agua en forma gaseosa. Las líneas gruesas son las isotermas reales a las temperaturas indicadas. Las curvas delgadas son las isotermas de un gas ideal a las mismas temperaturas.

isoterma no es nunca horizontal. Una isoterma situada por debajo de la isoterma crítica se escinde en dos porciones distintas unidas por una línea horizontal. La isoterma crítica, que representa la transición entre estos dos tipos de isotermas, sólo es horizontal en el punto crítico.

En la Fig. 8.6 los extremos de las líneas horizontales están unidos por una curva, llamada *curva de saturación.* Esta curva toca a la isoterma crítica en el punto crítico, de manera que estas dos curvas dividen el diagrama pV en cuatro regiones. En la región situada por encima de la isoterma crítica, la sustancia permanece en forma gaseosa para todos los valores de la presión; ésta es la *región del gas.* En la región que queda por debajo de la isoterma crítica y a la derecha de la curva de saturación, la sustancia es todavía un gas pero puede licuarse por compresión; ésta es la *región del vapor.* Por debajo de la isoterma crítica y a la izquierda de la curva de saturación se encuentra la *región del liquido.* El área que queda bajo la curva de saturación es la *región liquido-vapor.*

Consideremos el punto i de la Fig. 8.6 Este punto representa 1 mol de H_2O en estado gaseoso a una temperatura de 350° C y una presión de 155 atm. Si se comprime este gas mientras se mantiene constante su temperatura, su presión aumentará. Por ejemplo, disminuyendo el volumen de 0,180 a 0,165 l la presión aumenta de 155 a 160 atm.

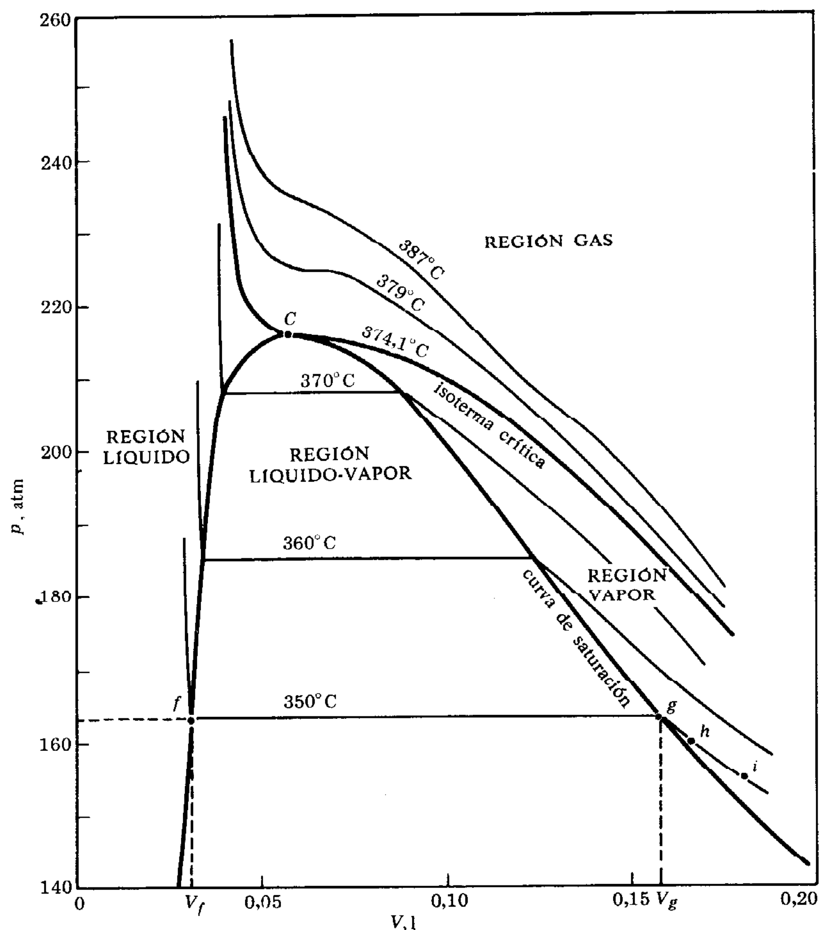


FIGURA 8.6
Isotermas de H_2O en las proximidades de su punto crítico.

La sustancia se representa ahora por el punto *h*. Cuando la sustancia se comprime de nuevo, su punto correspondiente se desplaza en el diagrama *pV* a lo largo de la isoterma. Cuando la sustancia alcanza el punto *g*, comienza a condensarse en estado líquido, de modo que el punto se mueve a lo largo de la línea horizontal *fg*. A la presión $p_v = 163$ atm de esta línea, la sustancia puede ocupar cualquier volumen entre V_f y V_g. El punto *g* corresponde al estado en el que toda la sustancia es gas, mientras que en el punto *f* toda la sustancia es líquido. Entre estos dos puntos, parte de la sustancia es líquido y parte es gas. Cuando toda la sustancia se encuentra en el estado líquido, una nueva disminución de su volumen exige un enorme incremento en la presión; de aquí que la isoterma presente una gran pendiente a la izquierda de *f*.

Presión de vapor

Definición. La *presión de vapor* p_v es la presión de la sección horizontal de una isoterma. Es la presión a la que pueden coexistir el vapor

y el líquido a la temperatura de la isoterma. La tabla 8.4 da la presión de vapor del H_2O para diversas temperaturas entre 0 y 374,1 °C. (La presión de vapor no existe evidentemente por encima de la temperatura crítica.) También se han recogido en la tabla 8.4 los volúmenes V_f y V_g ocupados por 1 mol de H_2O a la presión p_v cuando se encuentra completamente en estado líquido y en estado gaseoso, respectivamente.

La tabla 8.4 muestra que 1 mol de agua (H_2O líquida) tiene a 20°C un volumen de 0,0179 l. Si se coloca dentro de un recipiente de 2 l del que se ha desalojado el aire, se evaporará algo del líquido. Es decir, parte de las moléculas de H_2O abandonarán el líquido para formar un

TABLA 8.4. **Presión de vapor del agua a temperaturas entre 0 y 374,1° C.** La tabla recoge también los volúmenes V_f y V_g ocupados por 1 mol de H_2O en estado líquido y en estado gaseoso, respetivamente.

Temperatura °C	Presión atm	V_f litros	V_g litros
374,1	218,3	0,057	0,057
300	84,8	0,0252	0,389
250	39,2	0.0224	0,897
200	15,3	0.0207	2,28
150	4,69	0,0196	7,04
100	1,00	0,0187	30,0
80	0,466	0,0185	61,1
60	0,196	0,0183	138
40	0,0728	0.0180	350
37	0,0621	0,0.80	411
30	0,0418	0.0180	590
20	0,0230	0,0179	1004
15	0,0168	0,0179	1400
10	0,0121	0,0179	1910
5	0,00856	0,0179	2640
0	0,00626	0.0179	3700

gas en el espacio vacío que queda por encima del líquido. Cuantas más moléculas se evaporen más crece la presión de este vapor. Al mismo tiempo, parte de las moléculas del vapor chocan con la superficie del líquido pasando de nuevo al estado líquido. El número de moléculas que se vuelven a condensar aumenta cuando aumenta la presión del vapor, hasta que finalmente se alcanza un punto de *equilibrio dinámico,* en el que la velocidad a la que se evaporan y se condensan de nuevo las moléculas es la misma. La presión de vapor en este punto de equilibrio es la presión de vapor dada en la tabla 8.4, la cual a 20 °C es 0,0230 atm. Cuando la presión alcanza este valor, el número de moléculas en los estados líquido y gaseoso permanece constante. Es decir, no hay evaporación ni condensación netas, de modo que el sistema está en equilibrio. Sin embargo, todavía hay un flujo constante de moléculas del líquido al gas y un flujo igual de moléculas del gas al líquido, que es por lo que el equilibrio se dice *dinámico.* El sistema se representa por un punto en la región líquido-vapor del diagrama pV del H_2O.

En el equilibrio, el vapor ocupa un volumen de 2 l menos el volumen ocupado por el líquido, o sea

$$V = 2 \text{ l} - 0{,}018 \text{ l} = 1{.}982 \text{ l}$$

En la tabla 8.4 vemos que 1 mol de H_2O en forma de gas ocupa 1042 l a esta temperatura y presión, de manera que sólo

$$\frac{1{,}982 \text{ l}}{1042 \text{ l}} = 0{,}00190 \text{ moles}$$

de H_2O se encuentran en la fase gaseosa. En fase líquida aún quedan 0,99810 moles. Si se aumenta el volumen del recipiente mientras la temperatura se mantiene constante a 20 °C, pasará a la fase gaseosa una mayor cantidad de H_2O con el fin de conservar la presión del H_2O a 0,0230 atm. Cuando el volumen del recipiente alcanza los 1042 l, todo el H_2O se encuentra en fase gaseosa. Un nuevo aumento de volumen produce una disminución de la presión, dado que el número de moléculas en fase gaseosa no puede aumentar. El sistema se representa ahora por un punto en la región del vapor del diagrama *pV*. La presión de vapor es la presión máxima que puede tener el vapor a una temperatura dada.

El aire contiene H_2O gaseosa en concentración que varía del 0 a 6 por ciento según las condiciones meteorológicas. Este gas ejerce una presión parcial que es proporcional a su concentración. Por ejemplo, en aire que tenga un contenido en agua del 0,85 por ciento, la presión parcial del H_2O es

$$p_{H_2O} = 0{,}0085 p_0$$

donde p_0 es la presión atmosférica total. Con $p_0 = 1$ atm, la presión parcial del H_2O es 0,0085 atm.

La máxima presión parcial posible del H_2O a una determinada temperatura del aire es la presión de vapor del H_2O a esa temperatura. Por ejemplo, a una temperatura de 20 °C la presión parcial del H_2O puede ser a lo sumo de 0,023 atm (Tabla 8.4).

Definición. La *humedad relativa* del aire es la razón del contenido real de agua, H_2O, en el aire al contenido máximo posible en H_2O a la temperatura a que se encuentra el aire. Se expresa a menudo en tanto por ciento.

Ejemplo. ¿Cuál es la humedad relativa a 20°C del aire que tiene una presión parcial de H_2O de 0,0085 atm? ¿Cuál es la humedad relativa de este aire a 10 °C?

Según la tabla 8.4, la presión de vapor a 20 °C es 0,0230 atm, de modo que la humedad relativa a 20 °C es

$$\frac{p_{H_2O}}{p_v} \times 100 = \frac{0{.}0085 \text{ atm}}{0{,}0230 \text{ atm}} \times 100 = 37\%$$

Como la presión de vapor a 10 °C es de 0,0121 atm, la humedad relativa a 10 °C es

$$\frac{0{,}0085 \text{ atm}}{0{,}0121 \text{ atm}} \times 100 = 70\%$$

Definición. El *punto de rocío* del aire es la temperatura a la cual el aire tendría una humedad relativa del 100 %.

Se observa en la tabla 8.4 que el punto de rocío del aire con $p_{H_2O} = 0{,}0085$ atm está a unos 5 °C. La humedad de este aire se empieza a condensar cuando su temperatura desciende a 5 °C. A menudo esto sucede de noche y la humedad aparece en forma de rocío sobre el suelo. La humedad se condensa asimismo sobre cualquier superficie que esté a 5 °C o menos, como es el caso de la parte exterior de un vaso que contiene una bebida helada.

Definición. El *punto de ebullición* de un líquido es la temperatura a la cual la presión de vapor iguala a la presión atmosférica. A esta temperatura se forman burbujas de vapor en el interior del líquido. Las burbujas no se forman a una temperatura más baja porque la presión dentro de ellas, que es la presión de vapor, es menor que la presión atmosférica y por lo tanto quedarían aplastadas. En la tabla 8.4 puede verse que la presión de vapor del H_2O es igual a 1,0 atm a 100 °C. Esto no es, por supuesto, una coincidencia, ya que los 100 °C se definieron como el punto de ebullición del agua. Sin embargo, éste es el punto de ebullición sólo si la presión es de 1 atm. A altitudes por encima del nivel del mar la presión del aire es menor que 1,0 atm, de modo que el agua hierve a una temperatura más baja. En Méjico capital, por ejemplo, donde la presión del aire es de sólo 0,85 atm, el agua hierve a 95 °C. Por otro lado, el agua hierve en una olla a presión a una temperatura por encima de los 100 °C debido a que la presión en el interior de la olla es mayor que 1,0 atm.

PROBLEMAS

1. (*a*) ¿Cuál es la masa molecular del H_2O? (*b*) ¿Cuántas moléculas de H_2O hay en 1 g de agua?
   Resp. (*a*) 18 u; (*b*) $3{,}34 \times 10^{22}$.
2. ¿Cuál es la densidad de partículas del nitrógeno ($M = 28$) en condiciones normales (0 °C y 1 atm)? Utilizar la tabla 7.2.
3. (*a*) ¿Cuál es el volumen que ocupa, por término medio, una sola molécula de agua? (Véase el Prob. 1.) (*b*) ¿Cuál es la distancia media entre dos moléculas de H_2O?
   Resp. (*a*) 30×10^{-24} cm³; (*b*) $3{,}11 \times 10^{-8}$ cm.
4. (*a*) ¿Cuál es el volumen medio ocupado por una molécula de nitrógeno en condiciones normales? (Véase el Prob. 2.) (*b*) ¿Cuál es la distancia media entre dos moléculas de nitrógeno en estas condiciones?

OBSERVACIÓN. Los problemas 3 y 4 muestran que las moléculas de un gas a TPN se encuentran 10 veces más separadas que las moléculas de un líquido.

5. El aire de un bulbo cerrado tiene a 20 °C una presión de 1 atm. (*a*) ¿Cuál es la presión en el bulbo a 150 °C? (*b*) ¿A qué temperatura la presión en el bulbo es de 2 atm? (*c*) ¿A qué temperatura es la presión en el bulbo de 0,5 atm?
   Resp. (*a*) 1,44 atm; (*b*) 313 °C; (*c*) —126,5 °C.
6. En la escala Fahrenheit, la temperatura del punto de hielo es 32 °F, y la temperatura del punto de vapor es 212 °F. (*a*) ¿Cuántos grados Fahrenheit equivalen a un grado Celsius? (*b*) Demostrar que la conversión de una temperatura t_F en la escala Fahrenheit a una temperatura t_C en la escala Celsius viene dada por

$$t_C = \tfrac{5}{9}(t_F - 32°)$$

y que el paso de la escala Celsius a la escala Fahrenheit se lleva a cabo por medio de

$$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32°$$

(*c*) Representar gráficamente t_F en función de t_C. ¿A qué temperatura $t_F = t_C$? (*d*) ¿Cuál es el cero absoluto en la escala Fahrenheit?

7. Un gas ocupa un volumen de 22 l cuando su presión manométrica es 1,5 atm. (*a*) ¿Cuál es la presión absoluta del gas? (*b*) El gas se comprime hasta que ocupa un volumen de 10 l a la misma temperatura. ¿Cuál es la nueva presión absoluta? (*c*) ¿Cuál es la nueva presión manométrica?
Resp. (*a*) 2,5 atm; (*b*) 5,5 atm; (*c*) 4,5 atm.
8. En el fondo de un lago, a 12 m por debajo de la superficie, se forma una burbuja de volumen $V = 15$ cm^3. ¿Cuál es el volumen de la burbuja cuando alcanza la superficie del agua? (Suponer que no varía la temperatura.)
9. Un cilindro contiene 0,6 pies^3 de oxígeno a una temperatura de 25 °C y presión de 2200 lb/pulg^2. (*a*) ¿Qué volumen ocupa este gas a 25 °C y presión atmosférica? (*b*) Un hombre está respirando oxígeno puro por medio de una mascarilla a razón de 8 l/min. ¿Cuánto durará un cilindro de oxígeno? (1 l = 0,0354 pies^3).
Resp. (*a*) 89,8 pies^3; (*b*) 5,28 h.
10. Un cilindro de aire comprimido puede abastecer de aire durante 90 min a un buzo que se encuentra en la superficie del agua. ¿Cuánto durará el mismo cilindro cuando el buzo se sumerja a 20 m de la superficie? (*Indicación:* el volumen de aire inhalado por minuto no varía con la profundidad.)
11. Calcular la densidad del helio ($M = 4$) en condiciones normales, haciendo uso de la ley de los gases ideales. Comparar con la tabla 7.2.
Resp. 0,178 kg/m^3.
12. Calcular, a partir de la ley de los gases ideales, la densidad del vapor de agua a 100 °C y 1 atm. Comparar con la tabla 7.2.
13. ¿Cuál es la masa de 5 l de CO_2 a una temperatura de 55 ° C y presión de 2,5 atm? (*Indicación:* usar la tabla 8.1.)
Resp. 21,8 g.
14. ¿Cuál es la masa del oxígeno del cilindro descrito en el Prob. 9?
15. ¿Cuál es el volumen de aire que debe escapar de una habitación cuando la temperatura de la misma se eleva de 15 a 25 °C? Las dimensiones de la habitación son $10 \times 7 \times 4$ m, y la presión no varía mientras se calienta la habitación.
Resp. 9,72 m^3.
16. Calcular el volumen ocupado por 1 mol de un gas ideal en condiciones normales.
17. Calcular el volumen ocupado por 1 g de oxígeno en condiciones normales.
Resp. 0,700 l.
18. Demostrar que a la presión atmosférica la densidad del aire ($M = 29$) a la temperatura T viene dada por

$$\rho = \frac{353 \text{ K}}{T} \text{ kg/m}^3$$

Verificar esta expresión con los datos de la tabla 7.2.
19. El aire de los pulmones (aire alveolar) tiene una composición diferente del aire atmosférico. Por ejemplo, la presión parcial del dióxido de carbono en el aire alveolar es 40 mm Hg. ¿Cuál es el porcentaje de CO_2 en el aire alveolar?
Resp. 5,26 %.
20. El oxígeno constituye sólo el 13,6 por ciento del aire de los pulmones (aire alveolar). ¿Cuál es la presión parcial de O_2 en los pulmones?
21. ¿Cuántos moles de oxígeno hay en 1 l de aire en condiciones normales?
Resp. $9{,}33 \times 10^{-3}$.
22. Un gas compuesto de 3,5 g de oxígeno y 1,5 g de helio ocupa un volumen de 3 l a una temperatura de 25° C. (*a*) ¿Cuáles son las presiones parciales del oxígeno y del helio en este gas? (*b*) ¿Cuál es la densidad de la mezcla gaseosa?
23. ¿Cuál es la energía cinética media de las moléculas de un gas a 37° C?
Resp. $6{,}42 \times 10^{-21}$ J.
24. ¿Cuál es la energía cinética total de las moléculas de 1 mol de gas a 0° C?
25. De las moléculas de un gas a 25° C, ¿qué fracción posee energía cinética mayor que la energía cinética media de las moléculas de un gas a 1217° C? *Resp.* 0,0018.
26. ¿Qué fracción de las moléculas de un gas

tiene energía cinética menor que la energía cinética media del gas?
Resp. 0,608.

27. (*a*) ¿Cuál es el valor medio de v^2 para las moléculas de oxígeno a 27° C? (*b*) La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ recibe el nombre de *velocidad cuadrática media*. Calcular la velocidad cuadrática media de una molécula de oxígeno a 27° C.
Resp. (*a*) $23{,}4 \times 10^4$ m²/s²; (*b*) 484 m/s.

28. Una mezcla de gases ideales contiene moléculas de masas m y m'. Demostrar que el cociente de las velocidades cuadráticas medias v y v' de estas moléculas (Prob. 27) es

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{m}{m'}}$$

29. En un día de invierno, se hace entrar en una casa aire del exterior a 0° C y humedad relativa del 30 por ciento y allí se le calienta hasta 20° C. ¿Cuál es la humedad relativa del aire en la casa?
Resp. 8,16 %.

30. Se introduce en un cilindro aire con humedad relativa del 65 % a 20 °C y se comprime hasta que la humedad empieza a condensarse en la superficie interior del cilindro. ¿Cuál es la presión del aire cuando aparece por primera vez la humedad? Suponer que la temperatura sigue siendo de 20 °C.

31. La humedad relativa es del 37,2 por ciento un día que la temperatura es de 20° C. ¿Cuál es el punto de rocío?
Resp. 5° C.

32. El punto de rocío es de 30° C un día que la temperatura es de 37° C. ¿Cuál es la humedad relativa?

33. Un mol de H_2O ocupa un volumen de 0,101 a 300° C. (*a*) ¿Qué fracción de H_2O se encuentra en fase líquida? (*b*) ¿Cuál es el volumen ocupado por el H_2O líquida?
Resp. (*a*) 79,4 %; (*b*) 0,020 l.

*34. Cinco gramos de tetraclorometano líquido, CCl_4, se inyectan en una vasija hermética de 500 cm³ inicialmente llena de aire a 22 °C y 1 atm. La presión en la vasija aumenta a 1,114 atm. (*a*) ¿Cuál es la presión de vapor de CCl_4 a 22 °C? (*b*) ¿Qué tanto por ciento de CCl_4 está en forma de vapor?

BIBLIOGRAFÍA

EGAN, Donald F.: «Fundamentals of Inhalation Therapy», The C. V. Mosby Company, San Luis, 1969. Tratado detallado de la física y la fisiología de la respiración.

GUYTON, Arthur C.: «Medical Physiology», W. B. Saunders Company, Filadelfia, 1971. El capítulo 45 trata de la física y la fisiología de la inmersión en el fondo del mar. El capítulo 44 se ocupa de la fisiología espacial.

Capítulo 9 Líquidos

Un líquido es un fluido que posee un volumen definido a una temperatura dada. Por ejemplo, 1 mol de agua a 20° C ocupa 18,04 cm^3 (tabla 8.4), cualquiera que sea el tamaño o la forma del recipiente en el que está contenido. Aunque su volumen puede disminuir ligeramente al aplicarle una presión muy elevada, un líquido puede ser considerado incompresible a casi todos los efectos. Así, no hay un cambio significativo en el volumen del agua cuando su presión varía de 0 a 10 atm. Esto contrasta con el volumen de un gas, que es infinito a presión cero y que varía en un factor 10 cuando la presión pasa de 0 a 10 atm. Este capítulo discute algunas propiedades de los líquidos de importancia biológica.

9.1. CALOR DE VAPORIZACIÓN

Dos moléculas se repelen mutuamente cuando están muy próximas, pero se atraen cuando están relativamente separadas. Esta fuerza de atracción disminuye cuando la distancia que las separa aumenta, por lo que en un gas, donde la mayor parte del tiempo las moléculas están muy separadas, sus atracciones mutuas influyen poco en el comportamiento del gas. Por otro lado, las moléculas de un líquido están tan próximas que una molécula determinada siempre es atraída o repelida por un cierto número de moléculas vecinas. Es la atracción la que mantiene unido al líquido y la que impide que se extienda. Sin embargo, las moléculas de un líquido, al igual que las de un gas, pueden moverse con libertad por todo el fluido, de aquí que un líquido no pueda mantener su forma frente a una fuerza externa. En otras palabras, un líquido no es rígido.

Una molécula en el interior de un líquido está rodeada completamente por otras moléculas que ejercen sobre ella fuerzas atractivas en todas las direcciones. La Fig. 9.1 muestra algunas de las fuerzas sobre una determinada molécula en un instante de tiempo. Como las moléculas de un líquido están en constante movimiento, las fuerzas

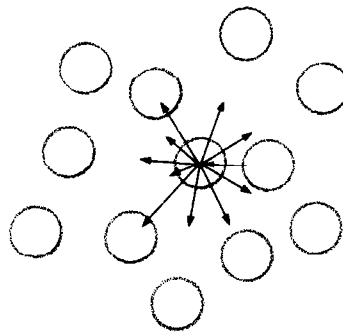


FIGURA 9.1
Fuerzas sobre una molécula en el interior de un líquido. La suma de estas fuerzas es nula.

sobre esta molécula particular cambian constantemente. Sin embargo, la suma de estas fuerzas es cero, por término medio, de modo que no existe fuerza neta sobre una molécula en el interior de un líquido.

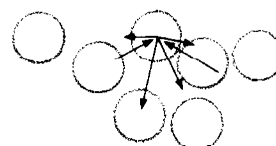


FIGURA 9.2
Fuerzas sobre una molécula situada en la superficie de un líquido. La suma de estas fuerzas es cero.

Una molécula en la superficie de un líquido sólo está rodeada parcialmente por otras moléculas (Fig. 9.2). Las moléculas circundantes no demasiado próximas a una molécula de la superficie ejercen sobre ésta una fuerza atractiva neta, $\mathbf{F}_a$ que tiende a llevarle hacia el interior. Las moléculas circundantes muy próximas a una molécula de la superficie ejercen una fuerza repulsiva neta, $\mathbf{F}_p$, que tiende a empujarla hacia el exterior. En el equilibrio, $\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_p$, y por tanto la fuerza neta $\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a$ sobre una molécula de la superficie es nula. Si la molécula intenta penetrar en el interior, se acerca aún más a las moléculas circundantes próximas, lo que hace que $\mathbf{F}_p$ sea mayor que $\mathbf{F}_a$. El resultado es una fuerza repulsiva neta sobre la molécula dirigida desde el interior hacia la superficie. Si la molécula intenta escapar del líquido, se aleja de las moléculas circundantes próximas, lo que hace $\mathbf{F}_p$ menor que $\mathbf{F}_a$. El resultado es una fuerza atractiva neta $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_p$ dirigida desde la superficie hacia el interior. Ésta es la fuerza que evita que la mayor parte de las moléculas escapen del líquido.

No obstante, algunas moléculas se evaporan del líquido, porque la fuerza **F** existe solamente a corta distancia de la superficie y, por lo tanto, una molécula puede escapar si posee energía suficiente para penetrar más allá del alcance de **F**. Para mayor simplicidad, supongamos que el módulo de **F** es constante en una región de anchura d y que es cero fuera de esta región (Fig. 9.3). Entonces la fuerza **F**

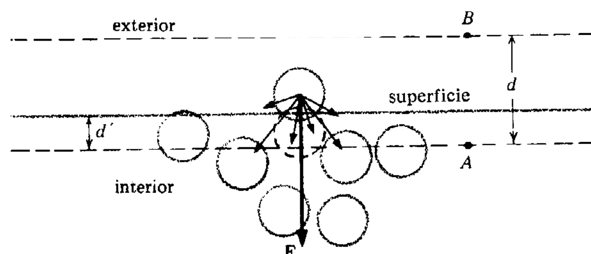


FIGURA 9.3
Fuerzas sobre una molécula que abandona la superficie de un líquido. La suma de estas fuerzas es **F**. La superficie realiza el trabajo $-Fd$ sobre una molécula que abandona completamente el líquido.

realiza el trabajo $-Fd$ sobre la molécula que escapa, y de este modo si la molécula tenía en el punto A, justo debajo de la superficie, la energía cinética K_A, su energía cinética K_B en el punto B, de acuerdo con el teorema del trabajo-energía (Ec. 5.3), viene dada por

$$K_B - K_A = -Fd$$

Como el valor mínimo de K_B es cero, K_A debe ser al menos igual a Fd. Una molécula cuya energía cinética en el punto A sea menor que Fd se detendrá antes de alcanzar B y se verá, por lo tanto, atraída de nuevo hacia la superficie.

Por consiguiente, el trabajo $w = Fd$ es la energía mínima necesaria para separar una molécula del líquido. La energía mínima H_v necesaria para separar todas las moléculas de 1 mol de líquido es $N_A w$, donde N_A es el número de Avogadro. Por supuesto que la separación

de todas las moléculas de un líquido transforma a éste en un gas. Así H_v, llamado el *calor molar de vaporización*, es la energía mínima necesaria para vaporizar 1 mol de sustancia. Los valores de H_v para varios líquidos aparecen en la tabla 9.1.

TABLA 9.1. **Calor molar de vaporización y tensión superficial de algunos líquidos.**
Los líquidos están por orden creciente de su calor molar de vaporización y como éste y la tensión superficial dependen de la temperatura, ésta figura en la primera columna.

Líquido	Temperatura, °C	Calor de vaporización, kJ/mol	Tensión superficial, N/m
Helio	−270	0,115	0,000239
Hidrógeno	255	1,05	0,00231
Oxígeno	−183	7,1	0,0132
Cloroetano	20	26	0,020†
Etanol	20	40,6	0,0227
Fluido tisular	37		0,050
Sangre	37		0,058
Plasma sanguíneo	37		0,073
Agua	100	40,6	0,0589
	50	42,86	0,0679
	20	44,16	0,0727
	0	45,00	0,0756
Mercurio	20	63,2	0,4355
Tungsteno	3410	753	2,5

† Estimado.

OBSERVACIÓN. La expresión *calor de vaporización* es un uso arcaico de la palabra calor que no corresponde a su significado moderno. Conviene no asociar la palabra calor en esta expresión con nuestro uso posterior de esta palabra.

La energía w es mucho mayor que la energía cinética media de una molécula de líquido, de modo que sólo se evaporan las moléculas muy energéticas. Cuando éstas abandonan el líquido, disminuye la energía media de las moléculas que permanecen en él. La temperatura absoluta T del líquido desciende entonces porque T es proporcional a la energía molecular media. Una vez que la temperatura del líquido desciende por debajo de la del medio ambiente, fluye calor desde el medio al líquido, suministrando así la energía necesaria para una ulterior evaporación.

El calor molar de vaporización es importante porque está relacionado con el módulo de **F** por medio de

$$H_v = N_A w = N_A F d$$

Las moléculas difieren grandemente en el módulo de la fuerza que cada una de ellas ejerce sobre las demás y, por lo tanto, en el módulo de **F**. Sin embargo, el alcance d de la fuerza molecular es aproximadamente el mismo para todas las moléculas (entre 10^{-8} y 10^{-7} cm). Por consiguiente, el calor molar de vaporización es más o menos proporcional al módulo de la fuerza molecular. Sustancias con valores muy pequeños de H_v (tales como el helio y el oxígeno) tienen débiles fuerzas moleculares y son gases a la temperatura normal. Solamente pueden licuarse a bajas temperaturas. Por otro lado, sustancias con valores muy grandes de H_v (tales como el tungsteno) son sólidos a

la temperatura normal y líquidos sólo a altas temperaturas. Sustancias con valores intermedios de H_v (tales como el etanol y el agua) son líquidos a la temperatura normal.

El calor de vaporización en kilojoules por gramo es quizá de uso más práctico porque da el potencial de enfriamiento de una masa especificada de líquido. Puede calcularse a partir del calor molar de vaporización, dado en la tabla 9.1, si se conoce la masa molecular. Por ejemplo, el calor de vaporización del agua es

$$\frac{45 \text{ kJ/mol}}{18 \text{ g/mol}} = 2{,}5 \text{ kJ/g}$$

Esto quiere decir que la evaporación de 1 g de agua extrae 2,5 kJ de energía interna del ambiente. Del mismo modo, como 1 mol de cloroetano (cloruro de etilo), H_2C_5Cl, contiene 64,5 g, su calor de vaporización es

$$\frac{26 \text{ kJ/mol}}{64{,}5 \text{ g/mol}} = 0{,}40 \text{ kJ/g}$$

La evaporación de 1 g de tricloroetano extrae 0,40 kJ de energía interna del ambiente.

Enfriamiento por evaporación

El agua tiene el mayor calor de vaporización por gramo de todos los líquidos más corrientes, lo que la convierte en un fluido refrigerante ideal. Muchos sistemas biológicos emplean para su refrigeración la evaporación del agua. Por ejemplo, es de todos conocido que las aves y los mamíferos mantienen una temperatura comporal constante evaporando agua y eliminando así la energía interna sobrante. El agua se evapora de la superficie de la piel (como en los hombres y los caballos) o de los pulmones (como en los pájaros y los perros). Es menos conocido que la abeja también emplea la evaporación para mantener una temperatura constante en las celdillas de cría de la colmena, aun cuando la temperatura del cuerpo de la abeja no se mantiene constante. Si la temperatura en una colmena se eleva por encima de 35,5 °C, las abejas encargadas de suministrar el alimento dejan de llevar néctar a la colmena y comienzan a acarrear agua. El agua es depositada en las celdas de las crías, donde es abanicada por otras abejas con el fin de aumentar la velocidad de evaporación. También las plantas se mantienen frescas por evaporación. La temperatura de un árbol en un día caluroso de verano es generalmente inferior en varios grados a la del suelo, debido a la evaporación del agua de sus hojas.

La velocidad a la que el agua se evapora depende de la humedad relativa del aire (Apart. 8.5). Si la humedad es alta, las moléculas de vapor de H_2O se condensan sobre la superficie del agua líquida casi tan rápidamente como las moléculas de H_2O se evaporan de la superficie. La evaporación neta es por lo tanto muy pequeña y también lo es la capacidad de enfriamiento del agua. Ésta es la razón de por qué los días húmedos son tan desagradables. De hecho, la temperatura del agua que se evapora no puede descender por debajo del punto de

rocío, que es la temperatura a la cual la velocidad de evaporación se hace igual a la de condensación (Apart. 8.5).

Un líquido que, como el cloroetano, tiene un calor de vaporización pequeño se dice que es *volátil*. Se necesita menos energía para evaporar una molécula de cloroetano que para una molécula de agua: por lo tanto, a una temperatura dada, son capaces de evaporarse más moléculas de cloroetano. De este modo, un líquido volátil se evapora más rápidamente que el agua, y aun cuando la energía interna disipada por gramo evaporado es pequeña, es grande la velocidad de eliminación de la energía. El cloroetano se emplea para anestesiar por enfriamiento pequeñas áreas de la piel. El tiempo es importante porque la energía debe eliminarse del área tratada en menos tiempo que el que tarda en llegar a ella la procedente de los tejidos colindantes.

9.2. TENSION SUPERFICIAL

La superficie de un líquido tiene propiedades especiales debido a la fuerza molecular **F** que actúa sobre ella. El área total de la superficie de un líquido, a diferencia de su volumen, puede modificarse variando la forma del líquido. Mas para aumentar el área de la superficie, las moléculas del interior del líquido deben desplazarse hacia la superficie. En la Fig. 9.3 se observa que la superficie realiza el trabajo $-Fd'$ sobre una molécula que pasa desde el interior a la superficie, lo cual significa que para llevar una molécula a la superficie se necesita el trabajo $w' = Fd'$. Por lo tanto, se ha de realizar trabajo para aumentar el área de la superficie de un líquido.

La Fig. 9.4 muestra un sencillo dispositivo para la medida de este trabajo. De una armadura de alambre de anchura b y longitud variable l se suspende una delgada película de líquido. El área total de la superficie de la película es $A = 2bl$ porque la película presenta una superficie anterior y otra posterior, cada una de ellas de área bl. Entonces si se aumenta la longitud de la película desde l_1 hasta l_2 deslizando la varilla una distancia $x = l_2 - l_1$, el área total de la superficie de la película aumenta desde $A_1 = 2bl_1$ hasta $A_2 = 2bl_2$. La película se opone a que el área de su superficie sea aumentada, de aquí que haya de aplicarse a la varilla que desliza una fuerza $\mathbf{F}_a$. El trabajo efectuado para aumentar el área de la superficie $W = F_a x$ se obtiene midiendo F_a y x.

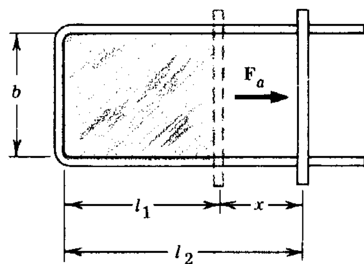


FIGURA 9.4
Una película de líquido suspendida de una armadura de alambre.

Este trabajo es igual a la energía nw' necesaria para desplazar n moléculas adicionales desde el interior de la película a la superficie. El número n es proporcional al incremento del área de la superficie, $A_2 - A_1$, de modo que podemos escribir

$$n = a(A_2 - A_1) = a(2bl_2 - 2bl_1)$$
$$= 2ab(l_2 - l_1) = 2abx$$

donde a es una constante de proporcionalidad (el número de moléculas en la superficie por unidad de área). Así, por un lado, el trabajo necesario para llevar n moléculas a la superficie es

$$W = nw' = 2abxw'$$

mientras que por otro, en mover la varilla se efectúa el trabajo $W = F_a x$, luego tenemos

$$F_a x = 2abxw'$$

Eliminamos la x en ambos miembros y dividimos por b para obtener

$$\frac{F_a}{b} = 2aw'$$

La *magnitud aw'* recibe el nombre de *tensión superficial*† γ del líquido, por lo cual

$$\frac{F_a}{b} = 2\gamma \qquad 9.1$$

Hay varias cosas que señalar en torno a esta ecuación.

1. La tensión superficial es una propiedad intrínseca del líquido. Depende de las propiedades moleculares de éste, pero no de la geometría particular de la Fig. 9.4. Puede determinarse en principio midiendo la fuerza $\mathbf{F}_a$ necesaria para estirar la película.
2. La reacción a $\mathbf{F}_a$ es la fuerza $\mathbf{R}_a = -\mathbf{F}_a$ que ejerce el líquido sobre la varilla que se desliza. La ecuación 9.1 muestra que la película ejerce sobre la varilla una fuerza constante por unidad de longitud:

$$\frac{R_a}{b} = \frac{F_a}{b} = 2\gamma \qquad 9.2$$

3. En las Ecs. 9.1 y 9.2 aparece un factor 2 porque la película tiene dos superficies. Un líquido en un plato tiene sólo una superficie libre, y por lo tanto, la fuerza que ejerce por unidad de longitud es

$$\frac{R_a}{b} = \gamma \qquad 9.3$$

Definición. La *tensión superficial* de un líquido es la fuerza por unidad de longitud que ejerce la superficie de un líquido sobre una línea cualquiera situada en ella. Esta fuerza pertenece a la superficie y es perpendicular a la línea. Por lo tanto, la tensión superficial es análoga a la presión, que es la fuerza por unidad de área que ejerce un fluido sobre una superficie. Lo mismo que la tensión superficial ejerce una fuerza perpendicular a la línea, la presión ejerce una fuerza perpendicular a la superficie. Sin embargo, la presión de un fluido ejerce una fuerza hacia afuera,‡ en tanto que la tensión superficial la ejerce hacia adentro. Es decir, la presión tiende a dilatar un volumen, mientras que la tensión superficial tiende a encoger una superficie. La tensión superficial trata de hacer el área de la superficie de un líquido lo más pequeña posible. Por ejemplo, una gota de líquido en caída libre adopta la forma de una esfera porque ésta posee el área más pequeña para un volumen dado.

†γ es la letra griega gamma.

‡ En el apartado 9.5 se discute una importante excepción a esto.

La tensión superficial de un líquido depende de su temperatura, aunque fuera de esto es una constante característica del líquido. En el sistema SI, la unidad de tensión superficial es el newton por metro. La tabla 9.1 da la tensión superficial de varios líquidos a la temperatura que allí se indica. La tensión superficial del agua se da a varias temperaturas para mostrar que depende de ella.

OBSERVACIÓN. La energía w' necesaria para desplazar una molécula desde el interior a la superficie de un líquido es más o menos proporcional a la energía w que se necesita para sacar una molécula del líquido. Por lo tanto, la tensión superficial $\gamma = aw'$ deberá aumentar regularmente con el calor de vaporización $H_v = Nw$. La tabla 9.1 demuestra que esto es lo que sucede. No obstante, sólo se trata de una tendencia, por lo que son de esperar algunas excepciones.

Andando sobre el agua

La tensión superficial del agua es mayor que la de cualquier líquido ordinario (excepto el mercurio), hecho éste de gran importancia debido a la omnipresencia del agua en los sistemas biológicos. El resultado más familiar es la capacidad que presenta el agua para sostener pequeños objetos sobre su superficie. Por ejemplo, si se coloca cuidadosamente una hoja de afeitar sobre la superficie tranquila del agua, no se hundirá, pero si se agita la superficie acabará hundiéndose. De igual manera, ciertos insectos son capaces de andar sobre el agua, y muchos pequeños animales acuáticos, por ejemplo, las planarias y las larvas de mosquito, cuelgan de la superficie.

Para entender el papel que juega la tensión superficial en este fenómeno, recordemos en primer lugar cómo sostiene un objeto la tensión en una cuerda horizontal. La Fig. 9.5 muestra a un equilibrista sostenido por una cuerda con tensión T. Esto quiere decir que en cada punto, un lado de la cuerda tira del otro con una fuerza de módulo T y dirección paralela a la cuerda. Como la cuerda está combada donde el acróbata permanece de pie, las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, que cada lado de la cuerda ejerce sobre él, están en direcciones distintas. Sus componentes horizontales, que están en direcciones opuestas, se anulan entre sí, mientras que sus componentes verticales, que están en la misma dirección, se suman. Dado que la componente vertical de cada fuerza tiene por módulo $T\cos\theta$, la cuerda ejerce sobre el acróbata una fuerza hacia arriba de módulo $2T\cos\theta$.

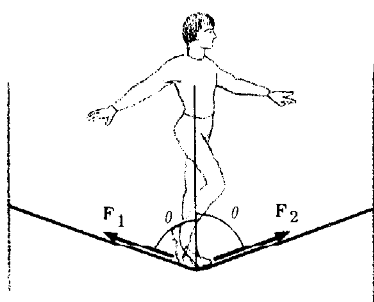


FIGURA 9.5
Un equilibrista de pie sobre una cuerda tirante.

La superficie de un líquido se comporta de manera análoga. La figura 9.6 muestra la pequeña depresión circular hecha en la superficie del agua por la pata de un insecto. La tensión superficial del agua ejerce fuerzas alrededor de todo el borde de esta depresión. Estas fuerzas, que están en la superficie y son perpendiculares al borde, tienen un módulo γ por unidad de longitud. La Fig. 9.6 representa dos de estas fuerzas situadas en lados opuestos del borde. Como cada fuerza actúa sobre una pequeña sección de longitud s, cada una tiene por módulo γs. Sus componentes horizontales están en direcciones contrarias, y se anulan por consiguiente, pero sus componentes verticales se suman porque están en la misma dirección. Así, el módulo de la fuerza vertical por unidad de longitud a lo largo de todo el bor-

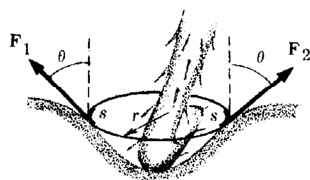


FIGURA 9.6
Pata de un insecto sostenida por la tensión superficial del agua.

de es $\gamma \cos \theta$; por lo tanto, la fuerza vertical total es $2\pi r\gamma \cos \theta$. Ésta es la fuerza que sostiene la pata.

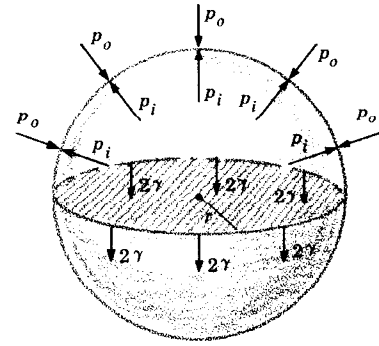


FIGURA 9.7
Fuerzas sobre un hemisferio de una burbuja producidas por la presión del aire dentro y fuera de la burbuja y por la tensión superficial ejercida por el otro hemisferio.

Burbujas

Una burbuja es una superficie esférica de líquido. La tensión superficial en esta superficie tiende a encoger la burbuja, pero a ello se opone la presión p_i que reina en su interior, la cual es mayor que la presión p_o del exterior de la burbuja. Esta diferencia de presión da lugar a una fuerza hacia afuera sobre la burbuja que iguala a la fuerza hacia adentro de la tensión superficial.

Para ser precisos, consideremos una burbuja de jabón de radio r. Imaginemos que la burbuja está dividida en dos hemisferios unidos por una circunferencia de longitud $2\pi r$ (Fig. 9.7), y consideremos las fuerzas sobre el hemisferio superior. Como la burbuja tiene una superficie interior y una superficie exterior, la tensión superficial ejerce sobre la circunferencia una fuerza 2γ por unidad de longitud. Así el hemisferio inferior ejerce sobre el superior una fuerza

$$F_t = 2\gamma 2\pi r = 4\pi\gamma r$$

en dirección tal que tiende a encoger la burbuja.

La presión del interior de la burbuja ejerce sobre la superficie una fuerza hacia afuera p_i por unidad de área. Puede demostrarse (ver Prob. 24 del Cap. 7) que la fuerza total sobre el hemisferio superior debida a la presión p_i tiene como módulo

$$F_i = Ap_i = \pi r^2 p_i$$

y tiende a dilatar la burbuja. ($A = \pi r^2$ es el área del círculo que separa los dos hemisferios.) Asimismo, la presión del exterior de la burbuja ejerce sobre la superficie una fuerza hacia adentro p_o por unidad de área. La fuerza sobre el hemisferio debida a p_o tiene por módulo

$$F_o = \pi r^2 p_o$$

y tiende a encoger la burbuja. Por lo tanto, el módulo de la fuerza neta sobre el hemisferio superior debida a la presión es

$$F_p = F_i - F_o = (p_i - p_o)\pi r^2$$

y tiende a dilatar la burbuja. En el equilibrio, esta fuerza iguala a la fuerza F_t de la tensión superficial, de modo que

$$4\pi\gamma r = (p_i - p_o)\pi r^2$$

$$p_i - p_o = \frac{4\gamma}{r} \quad \text{burbuja con dos superficies} \qquad 9.4$$

Para una «burbuja» con una superficie solamente, como una gota de líquido o una burbuja de gas en un líquido, la fórmula correspondiente es

$$p_i - p_o = \frac{2\gamma}{r} \quad \text{burbuja con una superficie} \qquad 9.5$$

Hay dos puntos importantes a señalar en torno a estas fórmulas:

1. La diferencia de presión es proporcional a la tensión superficial, de tal manera que se necesita mayor presión para formar una burbuja en un líquido de tensión superficial grande que en un líquido de tensión superficial pequeña.
2. La diferencia de presión es inversamente proporcional al radio de la burbuja. Esto quiere decir que la diferencia de presión es mayor en una burbuja pequeña que en una grande.

Un líquido hierve a la temperatura a la que su presión de vapor se hace igual a la presión atmosférica porque a esta temperatura se pueden formar burbujas de vapor. De hecho, la presión de vapor debe ser un poco mayor que la presión atmosférica para impedir que la tensión superficial aplaste la burbuja.

Ejemplo. ¿Cuánto vale la presión en el interior de una burbuja de vapor de 10^{-3} m formada en agua hirviendo?
De acuerdo con la tabla 9.1, la tensión superficial del agua a 100 °C es de 0,059 N/m y, por lo tanto, según la Ec. 9.5, la presión en el interior de la burbuja es

$$p_i = p_o + \frac{2\gamma}{r} = p_o + \frac{2 \times 0{,}059\ \text{N/m}}{10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= p_o + 0{,}118 \times 10^3\ \text{N/m}^2$$
$$= p_o + 0.00117\ \text{atm}$$

Las burbujas mayores tienen una presión interior aún más pequeña, de modo que la presión de vapor en el interior de las grandes burbujas formadas cuando un líquido hierve enérgicamente es sólo muy poco mayor que la presión atmosférica. Por otro lado, como las primeras burbujas que se forman en un líquido cuando se alcanza el punto de ebullición son muy pequeñas, la presión dentro de ellas es muy grande. Por ejemplo, la presión en el interior de una burbuja de radio 10^{-5} m es $p_o + 0{,}117$ atm. Normalmente, estas primeras burbujas se forman sobre las partículas de polvo que hay en el líquido, lo cual les permite comenzar con un radio bastante grande que sólo necesita una pequeña presión suplementaria. Sin embargo, es posible calentar agua muy limpia (llamada agua desnucleada) por encima de 100 °C sin que hierva. Esta agua se dice que está *sobrecalentada.* Su presión de vapor es suficientemente grande como para formar burbujas de tamaño moderado, pero no lo bastante grande como para dar lugar a una burbuja pequeña. El agua sobrecalentada es inestable. Es decir, si se agita ligeramente para formar unas pocas burbujas, todo el líquido empezará a hervir de repente y de manera enérgica.

Tensoactivos

Cuando se disuelve en agua una pequeña cantidad de detergente, se forma una capa de moléculas de detergente a lo largo de la superficie del líquido. Estas moléculas no están tan fuertemente atraídas por las moléculas de agua del interior como lo están otras moléculas de agua, y de este modo, la tensión superficial del líquido se reduce.

Definición. Cualquier sustancia que reduce de este modo la tensión superficial de un líquido recibe el nombre de *agente tensoactivo.* A efectos de lavado es de desear una tensión superficial reducida porque el líquido se deshace más fácilmente en gotas pequeñitas y se dispersa más rápidamente dentro de las fibras del material que se está lavando. Asimismo, con un agente tensoactivo, la superficie del agua es atraída más fuertemente a la superficie que está siendo lavada que al agua misma. Por consiguiente, lo que hace el agua sobre una superficie sólida es extenderse más que formar burbujas sobre ella. Por esta razón se dice que un tensoactivo hace que el agua moje más.

Tensión superficial en los pulmones

El cuerpo emplea un tensoactivo para reducir la tensión superficial en el revestimiento mucoso de los alvéolos pulmonares, esas diminutas cavidades (de unos 10^{-2} cm de radio) en las que terminan los tubos bronquiales de los pulmones (Fig. 9.8). Durante una inspiración normal la presión en los alvéolos es aproximadamente de 3 mm Hg por debajo de la presión atmosférica (una presión manométrica $\bar{p}_i$ de —3 mm Hg), la cual permite que el aire llegue a ellos a través de los tubos bronquiales. En estas cavidades, que están bañadas por capilares que contienen sangre arterial pulmonar, se produce el intercambio del oxígeno del aire con el anhídrido carbónico de la sangre. Durante una inspiración el radio de los alvéolos se extiende desde unos $0{,}5 \times 10^{-4}$ m hasta $1{,}0 \times 10^{-4}$ m. Los alvéolos están recubiertos de un fluido de tejido mucoso que normalmente tiene una tensión superficial de 0,050 N/m. Con esta tensión superficial, la diferencia de presión necesaria para hinchar un alvéolo sería

$$p_i - p_o = \bar{p}_i - \bar{p}_o = \frac{2\gamma}{r}$$
$$= \frac{2 \times 0{,}050 \text{ N/m}}{0{,}5 \times 10^{-4} \text{ m}}$$
$$= 2 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 15 \text{ mm Hg}$$

Esto significa que la presión manométrica $\bar{p}_o$ fuera del alvéolo tendría que ser 15 mm Hg menor que la presión $\bar{p}_i$ = —3 mm Hg dentro de él. Por lo tanto $\bar{p}_o$ sería —18 mm Hg.

La presión exterior en este caso es la presión que reina en el espacio entre los pulmones y la cavidad pleural (Fig. 9.8). En realidad la presión manométrica en este espacio es negativa. (Esta presión negativa es la que mantiene a los pulmones junto a las paredes de la cavidad pleural.) Sin embargo, esta presión es de unos —4 mm Hg solamente, de manera que la diferencia de presión real $\bar{p}_i - \bar{p}_o$ es sólo

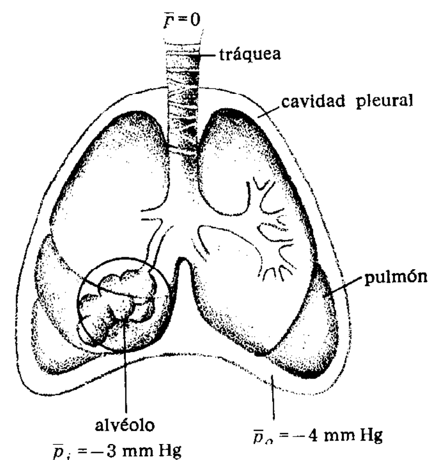


FIGURA 9.8
Los alvéolos son cavidades microscópicas en la terminación de los tubos bronquiales del pulmón.

de 1 mm Hg, o sea, 15 veces menor que la que se necesita para dilatar un alvéolo con una tensión superficial de 0,050 N/m.
Para salvar esta dificultad, las paredes de los alvéolos segregan un tensoactivo que reduce la tensión superficial en un factor 15. En cada alvéolo se presenta una cantidad fija de este tensoactivo, y su capacidad para reducir la tensión superficial depende de su concentración. Por lo tanto, cuando un alvéolo está desinflado, la concentración de tensoactivo (por unidad de área) es elevada y la tensión superficial es muy baja, de modo que el alvéolo se dilata sin dificultad. Sin embargo, cuando se dilata, la concentración de tensoactivo disminuye y aumenta la tensión superficial hasta que se alcanza un punto de equilibrio en el máximo de dilatación. Al espirar, el incremento de tensión superficial ayuda a desinflar el alvéolo y a expeler el aire.
Los alvéolos de un bebé al nacer están tan aplastados que se necesita una diferencia de presión de unos 30 mm Hg para inflarlos la primera vez. Por lo tanto, el primer aliento de vida exige un esfuerzo extraordinario para vencer la tensión superficial en los alvéolos.

9.3. ACCIÓN CAPILAR

Cuando una gota de líquido se coloca sobre una superficie sólida, el líquido puede extenderse o quedar concentrado según los valores relativos de la fuerza *adhesiva* y de la *cohesiva*. La fuerza cohesiva es la resultante de las fuerzas que las moléculas del líquido se ejercen entre sí; es la fuerza que mantiene unido al líquido. La fuerza adhesiva es la resultante de las fuerzas que ejercen la superficie o un objeto exterior cualquiera sobre las moléculas de un líquido. Una gota de agua colocada sobre un vidrio limpio se extienden sobre éste porque la atracción del agua al vidrio (la fuerza adhesiva) es mayor que la atracción del agua a sí misma (la fuerza cohesiva). En el equilibrio, la superficie del agua es perpendicular a la fuerza total que se ejerce sobre él. Esto aparece ilustrado en la Fig. 9.9 que muestra la fuerza adhesiva $\mathbf{F}_a$ sobre una molécula situada en el punto *P*. La superficie es perpendicular a la fuerza total $\mathbf{S} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_a$ ejercida sobre la molécula. Como la fuerza cohesiva del mercurio es mucho mayor que la fuerza adhesiva del vidrio, una gota de mercurio colocada sobre un vidrio adquiere la forma redondeada que se muestra en la Fig. 9.10 Del mismo modo, la superficie de una columna de líquido en un tubo de vidrio viene determinada por la suma **S** de las fuerzas adhesiva y cohesiva. La Fig. 9.11 muestra la fuerza **S** sobre una molécula de agua situada en la superficie de dicha columna. Dado que la fuerza adhesiva $\mathbf{F}_a$ es mayor que la fuerza cohesiva $\mathbf{F}_c$, la fuerza **S** está dirigida hacia afuera del líquido. La superficie del líquido adopta una forma curvada, o *menisco*, que es cóncavo para poder ser perpendicular a **S**. El ángulo de contacto θ entre la superficie del agua y el tubo de vidrio viene determinado por los valores relativos de $\mathbf{F}_a$ y $\mathbf{F}_c$. La Fig. 9.12 muestra que el menisco del mercurio es convexo porque la fuerza cohesiva es mayor que la adhesiva. El ángulo de contacto en este caso es mayor que 90°.
Una columna de líquido puede quedar sostenida en un delgado tubo de vidrio (capilar) gracias a las fuerzas adhesiva y cohesiva que actúan sobre él. Este fenómeno recibe el nombre de *acción capilar*. El capilar debe haber sido sumergido previamente en el líquido para

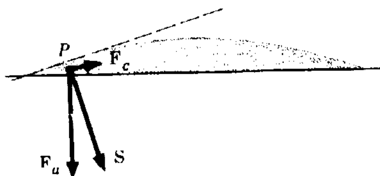


FIGURA 9.9
Fuerzas adhesiva y cohesiva sobre una molécula localizada en el borde de una gota de agua puesta sobre un vidrio.

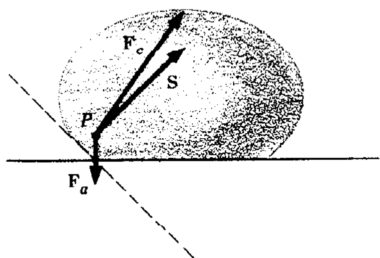


FIGURA 9.10
Fuerzas adhesivas y cohesivas sobre una molécula localizada en el borde de una gota de mercurio colocada en un vidrio.

que haya una delgada capa de líquido adherida a la pared interior del tubo por encima de la columna de líquido. Esta capa ejerce una tensión superficial en torno a la circunferencia de la columna líquida. La Fig. 9.13 muestra las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan sobre dos porciones de longitud s situadas a uno y a otro lado del capilar. Cada fuerza tiene un módulo γs y está dirigida formando un ángulo de contacto θ con el capilar. Las componentes horizontales, que están en direcciones opuestas, se anulan entre sí, pero las componentes verticales se suman porque están en la misma dirección. El módulo de la fuerza vertical por unidad de longitud alrededor de la circunferencia es $\gamma\cos\theta$, por lo que la fuerza vertical total es $2\pi r\gamma\cos\theta$, donde r es el radio del capilar. (Este análisis es análogo al de la fuerza ejercida sobre la pata de un insecto del Apart. 9.2.)

En el equilibrio, la fuerza hacia arriba $2\pi r\gamma\cos\theta$ debida a la tensión superficial es igual a la fuerza hacia abajo mg debida a la gravedad:

$$2\pi r\gamma\cos\theta = mg \qquad 9.6$$

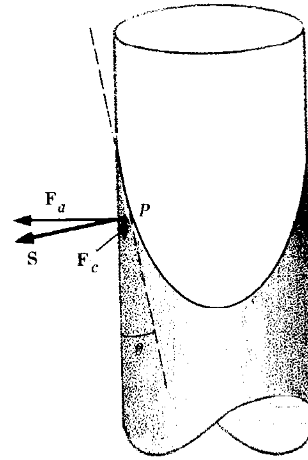


FIGURA 9.11
El menisco de un líquido en un capilar es cóncavo cuando la fuerza adhesiva es mayor que la fuerza cohesiva.

La masa m de la columna es igual a ρV, donde ρ es la densidad del líquido y V es el volumen de la columna. El volumen de una columna de radio r y altura h es

$$V = \pi r^2 h$$

de modo que

$$m = \rho V = \rho\pi r^2 h$$

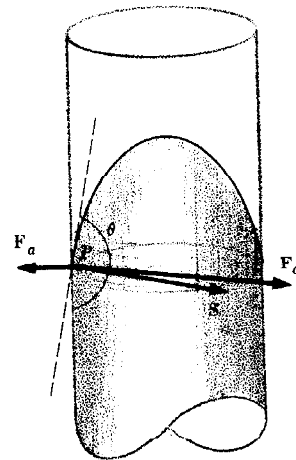


FIGURA 9.12
El menisco de un líquido en un capilar es convexo cuando la fuerza adhesiva es menor que la fuerza cohesiva.

Sustituyendo por esta expresión de m en la Ec. 9.6, obtenemos

$$2\pi r\gamma\cos\theta = \rho\pi r^2 hg$$

o sea

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} \qquad 9.7$$

Esta ecuación da la altura h de una columna de líquido sostenida por acción capilar. Es evidente que h es directamente proporcional a la tensión superficial del líquido e inversamente proporcional al radio del capilar.

OBSERVACIÓN. La tensión superficial es originada por las fuerzas cohesivas del líquido (Apart. 9.2). De la Ec. 9.7 podría desprenderse que la adherencia no juega ningún papel en la acción capilar. Sin embargo, esto no es correcto. La forma cóncava del menisco es la que da lugar a la tensión superficial que ejerce sobre la columna una fuerza hacia arriba, y la forma del menisco depende, como hemos visto, de la suma de las fuerzas adhesiva y cohesiva.

Si la fuerza de adherencia es mucho mayor que la fuerza de cohesión, el ángulo de contacto θ es muy pequeño. En este caso $\cos\theta$ es aproximadamente 1, y la Ec. 9.7 puede reemplazarse por

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} \qquad 9.8$$

Esta ecuación es válida para el agua en un capilar de vidrio, donde θ es 20° o menos, pero en el caso de agua en un capilar de plástico, en el que θ puede ser 45° o más, debe emplearse la Ec. 9.7.

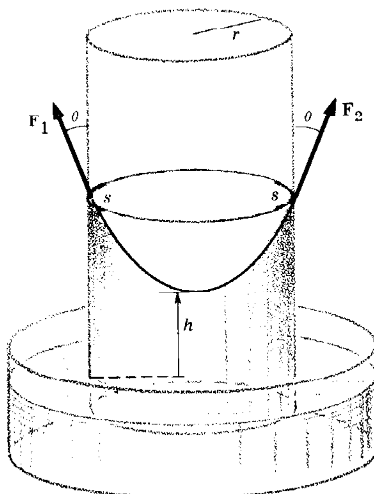


FIGURA 9.13
Tensión superficial que sostiene una columna de agua en un capilar.

Ejemplo 1. ¿A qué altura se eleva el agua en un capilar de vidrio de radio $r = 0{,}05$ cm sumergido en agua?
Si el capilar está seco, el agua no ascenderá por el capilar más arriba que el agua que le rodea. Sin embargo, si el interior del capilar está mojado, el agua ascenderá hasta la altura h que viene dada por la Ec. 9.8:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{2 \times 0{,}073 \text{ N/m}}{(10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)(5 \times 10^{-4} \text{ m})}$$
$$= 2{,}98 \times 10^{-2} \text{ m} = 2{,}98 \text{ cm}$$

Cuando la fuerza de cohesión es mayor que la de adherencia, como en el caso del mercurio en un tubo de vidrio, el menisco es convexo (Fig. 9.12*b*). La tensión superficial ejerce entonces una fuerza hacia el interior del líquido y éste queda a una distancia h por debajo del agua que le rodea (Fig. 9.14). Cuando el ángulo de contacto es próximo a 180°, cos θ es aproximadamente —1 y la Ec. 9.7 se convierte en

$$h = -\frac{2\gamma}{\rho g r}$$

Ejemplo 2. Si el capilar de vidrio del ejemplo 1 se sumerge en mercurio, ¿qué distancia se hunde el mercurio?
El mercurio que hay en el tubo quedará a una distancia

$$h = \frac{-2 \times 0{,}435 \text{ N/m}}{(13{,}6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)(5 \times 10^{-4} \text{ m})}$$
$$= -1{,}30 \text{ cm}$$

por debajo de la superficie del líquido que rodea al tubo.

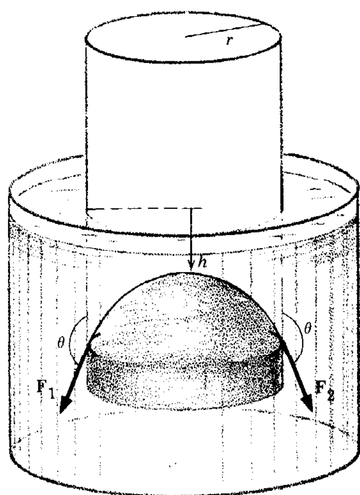


FIGURA 9.14
Tensión superficial deprimiendo una columna de mercurio en un capilar.

9.4. ÓSMOSIS

Cuando una sustancia se disuelve en un líquido (por ejemplo, azúcar en agua), las moléculas de la sustancia (el *soluto*) se dispersan uniformemente por todo el líquido (el *disolvente*). La mezcla resultante se llama *disolución*.

Definición. El número de moles n de soluto por unidad de volumen del disolvente es *la concentración molar c* de una disolución. Así, si se disuelven n moles de soluto en un volumen V de disolvente, la concentración de la disolución es

$$c = \frac{n}{V} \qquad 9.9$$

Ejemplo 1. ¿Cuál es la concentración de una disolución que consiste en 2 gramos de sacarosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$, disueltos en 100 cm³ de agua?
La masa molecular de la sacarosa es 342 u, luego 2 g son

$$n = \tfrac{2}{342} = 5{,}85 \times 10^{-3} \text{ moles}$$

La concentración de la disolución es

$$c = \frac{n}{V} = \frac{5{,}85 \times 10^{-3}}{100\ \text{cm}^3}$$

$$= 5{,}85 \times 10^{-5}\ \text{mol/cm}^3 = 5{,}85 \times 10^{-2}\ \text{mol/l} \qquad 9.9$$

Las moléculas del soluto se mueven al azar en el disolvente, de modo parecido a las moléculas de un gas. Gracias a este movimiento, el soluto se distribuye uniformemente por todo el disolvente, lo mismo que un gas llena el volumen disponible. Además, si se aumenta el volumen de disolvente, las moléculas del soluto se «esparcirán» en el nuevo volumen, lo mismo que un gas se expande hasta llenar cualquier incremento de su volumen.

Esto aparece ilustrado en la Fig. 9.15, que representa una disolución de azúcar en agua separada de una cantidad igual de agua pura por medio de un tabique. Las moléculas de azúcar del compartimiento de la izquierda están chocando constantemente con el tabique, de modo que tan pronto como éste se suprime (Fig. 9.15*b*), las moléculas de azúcar empiezan a difundirse en el compartimiento de la derecha. Cuando aumenta la concentración en este segundo compartimiento, algunas moléculas de azúcar comenzarán a difundirse hacia atrás en el compartimiento de la izquierda (Fig. 9.15*c*). Sin embargo, el número de moléculas que fluye de derecha a izquierda será menor que el de moléculas que fluye en dirección contraria, mientras la concentración de la derecha sea menor que la concentración de la izquierda. Existe, por lo tanto, un flujo neto de moléculas de izquierda a derecha hasta que la concentración es uniforme en todo el disolvente (Fig. 9.15*d*). Ésta es la condición de equilibrio. Cuando se ha alcanzado el equilibrio, fluyen tantas moléculas de derecha a izquierda como de izquierda a derecha y no existe, por consiguiente, flujo neto de moléculas en la disolución.

Supongamos ahora que la disolución de azúcar está separada del agua pura por medio de un celofán o una membrana animal (Fig. 9.16). Estas membranas tienen la propiedad de permitir que las moléculas de agua se difundan lentamente a través de ellas pero impiden el paso de moléculas mayores, tales como las de azúcar. Las membranas permeables a ciertas moléculas e impermeables a otras reciben el nombre de *membranas semipermeables*. La pared de una célula viva es semipermeable al permitir que ciertas sustancias se difundan a través de ella en uno y otro sentido e impedir el paso de otras. La naturaleza semipermeable de la pared celular es esencial para mantener en la célula las concentraciones químicas apropiadas.

Las moléculas de agua, representadas por puntos en la Fig. 9.16, son capaces de difundirse a través de la membrana semipermeable tanto en un sentido como en el otro, cosa que no pueden hacer las moléculas de azúcar, representadas por pequeños círculos. Sin embargo, el número de moléculas de agua de la disolución de azúcar que chocan por la izquierda con la membrana es menor que el número de moléculas de agua del compartimiento de agua pura que choca por la derecha con la membrana. Esto es debido a que las moléculas de azúcar ocupan ciertos espacios a lo largo de la membrana e impiden de este modo que algunas moléculas de agua lleguen a la membrana. Como consecuencia, se difunden más moléculas desde el agua pura a

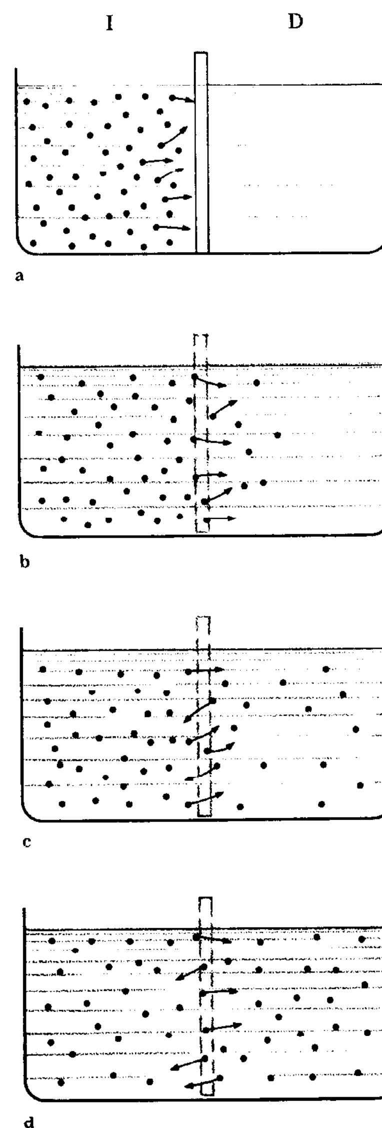


FIGURA 9.15
(*a*) Una disolución de azúcar separada del agua pura por medio de un tabique. (*b*) Cuando se suprime el tabique, algunas moléculas de agua se difunden en el compartimiento de la derecha. (*c*) Cuando la concentración de azúcar aumenta en el compartimiento de la derecha, algunas moléculas de azúcar vuelven a pasar al compartimiento de la izquierda. (*d*) En el equilibrio, la concentración es la misma en ambos compartimientos.

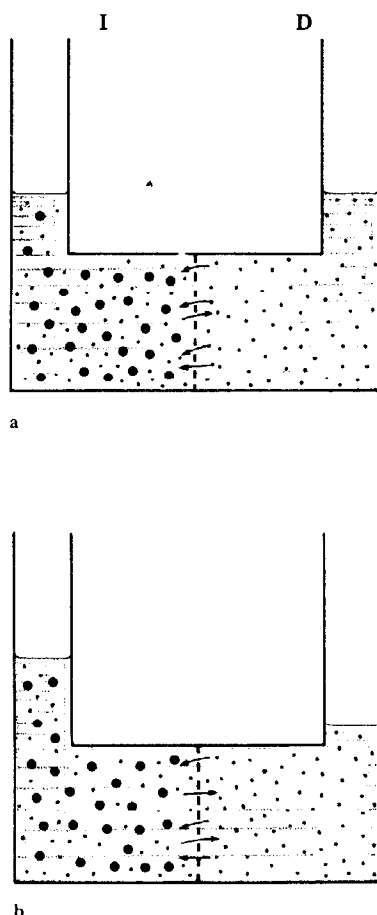


FIGURA 9.16
(*a*) Una disolución concentrada de azúcar separada de una disolución diluida de azúcar por medio de una membrana semipermeable.
(*b*) El agua se difunde en la disolución de azúcar.

la disolución de azúcar que en sentido contrario. Por lo tanto, existe un flujo neto de agua en la disolución de azúcar que da lugar a que el nivel del líquido suba en el compartimiento de la izquierda y baje en el de la derecha (Fig. 9.16*b*). La difusión del agua a través de una membrana semipermeable desde una región de baja concentración hasta otra de alta concentración se llama *ósmosis*.

OBSERVACIÓN. La difusión del agua a través de una membrana semipermeable (ósmosis) parece muy diferente de la difusión libre de las moléculas del soluto representada en la Fig. 9.15. No obstante, los dos procesos operan sobre el mismo principio general. En ambos casos, la difusión neta aparece en la dirección que tiende a igualar la concentración en los dos compartimientos. En la difusión libre, las moléculas de azúcar se difunden en el agua pura, haciendo aumentar la concentración de azúcar en el compartimiento de la derecha y disminuyendo dicha concentración en el de la izquierda. En la ósmosis, las moléculas de azúcar no pueden difundirse y son las moléculas de agua las que pasan a la disolución de azúcar, rebajando la concentración de ésta en el compartimiento de la izquierda. La difusión libre alcanza rápidamente el equilibrio porque las concentraciones en los dos compartimientos pronto se hacen iguales. También puede alcanzarse el equilibrio en la ósmosis si existe inicialmente una pequeña concentración de azúcar en el compartimiento de la derecha (Fig. 9.17). Cuando el agua fluye de derecha a izquierda, la disolución del compartimiento de la izquierda se hace menos concentrada al mismo tiempo que la disolución de la derecha se hace más concentrada. En el equilibrio, cuando las concentraciones son iguales en los compartimientos, cesa la ósmosis. Sin embargo, si inicialmente hay agua pura en el compartimiento de la derecha, las concentraciones en los dos compartimientos no puede nunca igualarse, y así toda el agua se difunde eventualmente desde el compartimiento de la derecha al de la izquierda.

Presión osmótica

En el compartimiento de la izquierda de la Fig. 9.18 se ha adaptado un émbolo. Aplicando una fuerza a este émbolo, se puede variar la presión p de la disolución de azúcar. Resulta que al aumentar p disminuye la velocidad de flujo del agua en la disolución de azúcar. A una cierta presión p_{os} cesa el flujo por completo, y cuando se incrementa la presión más allá de p_{os}, aparece la ósmosis inversa: el agua es obligada a abandonar la disolución de azúcar y a difundirse en el compartimiento de la derecha. La presión p_{os} a la que no tiene lugar la ósmosis recibe el nombre de *presión osmótica* de la disolución. Es una medida de la tendencia del agua a difundirse en la disolución de azúcar.

Las moléculas de azúcar de la Fig. 9.18 están atrapadas entre el émbolo y la membrana, en tanto que las moléculas de agua se desplazan libremente a través de la membrana. Las moléculas de azúcar se comportan como un gas encerrado, y la presión osmótica se puede considerar como la presión p_s de este «gas» disuelto. Si la disolución es diluida, la presión del soluto viene dada por la ley de los gases ideales (Ec. 8.9):

$$p_s = \frac{nRT}{V}$$

En esta expresión V es el volumen ocupado por la disolución y n es el número de moles de soluto en la disolución. Teniendo en cuenta la Ec. 9.9, esta expresión puede escribirse

$$p_s = cRT$$

La presión del «gas» disuelto es la que se opone al movimiento del émbolo. Cuando la presión p ejercida por el émbolo es menor que la presión del soluto p_s, el soluto «se dilata»: el agua pasa al compartimiento de la izquierda, aumenta el volumen de fluido en este compartimiento y se diluye la disolución. Cuando la presión p es mayor que p_s, el soluto se «comprime»: sale agua del compartimiento de la izquierda, disminuye el volumen de fluido en este compartimiento y se concentra la disolución. Cuando p es igual que p_s no hay flujo de agua desde ni hacia la disolución. Así p_s es igual a la presión osmótica de la disolución:

$$p_{os} = p_s = cRT \qquad 9.10$$

OBSERVACIÓN. A menudo el agua del compartimiento de la derecha se encuentra a la presión atmosférica p_0. Para impedir la ósmosis en este caso, la presión absoluta de la disolución debe ser $p_0 + p_{os}$. Es decir, la ósmosis cesa cuando la presión de la disolución excede a la presión del agua en la presión osmótica p_{os}.

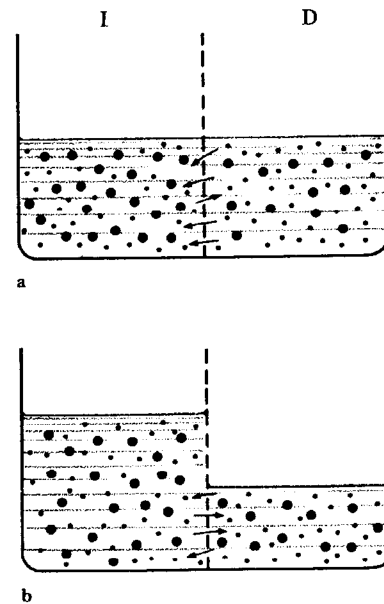


FIGURA 9.17
(*a*) Una disolución concentrada de azúcar separada de un disolución diluida de azúcar por medio de una membrana semipermeable. (*b*) En el equilibrio las concentraciones son iguales en los dos compartimientos.

Osmolalidad

La presión osmótica de un líquido con más de una sustancia disuelta en él también viene dada por la Ec. 9.10. Sin embargo, en este caso, c debe ser la concentración total de todas las partículas que no penetran en la disolución. A esta concentración se da el nombre de *osmolalidad* de la disolución. En su cálculo, todas las partículas que no penetran contribuyen por igual, tanto si son grandes moléculas de proteínas como pequeños iones Na^+. De hecho, una molécula, como el NaCl, que se disocia en iones diferentes (Na^+ y Cl^-) cuando se disuelve en agua, contribuye a la osmolalidad con dos partículas. La osmolalidad se mide habitualmente en osmoles por litro, siendo un *osmol* 1 mol de moléculas e iones impenetrantes. Se utiliza el término osmol para poner de relieve que sólo se cuentan las partículas no difusibles.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la presión osmótica de un fluido intracelular cuya osmolalidad vale 0,30 osmoles/l?
Una osmolalidad de 0,30 osmoles/l quiere decir que en cada litro de fluido intracelular existen

$$0{,}30N_A = 1{,}8 \times 10^{23}$$

moléculas e iones no difusibles, donde $N_A = 6 \times 10^{23}$ es el número de Avogadro. A partir de la Ec. 9.10, la presión osmótica de este fluido a la temperatura corporal (37 °C) es

$$\begin{aligned} p_{os} &= (0{,}30 \text{ osmol/l})(0{,}082 \text{ atm·l/K})(310 \text{ K}) \\ &= 7{,}6 \text{ atm} = 5800 \text{ mm Hg} \end{aligned}$$

Ésta no es la presión del fluido intracelular sino sólo una medida de la tendencia del agua a difundirse en la célula. La presión real en el

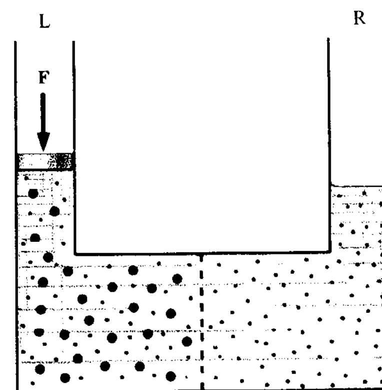


FIGURA 9.18
Émbolo adaptado al compartimiento de la izquierda para ajustar la presión en este compartimiento.

interior de una célula depende de la osmolalidad del fluido que rodea la célula y de la rigidez de la pared celular.

La presión real dentro de una célula depende de la osmolalidad del fluido que rodea a la célula y de la rigidez de la pared celular.

Cuando una célula con una pared celular rígida, por ejemplo, un glóbulo rojo de la sangre, se coloca en agua pura, el agua trata de difundirse en la célula; pero dado que la célula no puede dilatarse, penetra muy poca agua. En cambio, la presión del fluido interno aumenta hasta que o bien alcanza un valor de 7,9 atm por encima de la presión externa o revienta la célula. Normalmente los glóbulos rojos se abren cuando se les pone en agua pura.

Asimismo, cuando una célula provista de una pared celular no rígida se coloca en una disolución de osmolalidad algo menor que 0,30 osmoles/l, el agua se difunde en la célula; pero como la pared celular carece de rigidez, la presión del fluido interno no aumenta. En cambio, la célula se dilata cuando el agua se difunde en ella. Esto disminuye la concentración del fluido intracelular, y la ósmosis se detiene cuando la osmolalidad de dicho fluido se hace igual que la del fluido extracelular.

Del mismo modo, cuando se coloca una célula de osmolalidad mayor que 0,30 osmoles/l, el agua sale de la célula, lo cual aumenta la osmolalidad del fluido intracelular. La célula se encoge hasta que las osmolalidades de los dos fluidos son iguales.

Así, la osmósis mantiene iguales las osmolalidades de los fluidos intracelular y extracelular. Si la osmolalidad del fluido extracelular disminuye repentinamente, el agua penetra en las células hasta que se alcanza la igualdad. Si la osmolalidad del fluido extracelular aumenta repentinamente, sale agua de las células.

Una disolución *isotónica* es la que tiene la osmolalidad del fluido intracelular. Una célula colocada en una disolución isotónica no se hinchará ni se encogerá. Los fluidos administrados a un paciente por vía intravenosa son normalmente isotónicos para no turbar así el equilibrio de los fluidos del cuerpo. Por ejemplo, una disolución isotónica de glucosa, $C_6H_{12}O_6$, empleada como alimentación intravenosa debe tener una osmolalidad de 0,30 osmoles/l. Como la masa molecular de la glucosa es 180 u, una disolución isotónica contiene 180 g $\times$ 0,30 = 54 g de glucosa por litro de agua.

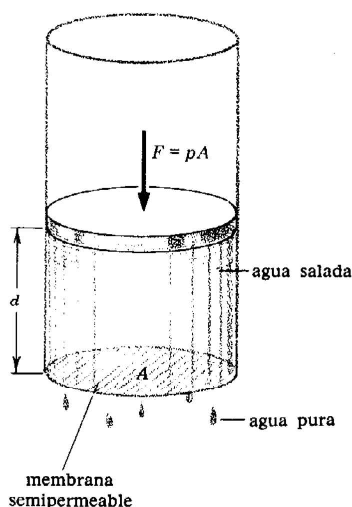


FIGURA 9.19
Ósmosis inversa. Cuando la presión del agua salada supera a su presión osmótica, el agua pura pasa a través de la membrana semipermeable.

Ósmosis inversa

La ósmosis inversa puede ser un método práctico para desalinizar el agua del mar. La osmolalidad del agua del mar es 1,08 osmoles/l, de modo que la presión osmótica del agua del mar a 20° C es

$$p_{os} = (1{,}08 \text{ osmol/l})(0{,}082 \text{ atm-l/K})(293 \text{ K}) = 25{,}9 \text{ atm}$$

Si el agua del mar colocada a un lado de una membrana semipermeable está sometida a una presión mayor que ésta, pasará agua pura a través de la membrana (Fig. 9.19). Actualmente las membranas apropiadas para la desalinización son caras y se deterioran rápidamente.

Cuando se desarrollen membranas más baratas y más duraderas, la ósmosis inversa puede ser un proceso económico para la desalinización a gran escala.
Este proceso es atrayente porque requiere relativamente poca energía. Si la presión del agua del mar es p, la fuerza sobre una membrana de área A es $F = pA$. La Fig. 9.19 muestra que para purificar un volumen $V = Ad$ de agua, el fluido debe desplazarse la distancia $d = V/A$. Por lo tanto, el trabajo realizado en la desalinización de un volumen V de agua es

$$W = Fd - pA\frac{V}{A} = pV$$

El volumen de 1 mol de agua es $V = 18\ \text{cm}^3 = 18 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$. Si la presión es $p = 26$ atm $= 26{,}3 \times 10^5\ \text{N/m}^2$, el trabajo realizado es

$$W = pV = (26{,}3 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(18 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) = 47{,}3\ \text{J}$$

De este modo, sólo se necesitan 47,3 J para desalinizar 1 mol de agua del mar por ósmosis inversa. Esto se puede comparar con la energía requerida para desalinizar agua por evaporación. En la tabla 9.1 se observa que el calor de vaporización del agua a 20° C es 10,55 kcal/mol $= 44{,}2 \times 10^3$ J/mol. Es decir, la energía necesaria para convertir agua en vapor a 20° C es casi 1000 veces la energía necesaria para purificar agua por ósmosis inversa.

9.5. PRESIÓN NEGATIVA

La presión se considera corrientemente como una magnitud positiva, igual a la fuerza hacia afuera por unidad de área que ejerce un fluido sobre el medio o a la fuerza hacia adentro por unidad de área que ejerce el medio sobre el fluido. Es razonable, por lo tanto, hablar de presión negativa en un fluido si éste tira del medio hacia adentro y el medio tira del fluido hacia afuera. Un fluido con presión negativa estaría en un estado de tensión semejante al de una cuerda estirada.
Para mejor entender esto, consideremos el fluido en el tubo de la Fig. 9.20 (el tubo se encuentra en el vacío a fin de eliminar los efectos de la presión atmosférica). Si se aplica al émbolo del tubo una fuerza hacia adentro **F**, el fluido ejercerá sobre el émbolo una fuerza opuesta hacia afuera —**F**. Por consiguiente el émbolo estará en equilibrio. La presión positiva p del fluido es $p = F/A$, donde A es el área del émbolo.
Supongamos, en vez de eso, que se aplica al émbolo una fuerza hacia afuera **F**, tal como se representa en la Fig. 9.20. Inicialmente, las fuerzas ejercidas sobre el émbolo, tanto por el fluido como por la fuerza aplicada **F**, están las dos dirigidas hacia afuera y el émbolo se desplaza con movimiento acelerado hacia la derecha.
Si el fluido es un gas, éste se expandirá por el volumen disponible que va dejando el émbolo a medida que se desplaza. Disminuirá la presión del gas, de acuerdo con la ley de los gases ideales, pero nunca descenderá por debajo de cero. Es decir, el gas ejerce siempre una fuerza en la dirección de **F**, de modo que el émbolo no está nunca en equilibrio. Un gas no puede ejercer una presión negativa.

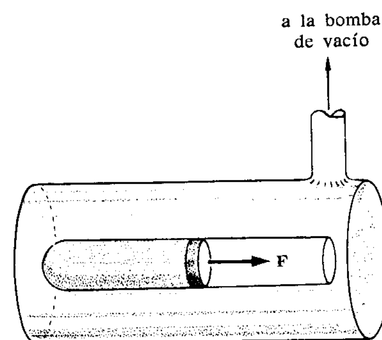


FIGURA 9.20
Fluido sometido a una fuerza tensora.

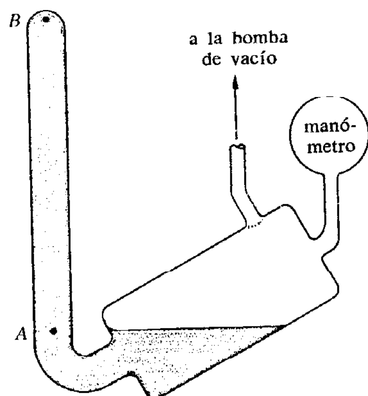


FIGURA 9.21
Manómetro de tubo cerrado conectado a una bomba de vacío y a un indicador de presión.

Si el fluido es un líquido, el émbolo se soltará normalmente de él y se desplazará libremente hacia la derecha mientras que el líquido queda atrás a presión cero. No obstante, si fuese posible evitar que el émbolo se soltase, éste tiraría del líquido tratando de aumentar su volumen. Como un líquido posee un volumen más o menos fijo, se opondría a la expansión tirando del émbolo hacia atrás. El equilibrio se establece cuando el módulo de la fuerza hacia adentro ejercida por el líquido sobre el émbolo es igual al módulo de la fuerza hacia afuera **F**. En este caso el líquido se encuentra en un estado de tensión, con una presión negativa $p = -F/A$.

En la práctica, la presión negativa se obtiene utilizando un manómetro de tubo cerrado, como el que se representa en la Fig. 9.21. El tubo vertical está cerrado por arriba, y por abajo está conectado a través de un depósito, a una bomba de vacío y a un indicador de presión. Al principio, el depósito está abierto a la atmósfera, y el líquido se mantiene en el tubo vertical por la presión atmosférica p_A en A. La presión p_B en la parte superior del líquido (punto B) viene dada por la Ec. 7.6:

$$p_B = p_A - \rho g h \qquad 9.11$$

donde h es la distancia entre A y B y ρ es la densidad del fluido.

Normalmente, cuando la presión p_A en el depósito se disminuye por medio de la bomba de vacío, el líquido desciende del tubo. No obstante, si el líquido y el tubo están extraordinariamente limpios y libres de impurezas,† es posible reducir p_A a cero sin que el líquido descienda. En este caso, la Ec. 9.11 muestra que la presión en B es negativa. Por ejemplo, es posible mantener de este modo una columna de mercurio de 2,5 m de alto. Esto corresponde a una presión negativa en B de —2500 mm Hg, o sea —3,3 atm.

Utilizando técnicas refinadas, se han obtenido presiones de cerca de —300 atm en el agua. No se conoce el valor máximo posible de la presión negativa, pero probablemente el líquido se separará a un cierto valor, lo mismo que sucede con un alambre, que se rompe cuando su tensión es muy grande.

OBSERVACIÓN. Un líquido sometido a presión negativa es muy inestable. Es semejante a un lápiz en equilibrio sobre su punta. A la más ligera perturbación, el líquido se rompe en gotas pequeñísimas que se precipitan por el tubo.

Transporte del agua en los árboles

En la actualidad la evidencia sostiene de manera clara la teoría de que el agua asciende en los árboles por presión negativa. Así, mientras en el laboratorio se precisan técnicas especializadas para producir una presión negativa, he aquí que la naturaleza produce de modo habitual y con facilidad tales presiones.

El agua en las plantas es conducida hacia arriba a través del *xilema*, un sistema de capilares formado por células muertas que han perdido su citoplasma. Estos capilares tienen diámetros comprendidos

† Para lograr la necesaria pureza hacen falta técnicas especiales: por ejemplo, hervir el líquido en el vacío para eliminar todo el gas disuelto en él.

entre 0,05 y 0,50 mm y pueden subir hasta una altura de 75 m o más. ¿Cómo sube el agua hasta esas alturas increíbles?

El método para elevar el agua de un pozo consiste en reducir la presión en la parte alta de la tubería, y esto hace que la presión de la atmósfera obligue al agua a subir por la tubería. Pero la altura máxima a que puede ser llevada el agua por este procedimiento es de unos 10 m solamente, que es la altura de una columna de agua que puede ser sostenida por una presión de 1 atm. Este método no es adecuado para hacer subir el agua a un árbol alto.

Podría pensarse que el agua sube por medio de la acción capilar. Sin embargo, la Ec. 9.8 nos dice que la altura h a que sube el agua en un capilar de radio $r = 0{,}02$ mm $= 2 \times 10^{-5}$ m es

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{2 \times 0{,}0727\ \text{N/m}}{(10^3\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2 \times 10^{-5}\ \text{m})}$$
$$= 0{,}74\ \text{m}$$

la cual no alcanza la altura necesaria.

La ósmosis es otro mecanismo a tener en cuenta. Resulta eficaz cuando la concentración de sustancias disueltas en la savia es mayor que la del agua subterránea. Esto ocurre en los arces al iniciarse la primavera, cuando la savia comienza a subir. En ese tiempo, las raíces poseen una gran concentración de azúcar producida durante el verano anterior. Al fundirse la nieve, el agua subterránea se difunde en las células de las raíces, obligando a la savia a subir por el árbol. La altura máxima que puede alcanzar la savia siguiendo este mecanismo está relacionada con la presión osmótica por medio de la expresión $p_{os} = \rho g h$. Para conseguir que la savia suba, por ejemplo, a un arce, la presión osmótica debe ser al menos

$$p_{os} = \rho g h = (10^3\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(30\ \text{m})$$
$$= 2{,}94 \times 10^5\ \text{N/m}^2 = 2{,}9\ \text{atm}$$

De acuerdo con la Ec. 9.10, esto requiere una concentración molar de por lo menos

$$c = \frac{p_{os}}{RT} = \frac{2{,}9\ \text{atm}}{0{,}082\ \text{atm-l/K} \times 293\ \text{K}}$$
$$= 0{,}12\ \text{osmol/l}$$

Como al iniciarse la primavera, la concentración de azúcar en la savia es mayor que ésta, la presión osmótica en este caso impulsa a la savia xilema arriba. Sin embargo, en verano, la concentración de azúcar en la savia es demasiado baja como para que la presión osmótica haga subir a la savia por el árbol.

Además, el agua puede subir en los árboles venciendo una barrera de presión osmótica. Esto sucede de manera muy espectacular en los mangles que crecen en agua de mar. La savia dentro del xilema es esencialmente agua pura, mientras que las raíces están en agua salada. De este modo una presión osmótica de 25,9 atm (Apart. 9.4) tiende

a impulsar el agua pura de los árboles hacia el agua de mar. De hecho, sin embargo, tiene lugar una ósmosis inversa y pasa agua pura desde el mar al mangle. Esto exige que la presión en el mar sea por lo menos 25,9 atm mayor que la presión en el árbol. Pero la presión absoluta del agua del mar es de 1 atm. Por consiguiente, la presión absoluta dentro del xilema del árbol debe ser de —24,9 atm o menor. Generalmente se cree que la presión del agua en el xilema de la mayoría de los árboles y plantas es negativa; es decir, el agua en el xilema está en tensión. Es forzada a ascender por la planta como cuando se tira de una cuerda hacia arriba. Cuando las moléculas de agua se evaporan de la superficie de las hojas, las moléculas próximas llegan a la superficie para reemplazarlas. Estas moléculas son reemplazadas a su vez por otras nuevas procedentes del xilema. La larga e ininterrumpida columna de agua del xilema se mantiene unida gracias a las fuerzas cohesivas entre las moléculas del agua.

Medidas directas de la presión en el xilema de árboles altos [Scholander et al. (1965)] demuestran que la presión es la mayoría de las veces negativa en la copa de un árbol y que aumenta, es decir, se hace menos negativa, a medida que descendemos, a causa de la variación de presión debida a la gravedad (propiedad 3 de los fluidos, Ec. 7.6). Por ejemplo, si la presión es —30 atm en la copa de un árbol, es —27 atm en un punto situado 30 m por debajo.

PROBLEMAS

1. El calor de vaporización del tetraclorometano, CCl_4, es 0,05087 kcal/g a 20° C. ¿Cuál es su calor molar de vaporización?
   Resp. 7,82 kcal/mol.
2. El calor de vaporización del éter dietílico, C_4H_{10}, es 6,72 kcal/mol a 30° C. ¿Cuál es su calor de vaporización en kilocalorías por gramo?
3. ¿Cuánta energía se necesita para vaporizar 250 g de etanol, C_2H_5OH, a 20 °C?
   Resp. 221 kJ.
4. Experimentalmente se encuentra que para vaporizar 50 g de triclorometano (cloroformo) $CHCl_3$ a 20 °C se necesitan 12,7 kJ. ¿Cuál es el calor molar de vaporización del triclorometano?
5. El cuerpo humano gasta aproximadamente 2500 kcal de energía interna por día. Si toda esta energía se perdiese evaporando agua por la piel, ¿cuánta agua se evaporaría al día?
   Resp. 4,27 kg.
6. ¿Cuánta energía se necesita para transformar 1 l de agua a 100 °C en vapor? (Utilizar la tabla 7.2.)
7. (*a*) ¿Cuánta energía *w* se necesita para arrancar del agua a 20 °C una molécula. (*b*) Si las moléculas de agua tienen la misma distribución de energía que las moléculas de un gas ideal (tabla 8.2), ¿qué fracción, aproximadamente, de moléculas de agua tienen a 20 °C energía suficiente para escapar?
   Resp. (a) $7,33 \times 10^{-20}$ J; (*b*) 10^{-7}.

* 8. Representar gráficamente la tensión superficial del agua en función de la temperatura. Haciendo pasar por estos puntos una recta, calcular aproximadamente la temperatura a la que es cero la tensión superficial.

OBSERVACIÓN. La tensión superficial de un líquido es cero a su temperatura crítica (Apart. 8.5), que es donde desaparece la distinción entre líquido y gas. Comparar el cálculo de la temperatura crítica del Prob. 8 con el valor dado en la tabla 8.3. Es de esperar una considerable discrepancia, dado que la tensión superficial no varía linealmente con la temperatura dentro del amplio intervalo de temperatura considerado.

* 9. La Fig. 9.22 representa un método corriente para la medida de la tensión superficial de un líquido. Se sumerge en el líquido un capilar de radio *r* y se aumenta la presión en el capilar hasta que se forma una burbuja. La presión máxima se alcanza poco antes de que se rompa la burbuja. Cuando se alcanza ese valor, la burbuja es un hemisferio, tal como indica la figura.

(*a*) Demostrar que en esa situación la presión manométrica $\bar{p}$ en el capilar es

$$\bar{p} = \frac{2\gamma}{r}$$

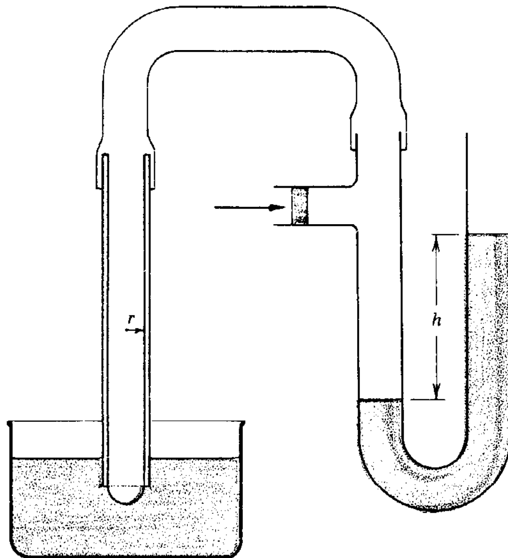


FIGURA 9.22. Problema 9.

(*b*) Se sumerge en tetraclorometano un capilar de 0,2 mm de radio y se forman burbujas cuando la diferencia de alturas en las dos ramas del manómetro de agua es de 2,75 cm. ¿Cuál es la tensión superficial del tetraclorometano? (*c*) ¿Cuál es la diferencia de alturas en los brazos del manómetro cuando el capilar forma una burbuja en el agua a 20° C?
Resp. (*b*) 0,0265 N/m; (*c*) 7,42 cm.

10. En los extremos de un tubo de vidrio cerrado en su punto medio por una llave de paso se forman dos burbujas de jabón de radios diferentes r_1 y r_2 (Fig. 9.23). ¿Qué le ocurre al tamaño de las burbujas cuando se abre la llave de paso de manera que el aire puede circular entre las dos burbujas?
11. (*a*) ¿Cuál es la presión (manométrica) en el interior de una burbuja de jabón de 2 cm de radio formada a partir de una disolución cuya tensión superficial es 0,06 N/m? (*b*) Si la tensión superficial de la disolución se mide por el método descrito en el Prob. 9, ¿cuál es la presión máxima en un capilar de 0,02 cm de radio? [*Sugerencia:* La burbuja en (*a*) es una burbuja

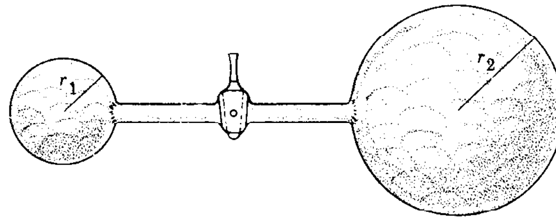


FIGURA 9.23. Problema 10.

de dos caras y se ha de aplicar la Ec. 9.4, mientras que la burbuja en (*b*) es una burbuja de una sola cara y se ha de aplicar entonces la Ec. 9.5.]
Resp. (*a*) 12 N/m²; (*b*) 600 N/m².
12. ¿Cuál es la presión dentro de un alvéolo hinchado hasta un radio de 0,08 mm si la tensión superficial del fluido que lo reviste es 0,04 N/m?
13. (*a*) La pata de un insecto parado en el agua forma una depresión (Fig. 9.6) de radio $r = 2$ mm y ángulo $\theta = 40°$. ¿Cuánto peso soporta esta depresión? (*b*) ¿Cuál es la masa del insecto, suponiendo que está siendo sostenido por igual sobre las seis patas?
Resp. (*a*) $7,0 \times 10^{-4}$ N; (*b*) 0,43 g.
14. Una araña de agua de 2 g de masa está apoyada sobre la superficie del agua. Suponiendo que cada pata soporta un octavo del peso de la araña, ¿cuál es el radio de la depresión hecha por cada pata (Fig. 9.6)? Tomar θ igual a 45°.
15. (*a*) ¿A qué altura h ascenderá el etanol en un capilar de 0,5 mm de radio si el ángulo de contacto es cero? (*b*) En un experimento con un capilar de un cierto material, se obtiene que el alcohol asciende hasta una altura de 1,09 cm. ¿Cuál es el ángulo de contacto entre el alcohol y el material del capilar?
Resp. (*a*) 1,17 cm; (*b*) 20°.
16. El triclorometano asciende a una altura de 2,48 cm en un capilar de 0,15 mm de radio. ¿Cuál es la tensión superficial del triclorometano suponiendo que el ángulo de contacto es cero?
17. El agua asciende 5,0 cm en un capilar. ¿Cuál es el radio del capilar?
Resp. 0,296 mm.
* 18. Cuando dos placas de vidrio húmedas se mantienen juntas y se sumergen en agua, el agua asciende hasta una altura h en el espacio que queda entre las dos placas

(Fig. 9.24). Demostrar que la altura h está relacionada con la distancia d entre las placas por la fórmula.

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{d\rho g}$$

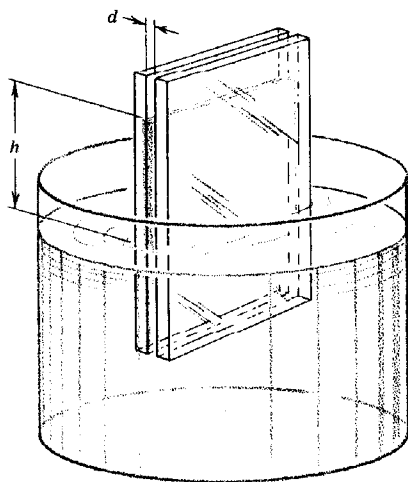


FIGURA 9.24. Problemas 18 y 19.

19. Si el agua asciende 9,5 cm en el espacio existente entre dos placas de vidrio sumergidas en agua, ¿cuál es la distancia d entre las placas? Tomar θ igual a cero (ver Prob. 18).
Resp. 0,156 mm.
20. Un vaso sanguíneo capilar posee un radio de 2×10^{-6} m. ¿Hasta qué altura puede ascender la sangre en dicho vaso si el ángulo de contacto es cero?
21. (*a*) La masa molecular del azúcar (sacarosa) es 342,3 u. ¿Cuál es la osmolalidad de una disolución de azúcar del 1 % (1 g de azúcar disuelto en 100 g de agua)? (*b*) ¿Cuál es la osmolalidad de una disolución de sal (NaCl) del 1 %, suponiendo que cada molécula NaCl se disocia en disolución en iones Cl^- y Na^+?
Resp. (*a*) 0,029 osmol/l; (*b*) 0,34 osmol/l.
22. La masa molecular de la urea es 60 u. ¿Cuál es la concentración (en gramos por litro) de una disolución de urea en agua de 0,20 osmol/l?
23. Las paredes de los capilares sanguíneos son permeables a la mayor parte de las moléculas pequeñas pero impermeables a las proteínas. La tabla 9.2 da las concentraciones (en gramos por litro) y las masas moleculares medias de los principales grupos proteínicos que se encuentran en el plasma sanguíneo. Calcular la osmolalidad de cada grupo proteínico y la osmolalidad total del plasma.
Resp. Osmolalidad total = 0,837 mosmol/l.

TABLA 9.2. **Concentración y masa molecular media de los principales grupos proteínicos del plasma sanguíneo.**

Grupo proteínico	Concentración g/l	Masa molecular
Albúmina	45	69 000
Globulina	25	140 000
Fibrinógeno	3	400 000

24. Demostrar que a la temperatura del cuerpo (37° C), la presión osmótica (en milímetros de mercurio) de una disolución está relacionada con la osmolalidad de la disolución (en miliosmoles por litro) por medio de la expresión

$$p_{ps} \text{ (mm Hg)} = 19{,}3\ c \text{ (mosmol/l)}$$

25. ¿Cuál es la presión osmótica del plasma sanguíneo originada por las proteínas disueltas en él (ver Probs. 23 y 24)?
Resp. 16,2 mm Hg.

OBSERVACIÓN. La presión osmótica normal del plasma sanguíneo es de 28 mm Hg. La diferencia entre esta presión y la presión de 16,2 mm Hg debida a las proteínas disueltas tiene su origen en los iones disueltos en el plasma. Las moléculas proteínicas, que están cargadas negativamente, atraen a los iones cargados positivamente y les impiden que se difundan a través de la pared del capilar. Estos iones positivos contribuyen a la presión osmótica aun cuando la pared capilar sea permeable a ellos. Este fenómeno se conoce como el *equilibrio de Donnan.*

26. Los riñones sacan de la sangre unos 180 l de fluido por día (el 99 por ciento de este fluido es devuelto a la sangre y el 1 por ciento restante se elimina en forma de orina). La eliminación de fluido del plasma es ósmosis inversa, porque el plasma tiene una presión osmótica de 28 mm Hg (ver Prob. 25 y la observación que le sigue). ¿Cuánto trabajo deben realizar los riñones cada día para filtrar el fluido de la sangre?

Capítulo 10 Sólidos

Un sólido es un objeto rígido que tiende a mantener su forma cuando se le aplican fuerzas externas. Debido a esta rigidez, los materiales sólidos se emplean en la construcción de todas las estructuras complejas que tienen una forma fija. El ingeniero estudia las propiedades mecánicas de los materiales, tales como el acero y el hormigón, empleados en las estructuras que construye. De igual modo, es de interés para el biólogo conocer algo acerca de las propiedades de algunos materiales, como la madera y los huesos, que sirven como componentes rígidos de plantas y animales. Este capítulo discute ciertas propiedades comunes a todos los sólidos y algunas otras específicas de los materiales biológicos.

10.1. SÓLIDOS CRISTALINOS

Las moléculas de un sólido, lo mismo que las de un líquido, están tan próximas unas de otras que se ejercen entre sí intensas fuerzas atractivas. Sin embargo, las moléculas de un líquido son libres para ir de un lado a otro, mientras que las moléculas de un sólido tienen posiciones fijas. Son las posiciones fijas de las moléculas lo que da a los sólidos su rigidez.

Definición. Un *cristal* es un sólido en el que las moléculas están dispuestas en una malla regular tridimensional que persiste en todas las partes del sólido. La disposición ordenada de las moléculas determina la forma externa del cristal, que presenta superficies planas que se juntan formando ángulos definidos característicos de la malla molecular. La Fig. 10.1 muestra una malla posible, una red cúbica simple. La Fig. 10.2 muestra unos cristales de cuarzo, que son cristales naturales de dióxido de silicio, SiO_2. La Fig. 10.3 es una fotomicrografía de un copo de nieve, el cual es un cristal complejo de H_2O. La regularidad y simetría de un cristal es la manifestación visible de la disposición de moléculas en el sólido.

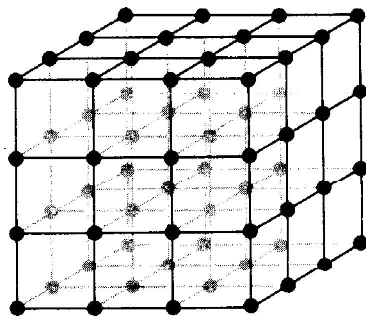


FIGURA 10.1
Moléculas dispuestas en una red cúbica simple.

Si moléculas idénticas ocupan cada uno de los puntos de esta red, la molécula situada en un punto reticular cualquiera tiene las mismas vecinas que la molécula de cualquier otro punto (excepto, claro está, para aquellas moléculas localizadas cerca de la superficie del cristal). Así, todas las moléculas del interior de un sólido cristalino están sometidas a idénticas condiciones y se comportan, por lo tanto, de manera idéntica. El idéntico comportamiento de las moléculas de un sólido cristalino es lo que da a estos sólidos sus características especiales.

Un sólido se forma frecuentemente bajo condiciones que no favorecen la formación de un cristal único. En cambio, cuando se forma el sólido, miles de diminutos cristales crecen juntos. Dentro de cada microcristal las moléculas tienen una disposición ordenada, pero los microcristales unos con respecto a otros están dispuestos al azar. Los metales, en general, tienen esta clase de estructura. Como cada micro-



FIGURA 10.2
Cristales de cuarzo.

cristal contiene 10^{16} o más moléculas, la gran mayoría de éstas están en el interior de una extensa red ordenada de moléculas. Sólo las relativamente pocas moléculas localizadas en el límite entre dos microcristales están desordenadas (Fig. 10.4). Así, un sólido cristalino compuesto de microcristales se comporta de muchas maneras como un único cristal.

Definición. Un *sólido cristalino* es un sólido que consiste ya sea en un cristal único como en un conjunto de muchos microcristales unidos. En este apartado se discuten las propiedades comunes a todos los sólidos cristalinos.

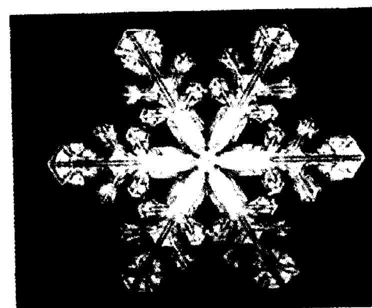


FIGURA 10.3
Un copo de nieve.

OBSERVACIÓN. En un sólido no cristalino las moléculas están dispuestas al azar, de modo que las fuerzas ejercidas sobre una molécula son diferentes de las ejercidas sobre otra. El vidrio es quizá el ejemplo más corriente de sólido no cristalino. Químicamente predomina el SiO_2, lo mismo que en el cuarzo. Sin embargo, sus propiedades físicas difieren de las del cuarzo porque sus moléculas están dispuestas de manera diferente.

La propiedad más característica de un sólido cristalino es la existencia de una temperatura definida T_m, llamada el *punto de fusión*. Cuando un sólido se calienta, su temperatura T aumenta hasta que alcanza T_m. A partir de ahí, un ulterior calentamiento transforma el sólido en un líquido a la temperatura T_m.

Definición. El *calor molar de fusión* H_f es la energía necesaria para fundir un mol de sólido en su punto de fusión. Toda la energía añadida a un sólido en el punto de fusión entra a formar parte del calor de fusión necesario para fundirlo, de aquí que la temperatura no aumente durante el proceso de fusión. Sin embargo, después de que todo el sólido se ha fundido, la temperatura del líquido aumenta si se sigue suministrando energía. La tabla 10.1 da el punto de fusión y el calor molar de fusión de algunas sustancias corrientes.

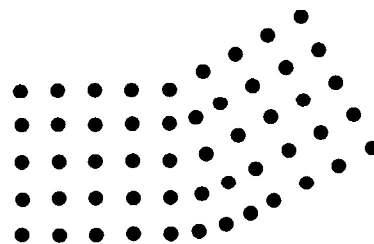


FIGURA 10.4
Solamente las moléculas situadas en el límite entre dos microcristales están desordenadas.

En el punto de fusión una sustancia puede coexistir en las fases sólida y líquida. Por ejemplo, una mezcla de hielo y agua a 0° C es estable si no se añade ni se quita energía. Sin embargo, si se añade

energía, el hielo se fundirá, y si se quita energía, se congelará el agua. A temperaturas superiores a T_m la sustancia no puede existir como sólido, y a temperaturas inferiores a T_m la sustancia no puede existir normalmente como líquido.*

TABLA 10.1. **Punto de fusión, calor de fusión y punto de ebullición de algunos sólidos cristalinos en orden creciente de punto de fusión.**

Sustancia	Punto de fusión, °C	Calor de fusión, kJ/mol	Punto de ebullición °C
Oxígeno	−218,8	0,444	−183
Etanol	−114,5	0,012	78,5
Dióxido de carbono	− 56,6†	7,95	†
Mercurio	− 38,9	2,34	357
Agua	0	6,01	100
Sodio	97,8	2,6	892
Azufre	119	1,2	445
Plomo	327	5,11	1744
Aluminio	659	10,7	2467
Cloruro sódico	800	30,2	1413
Cobre	1083	13,0	2595
Dióxido de silicio (cuarzo)	1470	14,2	2230
Hierro	1530	14,9	3000
Tungsteno	3387	35,2	5927

† Ésta es la temperatura del punto triple, la presión del punto triple del CO_2 es 5,11 atm, de modo que el CO_2 no existe como líquido a la presión atmosférica.

OBSERVACIÓN. Un sólido no cristalino, por ejemplo, un vidrio, no tiene punto de fusión definido. Como las moléculas del sólido están dispuestas al azar, algunas moléculas pueden soltarse de sus posiciones más fácilmente que otras. Cuando se aumenta la temperatura del vidrio, éste se hace cada vez más blando hasta que eventualmente comienza a fluir, pero no aparece una transición brusca del sólido al líquido. Recíprocamente, cuando un vidrio fundido se enfría, su viscosidad aumenta continuamente hasta que deja de presentarse un flujo perceptible. La mantequilla y la margarina son también ejemplos de sólidos no cristalinos que carecen de punto de fusión definido.

El punto de fusión de un sólido cristalino depende ligeramente de la presión. Por ejemplo, el punto de fusión del agua, que es 0° C a una presión de 1 atm, disminuye hasta —1,5° C a una presión de 200 atm. El punto de fusión convencional T_m es el punto de fusión a una presión de 1 atm. Un gráfico del punto de fusión en función de la presión da la curva de fusión representada en la Fig. 10.5. La curva es casi vertical porque p ha de variar en muchas atmósferas para hacer variar en una fracción de grado el punto de fusión. (La curva de fusión de la Fig. 10.5 está inclinada a la derecha porque el punto de fusión de la mayoría de las sustancias, a diferencia del del agua, aumenta cuando aumenta la presión.) Una sustancia es sólida para valores de p y T

* En ciertas circunstancias, un líquido puede ser enfriado por debajo del punto de fusión sin que solidifique. Sin embargo, ésta es una situación inestable y todo el líquido solidifica inmediatamente una vez que una parte de él ha comenzado a solidificar

a la izquierda de la curva de fusión y líquida para valores de p y T a la derecha de la curva. Los puntos de la curva de fusión dan los valores de p y T para los cuales el líquido y el sólido pueden coexistir. Análogamente, una curva de vaporización es un gráfico de la presión de vapor de un líquido (Apart. 8.5) en función de la temperatura. Como se muestra en la Fig. 10.5, una sustancia es un líquido para valores de p y T por encima de esta curva y un gas para valores de p y T por debajo de la curva. Un punto situado sobre la curva de vaporización da la presión p del vapor que está en equilibrio con el líquido a la temperatura T. La curva de vaporización termina a la temperatura crítica T_c, que es la temperatura más alta a la que la sustancia puede existir como líquido (Apart. 8.5). El punto de ebullición T_b de una sustancia es la temperatura a la cual la presión de vapor es 1 atm. La tabla 10.1 da el punto de ebullición de algunas sustancias ordinarias.

La curva de vaporización corta a la curva de fusión en un punto llamado el *punto triple*. La temperatura T_t y la presión p_t en este punto son características de la sustancia. Por ejemplo, en el punto triple del H_2O estos valores son 0,01° C y 0,0060 atm (4,58 mm Hg). A esta temperatura y presión de vapor coexisten las fases sólida, líquida y gaseosa de una sustancia. Para la mayoría de las sustancias, las temperaturas T_m y T_t difieren sólo en unas cuantas centésimas de grado, lo cual carece de importancia en la mayoría de los casos.†

† La única excepción importante es el dióxido de carbono; ver tabla 10.1.

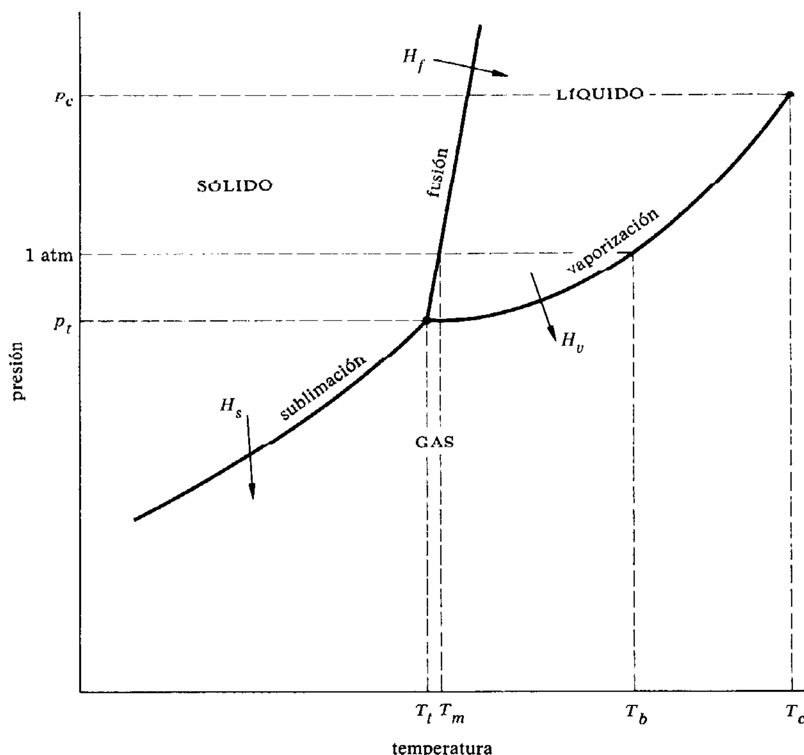


FIGURA 10.5
Diagrama pT de una sustancia cristalina. La curva de fusión separa las fases sólida y líquida, la curva de vaporización separa las fases líquida y gaseosa y la curva de sublimación separa las fases gaseosa y sólida.

Una tercera curva, llamada *curva de sublimación,* corta también a las curvas de vaporización y fusión en el punto triple (Fig. 10.5). Esta curva da la presión de vapor del gas en equilibrio con el sólido a diferentes temperaturas. Una sustancia es un sólido para valores de p y T por encima de la curva y un gas para valores de p y T por debajo de la curva. Por ejemplo, la presión de vapor del hielo a —10° C es 1,95 mm Hg. En un día de invierno seco y frío, cuando la temperatura es —10° C (14° F) y la presión parcial del H_2O en el aire es inferior a 1,95 mm Hg, los valores de p y T corresponden a un punto situado por debajo de la curva de sublimación. En estas condiciones la única fase estable del H_2O es la fase gaseosa. Esto quiere decir que la nieve o el hielo del suelo no está en equilibrio con el vapor sino que se está transformando lentamente y de manera directa en vapor, proceso éste que recibe el nombre de *sublimación.* No se forma H_2O líquida porque no existe por debajo del punto triple.

La energía necesaria para transformar una sustancia directamente desde la fase sólida a la gaseosa se denomina *calor de sublimación* H_s. El calor de sublimación del H_2O es 50,6 kJ/mol, de modo que para transformar 1 g de hielo en vapor debe absorberse una energía de 50,6 kJ/18 = 2,81 kJ. No toda la nieve se sublima inmediatamente porque necesita tiempo para absorber esta energía del Sol y del aire ambiente. Sin embargo, toda la nieve se sublimaría si la temperatura permaneciese por debajo de 0° C y no cayese nieve de nuevo.

10.2. PROPIEDADES MECANICAS DE LOS SÓLIDOS

Un sólido no es absolutamente rígido; su forma y tamaño se modifican ligeramente cuando está sometido a fuerzas considerables. Estas variaciones no son muy perceptibles en circunstancias ordinarias, pero pueden medirse por medio de instrumentos diseñados para el ensayo de materiales sólidos. La finalidad de tales ensayos es obtener medidas cuantitativas de las propiedades mecánicas de diferentes materiales.

Módulo de Young

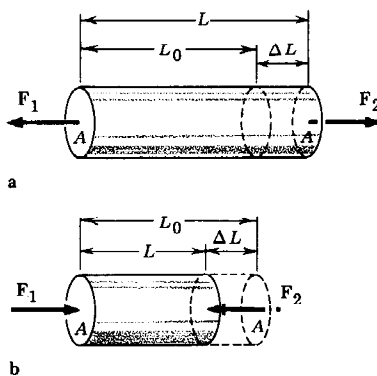


FIGURA 10.6
Una muestra sometida a (*a*) un esfuerzo de tracción y (*b*) un esfuerzo de compresión.

En el ensayo más sencillo, los extremos de una muestra cilíndrica del material se conectan a placas móviles. Las placas se separan (o se empujan una con otra), sometiendo a la muestra a una tracción (o a una compresión). La Fig. 10.6*a* representa una muestra en tracción y la Fig. 10.6*b* la representa en compresión. En cada uno de los casos las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tienen el mismo módulo porque el objeto está en equilibrio. La tensión T es el módulo de estas fuerzas (Apart. 2.2.). Como la compresión es la opuesta de la tracción, se pueden distinguir por el signo de T. La tensión T es positiva cuando la muestra está en tracción (Fig. 10.6*a*) y negativa cuando la muestra está en compresión (Fig. 10.6*b*).

Como resultado de la tensión varía la longitud de la muestra. Sea L_0 la longitud cuando la tensión es cero, y sea L la longitud cuando la tensión es distinta de cero. La variación de longitud $L - L_0$ se designa con el símbolo ΔL:

$$\Delta L = L - L_0$$

Los materiales se someten a ensayo midiendo la variación de longitud producida por una tensión dada T. La variación de longitud ΔL es positiva cuando T es positiva y negativa cuando T es negativa (figura 10.6).

La variación de longitud depende del tamaño y composición de la muestra. Para una muestra cilíndrica, ΔL es proporcional a su longitud L_0 e inversamente proporcional al área de su sección transversal A. Es decir, una muestra larga se estira más que una corta, y una muestra delgada se estira más que una gruesa. Así, el efecto del tamaño sobre ΔL puede escribirse

$$\Delta L = \frac{1}{E}\frac{L_0}{A}T \qquad 10.1$$

donde E es una constante, llamada ***módulo de Young***, que depende sólo de la composición de la muestra, y no de su tamaño. Esta ecuación supone también que ΔL es proporcional a T. Esto es cierto, como veremos, a condición de que T no sea demasiado grande. La tabla 10.2 da el módulo de Young de varios sólidos.

TABLA 10.2. **Módulo de Young, límite elástico y resistencia de algunos sólidos corrientes.**
Los valores recogidos aquí son representativos de cada material. Los valores reales para una muestra particular pueden diferir mucho de éstos.

Sustancia	Módulo de Young, 10^9 N/m²	Límite elástico σ_e, 10^7 N/m²	Resistencia a la tracción, 10^7 N/m²	Resistencia a la compresión, 10^7 N/m²
Aluminio	70	18	20	
Hueso: *				
Tracción	16		12	
Compresión	9			17
Ladrillo	20			4
Cobre	120	20	40	
Vidrio, cuarzo fundido	70		5	110
Granito	50			20
Hierro forjado	190	17	33	
Mármol	60			20
Poliestireno	3		5	10
Cuarzo	70			
Acero	200	30	50	
Madera	10			10

* Para más información sobre el hueso, ver tabla 10.5.

Es conveniente volver a escribir la Ec. 10.1 en función de la *deformación* normal ε y del *esfuerzo* normal σ.†

Definición. La *deformación* es la razón de la variación de longitud a la longitud original,

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

† ε es la letra griega epsilon y σ la letra griega sigma. Aquí normal significa *perpendicular*, más que *tipo* o *habitual*. Se utiliza para distinguirlo de cortante, que se define más abajo. Empleado sin calificativo, deformación y esfuerzo significan deformación normal y esfuerzo normal.

Definición. El *esfuerzo* es la razón de la tensión al área de la sección transversal,

$$\sigma = \frac{T}{A}$$

En función de estas magnitudes, la Ec. 10.1 puede escribirse

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

o bien

$$\sigma = E\epsilon \qquad 10.2$$

Las propiedades mecánicas de los sólidos se describen siempre en función del esfuerzo y la deformación, más que de la tensión y la variación de longitud, porque la relación entre el esfuerzo y la deformación es independiente del tamaño del objeto.

OBSERVACIÓN. La deformación es una magnitud adimensional y el esfuerzo tiene la dimensión de fuerza por unidad de área. Por lo tanto, de la Ec. 10.2, la dimensión del módulo de Young E es también de fuerza por unidad de área.
El esfuerzo sobre la muestra de la Fig. 10.6*a* es igual al módulo de la fuerza $\mathbf{F}_1$ dividido por el área A. Esto es semejante a la definición de presión (Apart. 7.2) excepto en que la presión es positiva cuando la fuerza está dirigida hacia adentro y el esfuerzo es positivo cuando la fuerza está dirigida hacia afuera. Así el esfuerzo es simplemente la presión negativa: $\sigma = -p$. Sin embargo, el término presión se reserva habitualmente para fluidos, donde la fuerza por unidad de área es la misma en todas las áreas (ley de Pascal). El término esfuerzo se reserva para sólidos, donde la fuerza por unidad de área puede ser diferente en áreas diferentes. Por ejemplo, la fuerza por unidad de área en el sólido de la Fig. 10.6*a* es F_1/A en los extremos del cilindro, pero es cero en la parte lateral del cilindro.

Ejemplo 1. ¿Cuánto se estira un alambre de acero de longitud $L_0 = 0{,}5$ m y diámetro $d = 2 \times 10^{-3}$ m al serle aplicada una tensión de 450 N?
El área de la sección transversal del alambre es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}14 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$$

de modo que el esfuerzo es

$$\sigma = \frac{T}{A} = \frac{450\ \mathrm{N}}{3{,}14 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 143 \times 10^{6}\ \mathrm{N/m}^2$$

En la tabla 10.2 encontramos que el módulo de Young es 200×10^9 $\mathrm{N/m}^2$, luego la deformación es

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1{,}43 \times 10^{8}\ \mathrm{N/m}^2}{2 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m}^2}$$
$$= 0{,}715 \times 10^{-3} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Por lo tanto, la variación en la longitud es

$$\Delta L = \epsilon L_0 = 0{,}715 \times 10^{-3} \times 0{,}5\ \mathrm{m}$$
$$= 0{,}357 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 0{,}357\ \mathrm{mm}$$

La tensión aumenta la longitud del alambre en 0,357 mm. Cuando se suprime la tensión, el alambre vuelve a su longitud primitiva.

La Fig. 10.7 es la representación gráfica del esfuerzo en función de la deformación para un sólido cristalino típico. La Ec. 10.2 solamente es válida para la porción recta de esta curva, donde el esfuerzo es proporcional a la deformación. Los límites σ_p y σ'_p de esta región son distintos para los esfuerzos de tracción y de compresión. Los límites elásticos σ_e y σ'_e son los esfuerzos de tracción y compresión máximos que pueden aplicarse al sólido de modo que vuelva a su tamaño original una vez que haya sido suprimido el esfuerzo. Si el esfuerzo de tracción supera a σ_e o el de compresión supera a σ'_e, el sólido queda permanentemente deformado. Esto quiere decir que no volverá a su estado original cuando cese el esfuerzo. El sólido se rompe cuando el esfuerzo supera a la resistencia a la tracción σ_u o a la resistencia a la compresión σ'_u. La tabla 10.2 da los valores de σ_e, σ_u, y σ'_u para diferentes sólidos.

Si el esfuerzo sobre una barra de sostén de una estructura mecánica supera el límite elástico, la barra queda permanentemente deformada y se modifican sus propiedades físicas. El sólido deformado es en general más débil que el material original. Por ejemplo, una lámina de metal puede ser doblada indefinidamente atrás y adelante siempre que no sea doblada más allá de su límite elástico. Pero una vez que se dobla más allá de este límite, la lámina se rompe con facilidad con unas pocas flexiones más. Por lo tanto, los miembros de una estructura, animada o inanimada, se diseñan de tal manera que los mayores esfuerzos que se les aplican no superen nunca a sus límites elásticos.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el diámetro mínimo de un cable de acero que puede emplearse en una grúa diseñada para levantar un peso máximo de 20 000 lb?

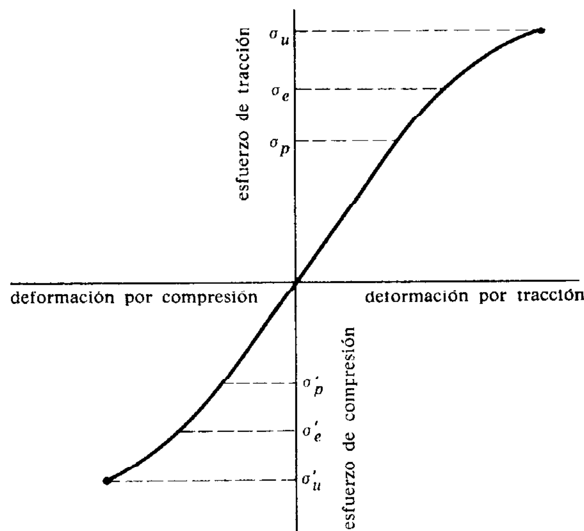


FIGURA 10.7
Curva esfuerzo-deformación típica de un sólido cristalino.

La tensión máxima en el cable será

$$T = 20\,000 \text{ lb} = 8{,}9 \times 10^4 \text{ N}$$

Según la tabla 10.2, el límite elástico del acero es 30×10^7 N/m². Si el esfuerzo no excede de esto, el área de la sección transversal del cable debe ser mayor que

$$A = \frac{T}{\sigma_e} = \frac{8{,}9 \times 10^4 \text{ N}}{30 \times 10^7 \text{ N/m}^2} = 3{,}0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

y el diámetro debe ser mayor que

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 1{,}95 \times 10^{-2} \text{ m} = 1{,}95 \text{ cm}$$

Desde luego el diámetro habría de ser algo mayor a fin de dar un cierto margen de seguridad.

La deformación elástica máxima que puede producirse en un objeto se obtiene aplicando los valores de E y σ_e de la tabla 10.2 en la Ec. 10.2.† El acero, por ejemplo, puede tener una deformación máxima de

$$\epsilon = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{30 \times 10^7 \text{ N/m}^2}{2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2} = 1{,}5 \times 10^{-3}$$

Esto significa que si una barra de acero se estira más de un 0,15 por ciento, se habrá rebasado su límite elástico. Excepción hecha de los elastómeros (Apart. 10.3), la mayoría de los sólidos no pueden ser elásticamente deformados más allá de unos porcentajes reducidos.

OBSERVACION. Una fuerza de contacto (Apart. 2.2) es la fuerza que ejerce un sólido como resultado de su deformación. Dado que el módulo de Young, de la mayoría de los sólidos es muy grande, la fuerza de contacto ejercida por un sólido puede variar dentro de un amplio intervalo sin un cambio perceptible en la forma del sólido. Así, en muchos problemas, tales como los discutidos en los capítulos 2 y 3, puede no tenerse en cuenta la deformación que acompaña a la fuerza de contacto.

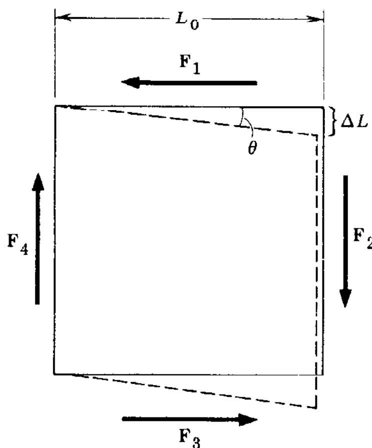


FIGURA 10.8
Una muestra sometida a esfuerzo cortante o cizalladura.

Módulo de rigidez o de torsión

La Fig. 10.8 muestra cuatro fuerzas de igual módulo aplicadas paralelamente a las cuatro caras de un sólido cúbico. Las fuerzas están dispuestas de tal manera que la fuerza total y el momento total sobre el sólido sean cero. Por consiguiente, el sólido está en equilibrio y permanece en reposo. Sin embargo, es deformado ligeramente en la forma que indican las líneas de trazos. El módulo de la deformación viene dado por la *deformación angular* γ, que se define como la tan-

† La ecuación 10.2 no es rigurosamente válida para esfuerzos tan grandes como σ_e (Fig. 10.7). No obstante, la curva esfuerzo-deformación no se desvía mucho de una línea recta en σ_e, de aquí que la Ec. 10.2 sea una buena aproximación para esfuerzos del valor de σ_e.

gente del ángulo θ. En la Fig. 10.8 se observa que esta deformación está relacionada con el tamaño del cubo por

$$\gamma = \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Las fuerzas aplican al sólido un *esfuerzo cortante* o *cizalladura* τ que se define como el módulo de la fuerza paralela sobre una de las caras dividido por el área de la cara:

$$\tau = \frac{F_1}{A}$$

Si el esfuerzo cortante no es demasiado grande, está relacionado con la deformación angular por medio de

$$\tau = G\gamma \qquad 10.3$$

donde G es una constante, llamada *módulo de rigidez o de torsión*, característica del sólido. La tabla 10.3 da los valores de G para varios sólidos. En general, G está comprendida entre 1/2 E y 1/3 E.

OBSERVACIÓN. Recordemos que en un fluido en reposo las fuerzas son siempre perpendiculares a una superficie (Apart. 7.2). Esto quiere decir que un fluido en reposo no puede aguantar un esfuerzo cortante; el módulo de torsión de un fluido es cero. Un fluido comienza a fluir cuando se le aplica un esfuerzo cortante.

TABLA 10.3. **Módulo de rigidez de algunos sólidos.** Los valores recogidos aquí son representativos de cada sustancia: los valores reales para una muestra particular pueden diferir mucho de éstos.

Sustancia	Módulo de torsión G, 10^9 N/m²
Aluminio	25
Cobre	40
Vidrio, cuarzo fundido	30
Hierro	50
Cuarzo	30
Acero	80
Tungsteno	140
Madera	10

Módulo de compresión volumétrico o de elasticidad cúbica

El volumen de un gas disminuye cuando aumenta su presión. En menor grado, el volumen de una sustancia cualquiera —gas, líquido o sólido— disminuye cuando la presión sobre él aumenta. Para someter un sólido a una presión uniforme, el sólido debe sumergirse en un fluido, tal como se indica en la Fig. 10.9. El émbolo aplica una presión al fluido, el cual somete a la muestra a una presión uniforme. (Este modo de disponer las cosas contrasta con el de la Fig. 10.6*b*, donde el esfuerzo se aplica solamente en los extremos de la muestra.) Cuando se aumenta la presión desde p_0 a $p_0 + \Delta p$, el volumen disminuye desde V_0 a $V_0 - \Delta V$.

Definición. El cociente entre Δp y la variación relativa de volumen $\Delta V/V_0$ recibe el nombre de *módulo de compresión volumétrico B*.

$$B = \frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \qquad 10.4$$

El recíproco del módulo de compresión es la *compresibilidad K*,

$$K = \frac{1}{B} = \frac{\Delta V/V_0}{\Delta p}$$

El módulo de compresión para líquidos y sólidos es una constante independiente de la presión, siempre que ésta no sea excepcionalmente grande. Por tanto, la variación de volumen está relacionada con la variación de presión por la expresión

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{B} = K\,\Delta p \qquad 10.5$$

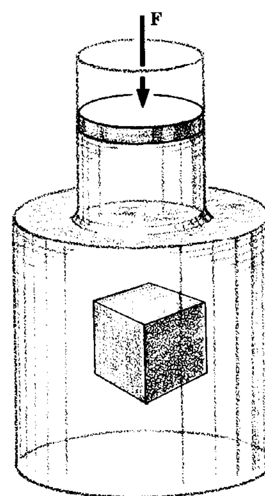


FIGURA 10.9
Una muestra sometida a presión uniforme.

TABLA 10.4. **Módulo de compresión volumétrico de líquidos y sólidos ordinarios.**

Sustancia	Módulo de compresión B, $10^9\ N/m^2$
Líquidos	
Etanol	0,9
Mercurio	25
Agua	2,2
Sólidos	
Aluminio	70
Cobre	120
Vidrio, cuarzo fundido	36
Granito	47
Hierro	80
Mármol	70
Acero	158

La tabla 10.4 da valores de B para varios líquidos y sólidos. En general, el módulo de compresión de un sólido está comprendido entre $1/3\,E$ y E.
Cada módulo es una medida de la resistencia de un sólido a un esfuerzo específico. Existen otros ensayos para medir la resistencia de un sólido a la rotura, rayado, choque y otros tipos de esfuerzo. En los libros que se citan en la bibliografía de este capítulo puede encontrarse información acerca de estos ensayos.

10.3. SÓLIDOS NO CRISTALINOS

Muchos sólidos importantes, tales como el vidrio, el caucho y los huesos, son no cristalinos. Las moléculas de estos sólidos no están dispuestas en una formación regular tridimensional sino dispersas al azar unas con respecto a las otras. En este apartado discutimos algunas de las más importantes clases de sólidos no cristalinos.

Vidrio

El vidrio ordinario es un sólido no cristalino compuesto principalmente de dióxido de silicio, con óxido de bario, monóxido sódico y otros óxidos presentes en cantidades variables. Sin embargo, la palabra «vidrio» se emplea técnicamente para referirse a cualquier óxido inorgánico cuyas moléculas tengan la misma distribución al azar que el vidrio ordinario. Aunque la mayoría de los óxidos se presentan solamente como sólidos cristalinos, unos pocos forman vidrios si son enfriados muy rápidamente cuando están aún fundidos. Por este motivo, los minerales formados a partir de rocas fundidas que se han enfriado lentamente en el interior de la Tierra son siempre cristalinos, mientras que los minerales formados a partir de rocas fundidas que se han enfriado rápidamente en la superficie de la Tierra pueden ser vidrios. La lava de un volcán forma un vidrio (obsidiana) si se enfría muy rápidamente.
La principal característica del vidrio, como mencionamos en el apartado 10.1, es su falta de un punto de fusión definido. Cuando se eleva la temperatura del vidrio, se van soltando moléculas unas de otras y la sustancia se hace cada vez más fluida. A temperatura suficientemente elevada la sustancia se comporta como un líquido ordinario. Para fines prácticos se da a menudo, en lugar de un punto de fusión, una temperatura de transición del vidrio. Ésta es la temperatura a la cual la sustancia se encuentra a medio camino entre ser completamente rígida o completamente fluida. La temperatura de transición del vidrio ordinario es de unos 650° C.

Elastómeros

Los elastómeros son sustancias, como el caucho, que pueden ser estiradas elásticamente hasta el doble o más de su longitud original. Un elastómero está compuesto de moléculas largas que están dispuestas al azar y débilmente enlazadas unas con otras. Estas moléculas están normalmente enrolladas, pero cuando se aplica a un elastómero una

tracción, las moléculas se desenrollan y esto hace aumentar enormemente la longitud de la sustancia. Cuando se suprime la tensión, las moléculas vuelven a su configuración original y la sustancia recobra su forma primitiva.

La elasticidad del tejido conjuntivo blando del cuerpo es debida a la presencia de fibras elastoméricas en el tejido. Estas fibras, que están compuestas de la proteína *elastina*, tienen unos 10^{-5} m de diámetro y llenan el espacio que queda entre las células, junto con otras fibras (compuestas de colágeno) que dan al tejido su resistencia. La Fig. 10.10 representa la curva esfuerzo-deformación del tejido elástico de la aorta, la cual es semejante a la curva de un elastómero puro como el caucho. La curva no presenta una porción recta y no se cumple, por consiguiente, la Ec. 10.2 ni siquiera para esfuerzos pequeños. El límite elástico σ_e, es el 95 por ciento de la resistencia a la tracción σ_u. Esto quiere decir que el tejido puede estirarse hasta el límite de rotura sin producir deformación permanente. (Obsérvese que una deformación de 1,0 duplica la longitud del tejido.)

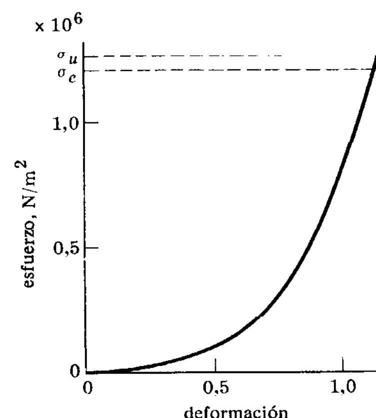


FIGURA 10.10
Curva esfuerzo-deformación del tejido elástico de la aorta. Ésta es la curva esfuerzo-deformación típica de un elastómero.

Geles

Una mezcla ordinaria de sólido y líquido consta de partículas del sólido dispersas por todo el líquido. Las partículas se depositarán abandonando el líquido en un tiempo que dependerá de su tamaño; las partículas grandes, como la arena, se depositarán rápidamente mientras que las pequeñas lo harán lentamente. Las partículas *coloidales* son tan pequeñas (menores que 10 µm) que permanecen suspendidas en el líquido indefinidamente. Un *sol* es una mezcla de partículas coloidales en un líquido. No es una disolución porque cada partícula contiene aún miles de millones de moléculas, pero no es tampoco una mezcla ordinaria porque las partículas están permanentemente suspendidas en el líquido. El almidón para la ropa mezclado con agua es un sol familiar.

Un sol es un fluido porque cada partícula está completamente rodeada de líquido. Sin embargo, en ciertas circunstancias las partículas pueden adherirse hasta formar una continua red sólida por toda la cual queda disperso el líquido en forma de gotitas de tamaño coloidal. Esto es un *gel*, el cual es relativamente rígido porque el líquido está rodeado por el sólido. La Fig. 10.11 muestra esquemáticamente la manera cómo un sol, en el que el líquido rodea al sólido, se transforma en un gel, en el que el sólido rodea al líquido. La gelatina, el asfalto y el cemento son ejemplos de geles.

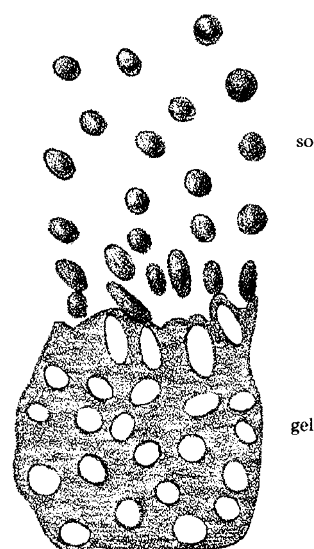


FIGURA 10.11
Un sol, en el que el líquido rodea a las partículas de tamaño coloidal, se transforma en un gel, en el cual el sólido rodea a las gotitas de tamaño coloidal.

Sólidos heterogéneos

La mayoría de los sólidos de interés biológico, como los huesos y cartílagos, son estructuras complejas que se componen de células vivas, nervios y vasos sanguíneos embutidos en un armazón sólido extracelular. Aunque nada se sabe de las propiedades físicas generales de los sólidos biológicos, se han hecho estudios empíricos para determinar propiedades específicas de ciertos materiales. En el apartado siguiente se tratan algunas de estas propiedades.

10.4. MATERIALES BIOLÓGICOS

Los organismos vivos producen una gran variedad de materiales sólidos y semisólidos, tales como huesos, dientes, cuernos, conchas, uñas y cartílagos. La mayor parte de ellos son sustancias heterogéneas complejas. La parte compacta de un hueso, por ejemplo, está constituida por células vivas embutidas en una estructura sólida compuesta en gran parte por una mezcla de fibras de colágeno y cristales de hidroxiapatito. El colágeno es una proteína que se encuentra en todos los tejidos conjuntivos, y el hidroxiapatito es una sal inorgánica compuesta por calcio y fosfato, PO_4. Los cristales de hidroxiapatito, que tienen sólo 3×10^{-8} m de longitud, enlazan las fibras de colágeno.

Las propiedades mecánicas del hueso y de otros materiales biológicos se ensayan con los mismos métodos empleados para los materiales de ingeniería [Yamada (1970)]. La principal dificultad es obtener muestras frescas y preservarlas bastante tiempo para su estudio. La figura 10.12 muestra la curva esfuerzo-deformación para un hueso compacto. Las medidas fueron hechas empleando una pequeña muestra de hueso compacto tomada de un fémur recientemente disecado.

El rasgo más notable de esta curva es la diferencia de pendiente para los esfuerzos de tracción y de compresión. Esto es característico de un sólido heterogéneo, porque los diferentes constituyentes del sólido

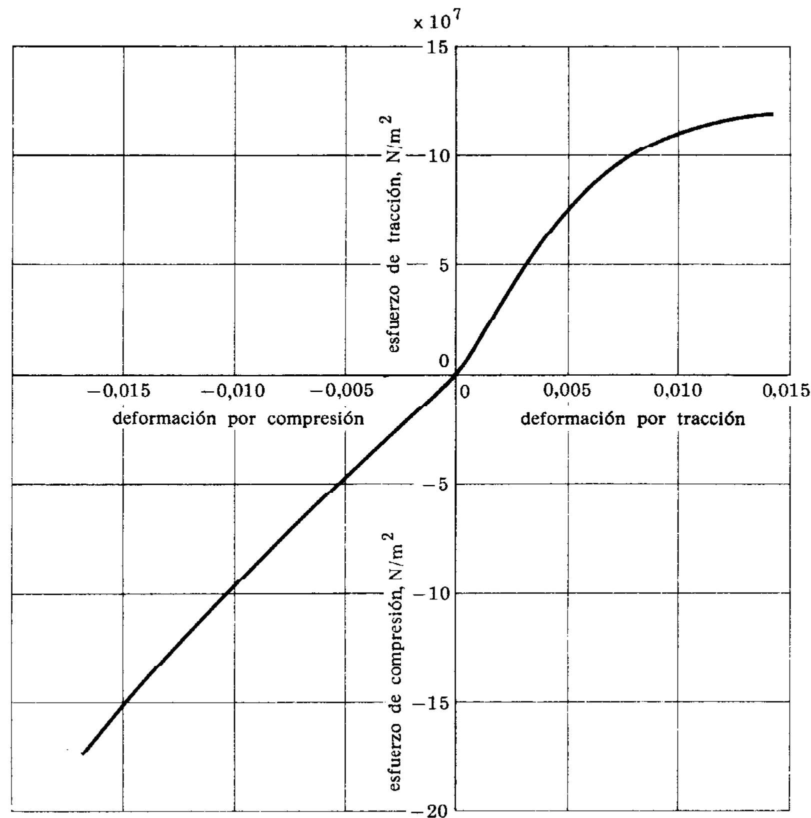


FIGURA 10.12
Curva esfuerzo-deformación de un hueso compacto. El distinto comportamiento del hueso bajo esfuerzos de compresión y de tracción es típico de las sustancias heterogéneas.

poseen propiedades mecánicas distintas. Por ejemplo, en el caso del hueso, la resistencia a la tracción es debida al colágeno y la resistencia a la compresión es debida al hidroxiapatito. En consecuencia, el módulo de Young del hueso y de otras sustancias heterogéneas es distinto para el esfuerzo de tracción que para el de compresión.

La tabla 10.5 da las propiedades de tracción y compresión de algunos materiales biológicos. Se ve en ella que el módulo de Young del hueso humano es casi dos veces mayor para el esfuerzo de tracción que para el de compresión. Esto significa que un esfuerzo de compresión produce una deformación doble que uno de tracción de igual módulo. Las propiedades mecánicas de los huesos de diferentes animales son notablemente similares, teniendo en cuenta lo diferentes que son los animales en otros aspectos.

Comparando las tablas 10.5 y 10.2 se observa que la resistencia a la tracción del hueso es un cuarto de la del acero y que su resistencia a la compresión es casi la del granito. Teniendo en cuenta que el hueso es mucho más ligero que el acero y el granito, se puede equiparar a ellos, y de modo muy favorable, como material estructural.

OBSERVACIÓN. El hueso está construido según el mismo principio que el hormigón armado. El hormigón sólo posee gran resistencia a la compresión, pero carece de resistencia a la tracción. Para darle resistencia a la tracción además de a la compresión se insertan en el hormigón barras de acero. Del mismo modo, la resistencia a la compresión del hidroxiapatito se ve reforzada por la resistencia a la tracción que le proporciona el colágeno.

TABLA 10.5. **Propiedades de tracción y compresión de algunos materiales biológicos.**
La deformación máxima es la deformación precisamente antes de que el material se rompa.

	Tensión			Compresión		
Material	Módulo de Young, 10^9 N/m²	Resistencia a la tracción, 10^7 N/m²	Deformación máxima	Módulo de Young, 10^9 N/m²	Resistencia a la compresión, 10^7 N/m²	Deformación máxima
Hueso, compacto:						
Fémur humano	16,0	12,1	0,014	9,4	16,7	0,0185
Fémur de caballo	23	11,8	0,0075	8,3	14,2	0,024
Fémur de avestruz	12,6	7,0	0,0065	4,8	11,8	0,021
Esponjoso:						
Vértebra humana	0,17	0,12	0,0058	0,088	0,19	0,025
Cartílago, oreja humana		0,30	0,30			
Cáscara de huevo	0,06	0,12	0,20			
Diente, humano:						
Corona					14,6	0,023
Marfil				6,8	18,2	0,042
Uña, pulgar	0,15	1,8	0,16			
Cabello		19,6	0,40			

FUENTE: Datos tomados de Yamada (1970).

Nuestro conocimiento de la resistencia de materiales biológicos es todavía muy incompleto. Se necesita mucha investigación para llegar a conocer las propiedades de los materiales biológicos en función de su estructura y para establecer una relación entre sus propiedades y su función.

PROBLEMAS

1. ¿Cuánta energía se necesita para fundir 50 g de hielo a 0 °C?
Resp. 16,7 kJ.
2. Experimentalmente se halla que se necesitan 32,0 kJ de energía para fundir 500 g de oro en su punto de fusión (1063 °C). ¿Cuál es el calor molar de fusión del oro?
3. La tabla 10.1 da el calor de fusión en kilojoules por mol. Calcular el calor de fusión en joules por gramo del (*a*) agua, (*b*) cloruro sódico, (*c*) cobre y (*d*) tungsteno.
Resp. (*a*) 334 J/g; (*b*) 525 J/g; (*c*) 205 J/g; (*d*) 192 J/g.
4. (*a*) Demostrar que en el punto triple los calores de sublimación, vaporización y fusión están relacionados por

$$H_s = H_v + H_f$$

(*b*) Calcular el calor de sublimación del agua a 0° C a partir de los datos de las tablas 9.1 y 10.1. Comparar con el valor dado en el Apart. 10.1.
5. Un alambre de 13,500 m de largo se estira hasta una longitud de 13,507 m. (*a*) ¿Cuál es la deformación del alambre estirado? (*b*) Si el alambre es de cobre, ¿cuál es el esfuerzo necesario para producir esta deformación? (*c*) Si el área de la sección transversal del alambre es 4×10^{-5} m², ¿cuál es la tensión del alambre estirado?
Resp. (*a*) $5,18 \times 10^{-4}$; (*b*) $6,22 \times 10^{7}$ N/m²; (*c*) 2488 N.
6. Una columna de mármol con una sección transversal de área 25 cm² soporta un peso de 7×10^{4} N. (*a*) ¿Cuál es el esfuerzo en la columna? (*b*) ¿Cuál es la deformación de la columna? (*c*) Si la columna es de 2 m de alta, ¿cuánto ha variado su longitud por el peso que soporta? (*d*) ¿Cuál es el peso máximo que la columna puede soportar?
7. Un alambre de aluminio con una sección transversal de área 7×10^{-5} m² se estira hasta el límite elástico. (*a*) ¿Cuál es la tensión en el alambre? (*b*) ¿Cuál es la deformación del alambre? (*c*) ¿Qué tensión se necesita para romper el alambre? (*d*) ¿Qué tensión se necesita para romper un alambre de aluminio de diámetro doble?
Resp. (*a*) $1,26 \times 10^{4}$ N; (*b*) $2,86 \times 10^{-3}$; (*c*) $1,40 \times 10^{4}$ N; (*d*) $5,6 \times 10^{4}$ N.
8. (*a*) ¿Cuál es el menor diámetro de un alambre de cobre que pueda sostener un peso de 5000 N sin sobrepasar su límite elástico? (*b*) ¿Cuál es el máximo peso que puede soportar sin romperse dicho alambre?
9. Un alambre de oro de 50 cm de longitud y 1 mm de diámetro se alarga 0,2 mm cuando se somete a una tensión de 25 N. ¿Cuál es el módulo de Young del oro?
Resp. 80×10^{10} N/m².
10. La magnitud $l = \sigma_u/\rho g$ se utiliza como una medida de la resistencia a la tracción de un material con respecto a su densidad. Calcular l para el aluminio, un hueso y el acero empleando para ello las tablas 10.2 y 7.2.
11. Calcular las resistencias a la compresión relativas $l' = \sigma'_u/\rho g$ de (*a*) un hueso, (*b*) el vidrio, (*c*) el granito y (*d*) la madera.
Resp. (*a*) $1,1 \times 10^{4}$ m; (b) $4,3 \times 10^{4}$ m; (*c*) $0,76 \times 10^{4}$ m; (*d*) $1,5 \times 10^{4}$ m.
* 12. Demostrar que la magnitud l definida en el Prob. 10 es igual a la longitud máxima del material que puede mantenerse unida bajo su propio peso. Es decir, demostrar que si una longitud del material mayor que l se cuelga de un extremo, se desprenderá bajo la acción de su propio peso.
13. Si el volumen de un bloque de hierro es normalmente 100 cm³, ¿cuál es el volumen cuando el bloque está sometido a una presión uniforme de 10^{8} N/m²?
Resp. 99,875 cm³.
14. Un metro cúbico de agua del mar tiene una masa de 1025 kg a nivel del mar (tabla 7.2). (*a*) ¿Cuál es el volumen ocupado por 1025 kg de agua del mar a una profundidad de 10 000 m? (*b*) ¿Cuál es la densidad del agua del mar a una profundidad de 10 000 m?
15. ¿Cuál es la presión necesaria para hacer disminuir el volumen del vidrio en un 1 por ciento?
Resp. $3,56 \times 10^{4}$ atm.
16. Se ha demostrado por medio de ensayos que la caña del fémur (hueso de la pierna) se rompe bajo una compresión de 5×10^{4} N en el caso del hombre, 4×10^{4} N en el de la mujer y 10×10^{4} N en el del caballo. (*a*) ¿Cuál es el área de la sección transversal efectiva del fémur en los hombres, las mujeres y los caballos? (*b*) Un caballo pesa unas 6 veces lo que un hom-

bre, aunque sus piernas son sólo el doble de fuertes. ¿Por qué?

OBSERVACIÓN. El centro del fémur contiene médula ósea, una sustancia sin resistencia a la compresión, de modo que el área de la sección transversal efectiva es el área total menos el área que contiene la médula. El área efectiva es unas 0,8 veces el área total.

17. El cabello se rompe bajo una tensión de 1,2 N. ¿Cuál es el área de la sección transversal de un cabello?
    Resp. 0,006 mm^2.
18. Hacer un cálculo aproximado de la compresión necesaria para romper la corona de un molar.

BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDER, R. M.: «Animal Mechanics», University of Washington Press, Seattle, 1968. Se aplican los principios de la mecánica a una gran variedad de problemas biológicos. En los capítulos 3 y 4 se discuten las propiedades mecánicas de materiales biológicos.

EVANS, Francis Gaynor: «Stress and Strain in Bones», Charles C. Thomas, Publisher, Springfield, Ill., 1957. Monografía clásica sobre las propiedades mecánicas de los huesos y la relación de los fenómenos de esfuerzo-deformación con las fracturas y la osteogenia.

FRANKEL, Victor H. y Albert H. BURSTEIN: «Orthopaedic Biomechanics», Lea & Febiger, Filadelfia, 1970. Se aplican los conceptos de la ingeniería mecánica al sistema músculos-esqueleto. Descripción detallada de las propiedades viscoelásticas del material biológico.

HAYDEN, H. W., William G. MOFFATT y John WULFF: «The Structure and Properties of Materials», vol. III, «Mechanical Behavior», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965. Descripciones de los ensayos mecánicos utilizados en la medida de las propiedades de los materiales.

MOFFATT, William G., George W. PEARSALL y John WULFF: «The Structure and Properties of Materials», vol. I, «Structure», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1964. Excelente tratamiento de la estructura atómica de los sólidos cristalinos y no cristalinos.

YAMADA, Hiroshi: «Strength of Biological Materials», ed. por F. Gaynor Evans, The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1970. Se trata de los resultados de más de 25 años de investigación llevada a cabo por el profesor Yamada y sus colegas de la Kyoto Prefectural University of Medicine. Se recogen datos de las propiedades mecánicas de los diversos huesos y tejidos del cuerpo. Todos estos datos proceden de ensayos realizados sobre material reciente tomado de cadáveres japoneses. Nada se sabe ahora de diferencias raciales en las propiedades mecánicas de huesos y tejidos, pero es de esperar que el hábito dietético tenga un efecto considerable. Los datos sobre materiales biológicos que aparecen en este capítulo están tomados de este extraordinario libro.

Parte 3: Calor y Termodinamica

CALOR III
Y TERMODINAMICA

Para describir el estado físico *externo* de un objeto o sistema se utilizan en mecánica unas cuantas magnitudes físicas, tales como la masa, la velocidad y la aceleración. Para describir el estado *interno* de un sistema se hace uso en termodinámica de unas cuantas magnitudes físicas, tales como la presión, el volumen y la temperatura. En particular, la termodinámica estudia la energía interna de un sistema y los medios por los que se intercambia energía entre el sistema y su medio ambiente.

Es característico de los organismos vivos y de las máquinas el intercambio continuo de energía con su medio ambiente en el proceso de convertir energía interna en trabajo. El rendimiento de este proceso viene limitado por las leyes fundamentales de la termodinámica, las cuales son aplicables tanto a una ameba o una ballena como a un automóvil o una central nuclear.

Capítulo 11 Calor

Calor y trabajo son los dos modos como la energía es intercambiada entre un sistema y su medio ambiente. Todos los animales realizan trabajo y pierden calor. El trabajo se realiza al nadar, arrastrarse y volar, así como al bombear la sangre a través de los vasos del cuerpo (Apart. 7.5) y al eliminar fluido de la sangre por ósmosis inversa (Apart. 9.4; Prob. 9.26). El calor se pierde a través de la piel y los pulmones por evaporación, conducción y radiación. La conservación de la energía exige que toda esta energía se obtenga a expensas de la energía interna y que, por consiguiente, el animal trate de reponerla continuamente por medio de la comida.

11.1. LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Consideremos una cantidad fija de gas en un cilindro provisto de un émbolo y un termómetro, tal como se muestra en la Fig. 11.1. Desplazando el émbolo y calentando o enfriando el cilindro se puede modificar la presión p, el volumen V y la temperatura T del gas. El *estado termodinámico* del gas queda especificado al dar los valores de las *variables termodinámicas* p, V y T. Cuando se modifican estas variables, cambia el estado del gas.

Un sistema se halla en un estado termodinámico definido sólo si su temperatura y presión tienen el mismo valor en todas sus partes. En el caso del gas del cilindro sabemos por la ley de Pascal (propiedad 2 de los fluidos, Apart. 7.2) que la presión es la misma en todos los puntos del gas si éste se halla en reposo, pero que la presión puede ser diferente de un punto a otro si el gas está en movimiento. Supongamos, por ejemplo, que el volumen del gas se aumenta bruscamente al desplazar el émbolo. El gas se precipitará hacia el nuevo volumen, y durante un tiempo el sistema no estará en *equilibrio mecánico* debido al movimiento turbulento del gas. Del mismo modo, si el gas se calienta por debajo, el sistema no estará en *equilibrio térmico* porque partes diferentes del gas estarán a temperaturas diferentes. Un sistema que se encuentra en equilibrio mecánico y térmico se dice que está en *equilibrio termodinámico;* solamente los sistemas en equilibrio termodinámico se hallan en un estado termodinámico definido. Por tanto, un estado termodinámico es lo mismo que un estado de equilibrio.

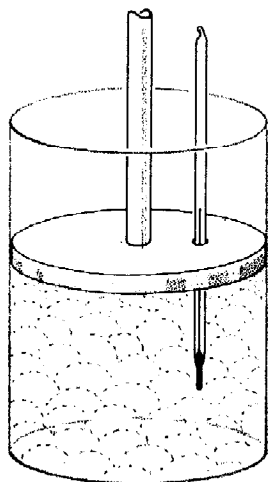


FIGURA 11.1
Una cantidad fija de gas en el interior de un cilindro provisto de un émbolo. Con este dispositivo se pueden hacer variar la temperatura, la presión y el volumen del gas.

La termodinámica considera la relación entre un *sistema* $\mathcal{S}$, tal como el gas en el cilindro de la Fig. 11.1, y el *medio ambiente* $\mathcal{E}$ que le rodea. El medio ambiente es todo lo exterior al sistema que puede afectar a éste, y en la mayoría de los casos incluye sólo el medio inmediato al sistema. El sistema y el medio ambiente juntos constituyen el *universo* $\mathcal{U}$.

La energía $E_{\mathcal{S}}$ del sistema es la suma de las energías cinéticas de las

moléculas del sistema (energía térmica) y de la energía potencial de los átomos en las moléculas (energía química). La energía $E_{\mathcal{S}}$ depende del estado del sistema, y varía cuando el estado se modifica. Sin embargo, la ley de conservación de la energía (Apart. 5.5) establece que la energía E del universo

$$E_{\mathcal{U}} = E_{\mathcal{S}} + E_{\mathcal{E}}$$

no varía. Es decir, si $E_{\mathcal{S}}$ y $E_{\mathcal{E}}$ son las energías del sistema y el medio ambiente cuando el sistema se halla en un estado y $E_{\mathcal{S}}'$ y $E_{\mathcal{E}}'$ son las energías cuando el sistema se halla en otro estado, entonces

$$E'_{\mathcal{S}} + E'_{\mathcal{E}} = E_{\mathcal{S}} + E_{\mathcal{E}}$$

o bien

$$(E'_{\mathcal{S}} - E_{\mathcal{S}}) + (E'_{\mathcal{E}} - E_{\mathcal{E}}) = 0 \qquad 11.1$$

La Ec. 11.1 puede escribirse

$$\Delta E_{\mathcal{S}} + \Delta E_{\mathcal{E}} = 0$$

o

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = -\Delta E_{\mathcal{E}} \qquad 11.2$$

donde, como hicimos antes, empleamos delta como un prefijo que significa «diferencia de» o «variación de». Específicamente, $\Delta E_{\mathcal{S}}$ es la energía del estado final del sistema menos la energía del estado inicial

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = E'_{\mathcal{S}} - E_{\mathcal{S}}$$

y $\Delta E_{\mathcal{E}}$ es la energía final del medio ambiente menos la energía inicial

$$\Delta E_{\mathcal{E}} = E'_{\mathcal{E}} - E_{\mathcal{E}}$$

La Ec. 11.2 es una expresión matemática conveniente de la conservación de la energía. Se utiliza para calcular la variación de energía del sistema cuando se conoce la variación de energía del medio ambiente, y viceversa.

Calor y trabajo

La energía puede ser transferida entre el sistema y el medio ambiente de dos formas esencialmente distintas.

Definición. *Calor* es la energía que fluye de un objeto a otro como resultado del movimiento al azar de las moléculas de los objetos. Las moléculas de un objeto con una temperatura T_1 tienen, por término medio, mayor energía cinética que las moléculas de un objeto con una temperatura inferior T_2. Si estos dos objetos están en contacto, sus moléculas chocan unas con otras allí donde los objetos se tocan. En cada colisión, la molécula más energética del objeto más caliente pierde energía, mientras que gana energía la molécula menos energética del objeto más frío. Por medio de una sucesión de miles de millones de colisiones como ésta, la energía es transferida desde el objeto más caliente hasta el objeto más frío. También puede transferirse energía desde el objeto más caliente al más frío por radiación, sin que los objetos estén en contacto (Apart. 11.4).

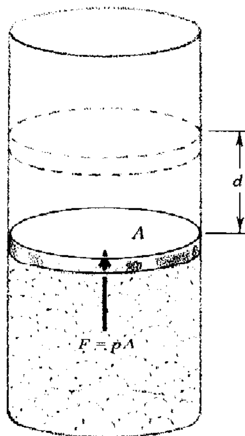


FIGURA 11.2
La expansión de un gas realiza trabajo.

Definición. *Trabajo* es la energía que se transfiere desde un objeto a otro como resultado de un cambio de volumen.

Por ejemplo, la expansión del gas de la Fig. 11.2 realiza trabajo al desplazar el émbolo. El gas ejerce sobre el émbolo una fuerza $F = pA$, donde p es la presión del gas y A es el área de la sección transversal del émbolo. Por lo tanto, si el émbolo se desplaza una distancia d, el trabajo realizado es

$$W = Fd = pAd = p\,\Delta V \qquad 11.3$$

donde

$$\Delta V = V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}} = Ad$$

es el cambio de volumen del gas.† El trabajo W es producido a expensas de la energía del sistema y contribuye a incrementar la energía del medio ambiente. Así, realizando trabajo, se transfiere energía desde el sistema al medio. Del mismo modo, si se comprime el gas, se realiza trabajo sobre el sistema y la energía de éste se ve incrementada a expensas de la energía del medio ambiente.

La *primera ley de la termodinámica*, que es precisamente un enunciado de la conservación de la energía, establece que cuando se introduce una cantidad de calor Q en un sistema, mientras éste realiza el trabajo W, la variación de energía del sistema es

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = Q - W \qquad \text{primera ley} \qquad 11.4$$

Es decir, la variación de energía es igual al calor que entra en el sistema menos el trabajo realizado por éste. Cuando sale calor del sistema, Q es negativo, y cuando el trabájo es realizado sobre el sistema, W es negativo.

11.2. CALOR ESPECÍFICO

Cuando se añade energía a un sistema, la temperatura del sistema aumenta. Para un incremento de energía dado $\Delta E_{\mathcal{S}}$, la variación de temperatura ΔT depende de si la presión o el volumen del sistema se mantienen constantes durante el proceso. En un proceso isócoro (a volumen constante) no se realiza trabajo ($W = 0$), de modo que Q es igual a $\Delta E_{\mathcal{S}}$. La variación de temperatura está relacionada con $\Delta E_{\mathcal{S}}$ por

$$Q = \Delta E_{\mathcal{S}} = C_v\,\Delta T \qquad 11.5$$

donde C_v es la *capacidad calorífica* del sistema a volumen constante. El *calor específico* c_v de una sustancia es su capacidad calorífica dividida por su masa:

$$c_v = \frac{C_v}{m} \qquad 11.6$$

† La ecuación 11.3 es exacta si la presión del gas es constante durante la expansión. Si la presión no es constante, esta ecuación es sólo una aproximación, válida para pequeños cambios de volumen.

El calor específico es una propiedad característica de una sustancia. Depende de la temperatura, pero en un reducido intervalo de temperatura se puede tratar como una constante. Combinando las Ecs. 11.5 y 11.6, obtenemos

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = Q = mc_v \, \Delta T \quad \text{isócora} \qquad 11.7$$

La mayor parte de las transformaciones de interés biológico tienen lugar a presión constante más que a volumen constante. En una transformación isobárica (a presión constante), la variación de temperatura está relacionada con $\Delta E_{\mathcal{S}}$ por

$$\Delta E_{\mathcal{S}} + p\,\Delta V = mc_p\,\Delta T \qquad 11.8$$

donde c_p es el calor específico a presión constante. Éste es el calor específico más comúnmente utilizado. La tabla 11.1 da los valores de c_p para algunas sustancias ordinarias. Sus unidades son joules por kilogramo por grado Celsius (J/kg · °C).
De las Ecs. 11.3, 11.4 y 11.8 se desprende que el calor absorbido en una transformación isobárica es

$$Q = \Delta E_{\mathcal{S}} + p\,\Delta V = mc_p\,\Delta T \quad \text{isobárica} \qquad 11.9$$

TABLA 11.1. **Calor específico a presión constante de 1 atm de algunas sustancias.**

Sustancia	Temperatura °C	c_p kcal/kg·°C	c_p J/kg·°C
Gases			
Aire	100	0,240	1000
Dióxido de carbono	15	0,199	833
Oxígeno	15	0,218	913
Nitrógeno	15	0,248	1040
Agua (vapor)	100	0,482	2020
Líquidos			
Etanol	25	0,581	2430
Mercurio	20	0,0332	139
Agua	0	1,0074	4218,1
	15	1,0000	4186,8
	30	0,9988	4180,7
	100	1,0072	4216,0
Sólidos			
Aluminio	20	0,214	899
Latón	20	0,0917	384
Cobre	20	0,0921	386
Vidrio, crown	20	0,161	674
Cuarzo	20	0,117	490
Granito	20	0,192	804
Cuerpo humano (v. medio)	37	0,83	3500
Hierro	20	0,115	481
Agua (hielo)	0	0,492	2060
Madera	20	0,42	1760

OBSERVACIÓN. Cuando un líquido o un sólido se calientan a presión constante, sólo hay un ligero incremento de volumen, de modo que el término $p\Delta V$ de la Ec. 11.9 es muy pequeño. Por consiguiente, existe poca diferencia para un líquido o un sólido entre una transformación a volumen constante y una a presión constante y, a efectos prácticos, c_v es igual a c_p. Un gas, por otro lado, experimenta una considerable expansión cuando se calienta, y c_v es muy distinto de c_p. La razón c_p/c_v de los calores específicos de un gas tiene un valor, que depende del gas, comprendido entre 1,0 y 1,67

Calor específico del agua

Antes de que se estableciera la conservación de la energía, el calor fue definido por la elevación de la temperatura del agua.

Definición. La *kilocaloría* (kcal) es la cantidad de calor que eleva en un grado Celsius la temperatura de un kilogramo de agua.† Esto es, el calor específico del agua (a 15 °C) se define exactamente como una kilocaloría por kilogramo por grado Celsius, y se utiliza entonces la Ec. 11.9 para definir la unidad de calor.

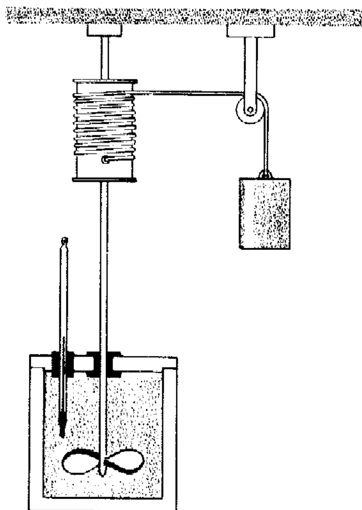


FIGURA 11.3
Experimento de la rueda de paletas de Joule. Al caer el peso gira la rueda de paletas en el agua, convirtiéndose una cantidad conocida de energía mecánica en energía interna y elevándose la temperatura del agua.

En una serie de medidas cuidadosas llevadas a cabo durante la década de los cuarenta del pasado siglo, James Prescott Joule (1818-1889) demostró que puede elevarse la temperatura del agua realizando trabajo y, lo que es más importante, que la misma cantidad de trabajo (por kilogramo de agua) produce siempre la misma elevación de temperatura. La interpretación de este resultado es que calor y trabajo son precisamente formas diferentes de transferir la misma magnitud, la energía.

El más famoso dispositivo de Joule consistía en un peso conectado por medio de una cuerda a una rueda de paletas de tal manera que cuando el peso caía, su energía potencial se convertía en energía cinética de la rueda de paletas (Fig. 11.3). La rueda estaba sumergida en una cubeta aislada llena de agua, de modo que su energía cinética se transformase en energía interna del agua. Un termómetro medía la elevación de la temperatura del agua producida por la caída de una masa conocida a través de una distancia conocida.

El experimento es difícil de hacer correctamente porque incluso para producir una pequeña elevación de temperatura se tiene que gastar una gran cantidad de energía mecánica. Hay que tener mucho cuidado de que no se enfríe el agua mientras se hace el experimento. Para conseguir una elevación de temperatura de 0,30 °C en una cubeta con 6,0 kg de agua, Joule tenía que hacer bajar repetidamente una masa de 25 kg a lo largo de 1,5 m.‡ La energía potencial de la masa antes de que descienda es

$$U = mgh = (25\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}5\ \text{m}) = 367\ \text{J}$$

Cada vez que desciende la masa, toda esta energía se convierte en energía cinética de la rueda de paletas y después se transforma en energía

† Como por medio de medidas cuidadosas se ha demostrado que la cantidad de calor necesaria depende de la temperatura del agua, al definir la caloría se hace constar la temperatura. Por convenio, la caloría utilizada hoy es la caloría 15°, es decir, la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura del agua desde 14,5 a 15,5 °C. En función de esta caloría se necesitan 1,004 cal para elevar la temperatura de un gramo de agua de 4 a 5 °C y 0,998 cal para elevar su temperatura de 30 a 31 °C. Esta pequeña variación con la temperatura puede despreciarse para la mayoría de los fines.

‡ Éstas no son las unidades que utilizara originalmente Joule. Su propio relato del experimento puede encontrase en Shamos (1959).

interna del agua. Joule hizo descender la masa 20 veces para conseguir una elevación de temperatura de 0,30 °C, de modo que se convirtió en energía interna un total de (20)(367 J) = 7340 J.
De acuerdo con la Ec. 11.9 vemos que la cantidad de calor necesaria para elevar 0,30 °C la temperatura de 6 kg de agua es

$$Q = mc_p\Delta T = (6\ \text{kg})(1\ \text{kcal/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(0{,}30\ {}^\circ\text{C}) = 1{,}8\ \text{kcal}$$

Como esta misma elevación de temperatura es producida por 7340 J, estas dos unidades están relacionadas por 7340 J = 1,8 kcal, o sea 1 kcal = 4080 J. Joule repitió el experimento muchas veces bajo condiciones distintas y siempre halló que unos 4080 J de energía mecánica equivalen a 1 kcal de calor al elevar la temperatura del agua. Este factor de conversión recibe el nombre de *equivalente mecánico del calor*. Medidas modernas dan su valor como

$$1\ \text{kcal} = 4186\ \text{J} \qquad 11.10$$

o

$$1\ \text{J} = 2{,}389 \times 10^{-4}\ \text{kcal}$$

Hoy se acepta la kilocaloría como otra unidad de energía, relacionada con el joule por la Ec. 11.10. La tabla 11.1 da los calores específicos de diversas sustancias en joules por kilogramo y por grado Celsius y en kilocalorías por kilogramo y por grado Celsius.
Si aceptamos establecida la conservación de la energía, el experimento de Joule viene a ser una determinación del calor específico del agua en joules por kilogramo y grado Celsius, ya que si un incremento en la energía interna de 7340 J eleva la temperatura de 6 kg de agua 0,30 °C, entonces por la Ec. 11.9 el calor específico del agua es

$$c_p = \frac{\Delta E + p\,\Delta V}{m\,\Delta T} = \frac{7340\ \text{J} + 0}{(6\ \text{kg})(0{,}30\ {}^\circ\text{C})} = 4070\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C}$$

Aquí no se ha tenido en cuenta el pequeño cambio de volumen ΔV del agua.

Calorimetría

El calor transferido a un sistema o desde un sistema se mide en un dispositivo llamado *calorímetro* (Fig. 11.4), el cual consiste en un pequeño recipiente para la muestra sumergido en una gran vasija exterior llena de agua. Esta vasija está fuertemente aislada del exterior para evitar que el calor ambiente llegue al agua, mientras que el recipiente interior está construido de cobre o algún otro material conductor del calor para permitir un fácil intercambio del calor entre él y el agua. El recipiente interior encierra el sistema $\mathcal{S}$ que se ha de medir, y el agua que envuelve al recipiente es el medio ambiente $\mathcal{E}$. Ni el sistema ni el medio realizan trabajo; en consecuencia, la variación de temperatura del medio (agua) se debe precisamente al calor intercambiado entre él y el sistema. Esta variación de temperatura se mide con un termómetro, y el calor intercambiado se calcula a partir de la masa conocida y el calor específico del agua. De acuerdo

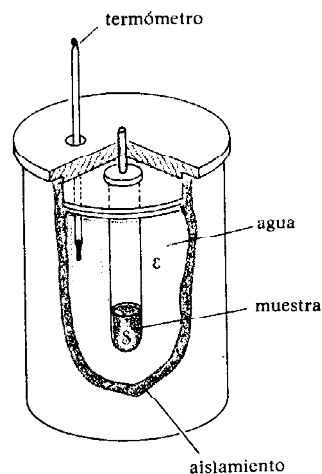


FIGURA 11.4
Calorímetro. El pequeño recipiente de la muestra está sumergido en una gran vasija de agua.

con la conservación de la energía (Ec. 11.2), el calor ganado por el sistema es igual al perdido por el medio ambiente, cambiado de signo, y viceversa. Por lo tanto, el calorímetro mide el calor intercambiado por el sistema bajo condiciones especificadas.

Ejemplo 1. Cincuenta gramos de etanol a una temperatura de 30 °C se colocan en un calorímetro que contiene 2,50 kg de agua a una temperatura inicial de 15 °C. Como el etanol se enfría, la temperatura del agua aumenta hasta que el agua y el etanol alcanzan la misma temperatura, la cual es de 15,17 °C, según se obtiene experimentalmente. ¿Cuál es el calor específico del etanol?
La variación de temperatura del medio (agua) es

$$\Delta T = 15{,}17\ ^\circ\mathrm{C} - 15\ ^\circ\mathrm{C} = 0{,}17\ ^\circ\mathrm{C}$$

y, por tanto, de la Ec. 11.8 y el calor específico del agua (a 15 °C) dado en la tabla 11.1 obtenemos que el calor absorbido por el medio es

$$\begin{aligned} Q &= mc_p\Delta T = (2{,}50\ \mathrm{kg})(4186\ \mathrm{J/kg\cdot{}^\circ C})(0{,}17\ ^\circ\mathrm{C}) \\ &= 1780\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

La variación de temperatura del sistema (alcohol) es

$$\Delta T = 15{,}17\ ^\circ\mathrm{C} - 30\ ^\circ\mathrm{C} = -14{,}83\ ^\circ\mathrm{C}$$

de modo que el calor absorbido por el sistema es

$$\begin{aligned} Q &= mc_p\Delta T = (0{,}050\ \mathrm{kg})(c_p)(-14{,}83\ ^\circ\mathrm{C}) \\ &= (-0{,}74\ \mathrm{kg\cdot{}^\circ C})(c_p) \end{aligned}$$

donde c_p es ahora el calor específico del alcohol. (El signo menos indica que el sistema pierde calor.) Como el calor absorbido por el medio es igual al calor perdido por el sistema, tenemos

$$(0{,}74\ \mathrm{kg\cdot{}^\circ C})(c_p) = 1780\ \mathrm{J}$$

De aquí se obtiene que el valor de c_p es

$$c_p = \frac{1780\ \mathrm{J}}{0{,}74\ \mathrm{kg\cdot{}^\circ C}} = 2400\ \mathrm{J/kg\cdot{}^\circ C} \qquad \Diamond$$

Ejemplo 2. Un mol de hielo (18 g) a 0 °C se pone en un calorímetro que contiene 1,75 kg de agua a una temperatura inicial de 15,3 °C. Cuando se ha fundido todo el hielo, la temperatura del agua es de 14,5 °C. ¿Cuál es el calor de fusión del agua?
La variación de temperatura del agua es $\Delta T = -0{,}80\ ^\circ\mathrm{C}$, de modo que el calor absorbido por el medio es

$$\begin{aligned} Q &= mc_p\Delta T = (1{,}75\ \mathrm{kg})(4187\ \mathrm{J/kg\cdot{}^\circ C})(-0{,}80\ ^\circ\mathrm{C}) \\ &= -5860\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

El signo menos indica que el calor es perdido por el medio y absorbido por el sistema (hielo). Es decir, un mol de agua absorbe unos 6 kJ

de calor cuando pasa de la fase sólida (hielo) a la fase líquida (agua). Éste es el calor de fusión tratado en el Apart. 10.1.
Estos ejemplos muestran cómo se utiliza un calorímetro para determinar las propiedades termodinámicas de las sustancias.

11.3. TRANSMISIÓN DEL CALOR

Calor es energía que fluye desde un objeto a otro como consecuencia de la diferencia de temperatura entre ellos. La dirección natural del flujo espontáneo de calor es siempre desde el objeto de tempratura más alta al objeto de temperatura más baja. Por ejemplo, si un objeto caliente se pone en contacto con un objeto frío, fluirá calor desde el objeto caliente al frío, haciendo que el objeto caliente se enfríe y que el objeto frío se caliente. El proceso inverso, en el que fluye calor desde el objeto frío al caliente, calentándose el objeto más caliente y enfriándose el más frío, no se da nunca por sí mismo. Es decir, para hacer que el calor fluya desde un objeto de temperatura baja a otro de temperatura alta se ha de emplear algún agente exterior, tal como agua en evaporación o un refrigerador. Estas observaciones que conciernen a la dirección del flujo de calor constituyen la base de la *segunda ley de la termodinámica*, la cual se discute con más detalle en el Cap. 12.
El cuerpo humano mantiene una temperatura interna constante de 37 °C. Como ésta es en general superior a la temperatura del medio ambiente, hay un flujo continuo de calor desde el cuerpo al medio. Esta transmisión del calor es absolutamente esencial porque el proceso del metabolismo convierte continuamente energía química en energía térmica interna. La velocidad de generación de la energía interna, o *velocidad metabólica* (Apart. 5.6), es por término medio de 120 watt (W) para un hombre adulto, pero puede ser de 1000 W o más durante períodos de intenso ejercicio. A fin de mantener la temperatura interna a 37 °C, el cuerpo debe eliminar este exceso de energía interna a la misma velocidad con que es generada. Los métodos que emplea el cuerpo para igualar la velocidad de pérdida de calor a la velocidad de generación de la energía interna se discuten en el apartado 11.4.
Existen tres mecanismos básicos por los que el calor fluye espontáneamente desde una región de temperatura alta a otra de temperatura baja: conducción, convección y radiación. Los tres mecanismos se emplean en diversos grados para eliminar el calor del cuerpo. Además el cuerpo hace uso de la evaporación, la cual, a diferencia de los otros mecanismos, es capaz de transmitir calor desde una región de baja temperatura a otra de temperatura más elevada.
En este apartado discutiremos las propiedades de estos mecanismos de transmisión del calor, y los aplicaremos después en el Apart. 11.4 al problema de la transmisión del calor en el cuerpo humano.

Conducción

Conducción es la transmisión de energía a través de un medio material por sucesivos choques de las moléculas próximas. En cada choque, y por término medio, las moléculas rápidas de la región de tem-

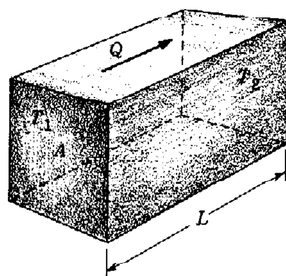


FIGURA 11.5
Bloque de material con caras opuestas mantenidas a temperaturas T_1 y T_2.

peratura elevada del medio transmiten algo de su energía cinética a sus vecinas más lentas de la región de baja temperatura. Estas moléculas vecinas chocan a su vez con moléculas cercanas aún más lentas, a las que transmiten energía. De este modo la energía pasa desde la región de alta a la de baja temperatura mientras las moléculas permanecen cerca de sus posiciones originales.

OBSERVACIÓN. En los metales, que son buenos conductores del calor, la mayor parte de la energía es transmitida por choques entre los electrones libres y las moléculas fijas. Una molécula que vibra alrededor de una posición fija transmite parte de su energía de vibración a un electrón libre, el cual la pasa a su vez a una molécula menos energética. La existencia de electrones libres en los metales aumenta la velocidad a la que puede transmitirse la energía.

La Fig. 11.5 muestra un bloque de material de longitud L y de sección transversal de área A. Si las dos caras del bloque se mantienen a temperaturas T_1 y T_2, fluirá calor desde la cara de temperatura más elevada a la de temperatura más baja.

Definición. La *velocidad de flujo R* es el calor que fluye desde una cara a la otra en la unidad de tiempo. Así, si la cantidad de calor Q fluye en el tiempo t, la velocidad R es

$$R = \frac{Q}{t} \qquad 11.11$$

Las unidades de R son joules por segundo (J/s), o watts (W).

El valor de R es directamente proporcional a la diferencia de temperatura $T = T_1 — T_2$ entre las caras y al área A de la sección transversal del bloque e inversamente proporcional a la longitud L del bloque. Así tenemos

$$R \propto \frac{A\,\Delta T}{L}$$

o

$$R = K\frac{A\,\Delta T}{L} \qquad 11.12$$

donde K es una constante característica del material, denominada *conductividad térmica.* La tabla 11.2 da la conductividad térmica de algunas sustancias comunes.

TABLA 11.2. **Conductividad térmica de algunas sustancias comunes.**

Sustancia	Conductividad térmica, W/m · °C
Plata	430
Cobre	400
Aluminio	240
Hierro	80
Hormigón	1,2
Vidrio	0,80
Agua	0,60
Tejido graso corporal	0,20
Madera, pino	0,12
Material aislante	0,040
Aire	0,025

En la tabla 11.2 se ve que las sustancias difieren mucho en el valor de su conductividad térmica. Las sustancias con conductividades altas, como los metales, reciben el nombre de *conductores*; los materiales con conductividades bajas, como el aire y la madera, se llaman *aisladores.* Sin embargo, incluso el mejor aislador conduce algo el calor, aunque a una velocidad más lenta que un conductor.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la velocidad del flujo de calor a través de un vidrio de ventana de 0,5 cm de espesor cuando la superficie exterior está a —5 °C y la interior a 4 °C? Las dimensiones de la ventana son 0,7 por 1,5 m.

El área de la ventana es $A = (0,7 \text{ m})(1,5 \text{ m}) = 1,05 \text{ m}^2$, y la diferencia de temperatura es $T = 9\,°C$. Según la tabla 11.2, la conductividad térmica del vidrio es $K = 0,80 \text{ W/m} \cdot °C$, y así por la Ec. 11.12 la velocidad del flujo de calor es

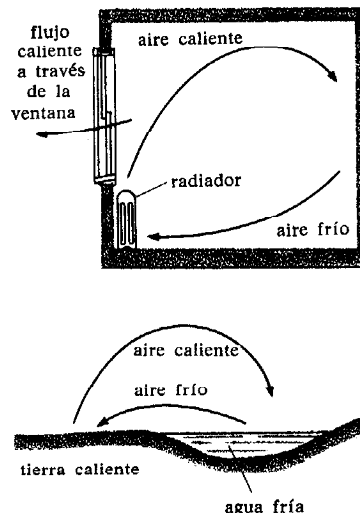
$$R = K\frac{A\,\Delta T}{L} = \frac{(0,8 \text{ W/m}\cdot°C)(1,05 \text{ m}^2)(9\,°C)}{0,5 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1,5 \times 10^3 \text{ W}$$

Convección

Convección es la transmisión de energía en un líquido o gas por la transferencia real de fluido de alta temperatura desde una región de temperatura más elevada a otra de temperatura más baja. El fluido de alta temperatura posee una energía interna mayor que el fluido de baja temperatura al que desplaza, de modo que la energía es transferida a la región de más baja temperatura junto con el fluido.

El ejemplo más familiar de transmisión del calor por convección es la circulación del aire que se establece por la presencia de un radiador doméstico (Fig. 11.6*a*). La temperatura del aire próximo al radiador aumenta por conducción, haciéndolo menos denso que el aire ambiente más frío (ver tabla 7.2). Como consecuencia, este aire más caliente se eleva y es reemplazado por el aire más frío procedente de las proximidades de las ventanas, estableciéndose una circulación del aire que transmite calor desde el radiador a las demás partes de la habitación y, a la larga, al medio exterior, por conducción a través de las ventanas.

Un fenómeno similar tiene lugar en la atmósfera terrestre (Fig. 11.6*b*). En lugares donde la temperatura del suelo aumenta por efecto del Sol, la temperatura del aire cercano al suelo aumenta debido a la conducción. Este aire caliente se eleva después y es reemplazado por aire más frío procedente de una región fría, tal como un lago o el océano, lo cual establece una circulación del aire a gran escala. Los vientos son simplemente corrientes de convección creadas por el calentamiento diferencial de la Tierra por el Sol.



b

FIGURA 11.6
(*a*) La corriente de convección en una habitación calentada por un radiador. (*b*) La corriente de convección en la atmósfera cuando una región de la superficie terrestre está más caliente que otra.

Radiación

Radiación es energía electromagnética que se propaga a través del espacio vacío a la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). La luz es una forma de radiación, pero existen otras, tales como la radiación infrarroja y la ultravioleta, que sólo difieren de la luz por el tamaño de sus longitudes de onda (Apart. 15.1). Todos los objetos emiten radiación: los objetos a temperatura ambiente emiten principalmente radiación infrarroja, en tanto que los objetos a alta temperatura, tales como el filamento de una bombilla, emiten radiación visible así como radiación infrarroja.

La velocidad R_e a la que un objeto de área A y temperatura absoluta T_e emite energía radiante es

$$R_e = \epsilon\sigma A T_e^4 \qquad \text{emisión} \qquad 11.13a$$

donde $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 es una constante universal llamada *constante de Stefan-Boltzmann* y ε es un parámetro sin dimensiones denominado *emisividad*, que varía entre 0 y 1 según la naturaleza de la superficie. El mismo objeto colocado en un recinto con paredes a la temperatura absoluta T_a absorberá radiación de las paredes a la velocidad

$$R_a = \epsilon\sigma A T_a^4 \qquad \text{absorción} \qquad 11.13b$$

Así, si el objeto está más caliente que las paredes del recinto ($T_e > T_a$), habrá un flujo neto de energía desde el objeto a las paredes a la velocidad

$$R = R_e - R_a = \epsilon\sigma A(T_e^4 - T_a^4) \quad \text{pérdida neta} \qquad 11.14$$

Si el objeto está más frío que las paredes ($T_e < T_a$), el objeto ganará energía a la velocidad dada por la Ec. 11.14.

Un objeto con la emisividad máxima de 1 recibe el nombre de *cuerpo negro* porque absorbe toda la radiación que incide sobre él. Un objeto con un valor de la emisividad igual a 0 es un reflector perfecto que no absorbe ninguna radiación incidente. La misma emisividad aparece en las Ecs. 11.13*a* y 11.13*b*, de modo que un material con una buena absorción es también un buen emisor y un material que absorbe mal es un mal emisor.

Sin embargo, se ha de tener cierto cuidado al hacer uso de este hecho, porque la emisividad de una superficie puede variar con la longitud de onda de la radiación. Por ejemplo, la piel negra presenta evidentemente una buena absorción de la luz visible, mientras que la piel blanca no. Pero tanto la piel negra como la blanca absorben de manera casi perfecta (cuerpos negros) en el infrarrojo, con una emisividad de 0,97. Ésta es la emisividad que se ha de usar cuando se considere la energía radiante emitida por la piel. La diferencia entre la piel negra y la blanca sólo es importante cuando se trate de la absorción directa de la luz visible.

Ejemplo 2. La temperatura de la piel de una persona desnuda sentada en una habitación a 22 °C es 28 °C. ¿Cuál es la velocidad neta de pérdida de calor por radiación del cuerpo de la persona si el área de la superficie total del cuerpo es 1,9 m^2?

La emisividad de la piel humana en el infrarrojo es 0,97 de modo que a partir de la Ec. 11.14 tenemos

$$\begin{aligned} R &= \epsilon\sigma A(T_e^4 - T_a^4) \\ &= (0{,}97)(5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4})[(301\ \mathrm{K})^4 - (295\ \mathrm{K})^4] \\ &= 66{,}4\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

que es aproximadamente la mitad de la pérdida media de calor del cuerpo que es de 120 W. Esto demuestra que la radiación es un mecanismo importante en la transmisión del calor a partir del cuerpo.

Evaporación

La evaporación es la transformación de moléculas desde la fase líquida a la fase gaseosa. Sólo se evaporan las moléculas más energéticas, o sea, aquéllas con energía cinética suficiente para vencer la fuerza de cohesión del líquido. La pérdida de estas moléculas de alta energía hace bajar la energía cinética media de las moléculas que permanecen en el líquido, y de aquí que la temperatura del líquido descienda también.

Por ejemplo, un trapo húmedo se puede enfriar por debajo de la temperatura ambiente blandiéndolo en el aire para aumentar la evaporación. Tan pronto como baja su temperatura, comienza a fluir calor por conducción desde el aire al trapo, suministrándose así energía para una nueva evaporación. La temperatura del trapo se estabiliza

allí donde la velocidad del calor ganado por conducción iguala a la velocidad del calor perdido por evaporación.

La cantidad de energía necesaria para evaporar un mol de un líquido se denomina *calor molar de vaporización* H_v (Apart. 9.1). En la tabla 9.1, que da el valor de H_v para algunos líquidos, vemos que el calor molar de vaporización del agua a 37°C es 4,34 kJ. Como 1 mol de agua es 18 g, esto quiere decir que 4,34 kJ/18 g = 241 J/g de energía se lleva cada gramo de agua evaporada.

Ejemplo 3. En ausencia de transpiración perceptible, existe una evaporación insensible del agua por la piel y pulmones del cuerpo humano que asciende a 600 g de agua por día. ¿Cuál es la velocidad de pérdida del calor debido a la evaporación insensible?

La pérdida de calor debida a la evaporación de 600 g de agua es

$$Q = (600\ \text{g})(241\ \text{J/g}) = 1{,}45 \times 10^5\ \text{J}$$

y la velocidad de pérdida del calor es

$$R = \frac{Q}{t} = \frac{1{,}45 \times 10^5\ \text{J}}{(24\ \text{h})(60\ \text{min/h})(60\ \text{s/min})} = 1{,}7\ \text{W}$$

Este valor es solamente algo más del 1 % de la velocidad media de pérdida del calor. Por tanto, la evaporación insensible no es un mecanismo importante en la transmisión del calor del cuerpo, pero durante un trabajo muy duro o en tiempo muy caluroso la evaporación por transpiración perceptible llega a ser el mecanismo principal a través del cual pierde calor el cuerpo.

11.4. REGULACIÓN DE LA TEMPERATURA DEL CUERPO

A fin de mantener la temperatura del cuerpo humano a 37 °C, éste emplea una variedad de mecanismos para igualar la velocidad de pérdida del calor a la velocidad metabólica. Durante el ejercicio físico, por ejemplo, la velocidad de pérdida del calor debe aumentarse para igualar a la velocidad metabólica también incrementada. El cuerpo no tolera ni siquiera una pequeña diferencia entre estas velocidades por mucho tiempo

Ejemplo 1. La velocidad metabólica de una mujer de 50 kg aumenta a 350 W mientras avanza despacio. Si su cuerpo pierde calor a una velocidad de sólo 330 W, ¿cuánto aumentaría su temperatura interna en 1 h?

La velocidad neta de ganancia de calor es 20 W, de modo que el calor que en 1 h entra en el cuerpo es

$$Q = (20\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 7{,}2 \times 10^4\ \text{J}$$

En la tabla 11.1 se encuentra que el calor específico del cuerpo es 3500 J/kg · °C, y así, de acuerdo con la Ec. 11.9, el aumento de temperatura del cuerpo es

$$\Delta T = \frac{Q}{mc_p} = \frac{7{,}2 \times 10^4\ \text{J}}{(50\ \text{kg})(3500\ \text{J/kg} \cdot °\text{C}} = 0{,}41\ °\text{C}$$

Un cambio de temperatura de esta magnitud es suficiente para activar los mecanismos de regulación de la temperatura del cuerpo.

La temperatura del cuerpo es captada y controlada por neuronas especiales en el hipotálamo que responden a la tempertura de la sangre circundante. Esto ha sido demostrado por experimentos que han encontrado que cuando se utilizan electrodos implantados para variar la temperatura del hipotálamo, se activan completamente los mecanismos de regulación de la temperatura del cuerpo, aun cuando la temperatura del resto del cuerpo permanezca invariable. Cuando la temperatura del hipotálamo está por encima de 37 °C se activan los mecanismos de pérdida de calor, tales como la vasodilatación y el sudor, y cuando la temperatura está por debajo de 37 °C se activan los mecanismos de conservación y generación del valor, tales como la vasoconstricción y el temblor.

OBSERVACIÓN. Aunque la temperatura de equilibrio del hipotálamo es normalmente de 37 °C, puede verse aumentada por una variedad de sustancias llamadas *pirógenos*, las cuales son liberadas por las bacterias y tejidos degenerados. Cuando la temperatura de equilibrio está por encima de 37 °C, el cuerpo cree de pronto que está frío incluso a 37 °C, de modo que la vasoconstricción y el sudor se ponen en marcha hasta que el cuerpo alcanza la temperatura de equilibrio más elevada. En ese estado el paciente tiene fiebre pero no siente calor ya que el cuerpo está de nuevo en equilibrio. Sólo cuando la fiebre se corta, es decir, cuando la temperatura de equilibrio vuelve a ser de 37 °C, el cuerpo siente de pronto calor; entonces tienen lugar la vasodilatación y el sudor hasta que la temperatura del cuerpo retorna a 37 °C.

Es conveniente considerar la transmisión del calor procedente del cuerpo como un proceso en dos etapas. La etapa 1 es la conducción del calor desde el interior a la superficie de la piel, y la etapa 2 es la transmisión del calor desde la piel al medio ambiente. La velocidad de transmisión del calor de cada etapa debe ser la misma e igual a la velocidad metabólica.

De acuerdo con la Ec. 11.12 la velocidad de transmisión del calor R_1 de la etapa 1 puede escribirse

$$R_1 = C_1(T_c - T_s) \qquad 11.15$$

donde T_c es la temperatura interna (37 °C), T_s es la temperatura de la piel y $C_1 = KA/L$ es la *conductancia* total de los tejidos situados debajo de la piel. El control principal de la transmisión del calor se hace a través de la conductancia C_1, que el cuerpo puede eficazmente variar por constricción y dilatación (vasoconstricción y vasodilatación) de las arteriolas (pequeñas arterias) que suministran sangre a la rica red de venas y capilares situada justamente debajo de la capa exterior de la piel (epidermis). El flujo de sangre a la piel puede variarse de este modo desde casi cero hasta un 30 % del flujo total del cuerpo.

Cuando el flujo de sangre a la piel es pequeño, el calor debe ser conducido desde el centro del cuerpo a través de la piel y el tejido graso subyacente, que es un buen aislador y equivale a 2 ó 3 mm de aire. Cuando el flujo de sangre a la piel es importante, el calor es transmitido directamente por la sangre a través de la epidermis, que es un mal aislador y equivale a unos 0,2 mm de aire.

La velocidad de conducción de la etapa 1 depende también de la temperatura de la piel T_s. En la Ec. 11.15 vemos que R_1 disminuye cuando T_s aumenta, hasta que R_1 es cero cuando $T_s = T_c$. Si $T_s > T_c$, fluye calor de la piel al cuerpo.

Ejemplo 2. El área de la superficie de una persona es 1,9 m^2, y la temperatura de la piel es 31 °C. ¿Cuáles son las velocidades de transmisión del calor a través de la piel cuando no hay casi flujo de sangre a la piel y cuando hay un flujo de sangre máximo?

Cuando no hay casi flujo de sangre a la piel, la piel y el tejido subyacente tienen un aislamiento equivalente a 3 mm de aire. Según la tabla 11.2 la conductividad del aire es 0,025 W/m · °C, de modo que la conductancia es

$$C_1 = \frac{KA}{L} = \frac{(0{,}025\ \mathrm{W/m \cdot {}^\circ C})(1{,}9\ \mathrm{m^2})}{0{,}003\ \mathrm{m}} = 15{,}8\ \mathrm{W/{}^\circ C}$$

y la velocidad de transmisión del calor es

$$R_1 = C_1(T_c - T_s) = (15{,}8\ \mathrm{W/{}^\circ C})(37\ {}^\circ\mathrm{C} - 31\ {}^\circ\mathrm{C}) = 95\ \mathrm{W}$$

Cuando el flujo de sangre a la piel es máximo, la piel tiene el aislamiento equivalente a 0,2 mm de aire, de manera que la conductancia es

$$C_1 = \frac{(0{,}025\ \mathrm{W/m \cdot {}^\circ C})(1{,}9\ \mathrm{m^2})}{0{,}2 \times 10^{-3}} = 238\ \mathrm{W/{}^\circ C}$$

y la velocidad de transmisión del calor es

$$R_1 = C_1 \quad \Delta T = (238\ \mathrm{W/{}^\circ C})(6\ {}^\circ) = 1430\ \mathrm{W}$$

Estos cálculos muestran que la velocidad de transmisión del calor de la etapa 1 puede variarse por vasoconstricción y vasodilatación dentro del intervalo necesario.

La transmisión del calor de la etapa 2 es normalmente por radiación de la piel y por conducción desde la piel al aire circundante. El ejemplo 2 del Apart. 11.3 mostraba que la radiación da cuenta de alrededor de la mitad de la transmisión del calor en una persona desnuda. Este valor es aproximadamente el mismo para una persona vestida, puesto que la mayor parte de la radiación infrarroja emitida por la piel atraviesa la ropa ordinaria sin ser absorbida. Por esta razón la moderna ropa ártica, que está confeccionada con una delgada capa de oro para reflejar la radiación del cuerpo, es mucho más eficaz para reducir la transmisión del calor que la ropa ordinaria.

La conducción en la etapa 2 se hace a través de una capa de aire llamada *zona íntima*, que es atrapada cerca de la piel por el pelo o la ropa. Como este aire normalmente no se mezcla mucho con el aire circundante, el calor se transmite por él principalmente por conducción. La ropa incrementa el espesor de la zona íntima y hace decrecer, por tanto, la velocidad de conducción del calor. Incluso sin ropa, el vello del cuerpo humano mantiene una zona íntima (en aire inmóvil) de varios milímetros de espesor.

La zona íntima contiene aire caliente que tiende a elevarse, originando así una pequeña transmisión del calor por convección. Sin embargo, la convección se hace mucho más importante cuando hay viento, ya que el aire de la zona íntima es arrancado continuamente. En consecuencia, la velocidad de transmisión del calor aumenta rápidamente

TABLA 11.3. **Temperatura fría del viento.**
Aquí aparece la temperatura del aire inmóvil que da la misma velocidad de transmisión del calor que aire a distintas temperaturas y velocidades del viento.

Temperatura del aire °C	Velocidad del viento, m/s (mi/h)				
	2 (4,5)	**5 (11,2)**	**10 (22,4)**	**15 (33,6)**	**20 (44,7)**
2	1,0	−6,6	−12	−16	−18
0	−1,3	−8,4	−15	−18	−20
−5	−7,0	−15	−22	−26	−29
−10	−12	−21	−29	−34	−36
−20	−23	−34	−44	−50	−52

con la velocidad del viento. Para una temperatura del aire y una velocidad del viento dadas, la *temperatura fría del viento* es la temperatura del aire inmóvil que da la misma velocidad de transmisión del calor. La tabla 11.3 da la temperatura fría del viento para un intervalo de temperaturas del aire y velocidades del viento. Por ejemplo, con una temperatura del aire de 0 °C y una velocidad del viento de 10 m/s (22 mi/h), el cuerpo pierde calor a la misma velocidad que si estuviese en aire inmóvil a —15 °C.

La velocidad de transmisión del calor en la etapa 2 aumenta cuando lo hace la temperatura de la piel T_s, mientras que la velocidad de transmisión en la etapa 1 disminuye. Normalmente T_s se ajusta al valor para el cual son iguales estas velocidades.

Por ejemplo, cuando una persona entra primero en aire frío, la velocidad de transmisión de la etapa 2 aumenta inmediatamente. Esto hace descender la temperatura de la piel, disminuyendo la velocidad de transmisión de la etapa 2 y aumentando la velocidad de transmisión de la etapa 1. Si la velocidad de transmisión de la etapa 1 supera a la velocidad metabólica, la temperatura interna empezará a disminuir. Esto es percibido inmediatamente por el hipotálamo, y se adopta la acción correctiva. La actividad muscular en forma de temblor incrementa el ritmo metabólico mientras que la vasoconstricción disminuye la velocidad de transmisión de la etapa 1 incluso con temperatura de la piel más baja. Pronto se alcanza un equilibrio en el que el ritmo metabólico iguala a la velocidad de transmisión del calor en ambas etapas.

Cuando la temperatura del aire es alta, radiación y conducción no son ya mecanismos suficientes para transmitir calor en la etapa 2. En realidad, cuando la temperatura del aire es superior a 37 °C, estos mecanismos transfieren calor desde el aire a la piel. En esta circunstancia la evaporación del sudor secretado por glándulas especiales en la piel es el único mecanismo para eliminar calor del cuerpo. Una persona habituada al clima tropical puede secretan unos 4 kg de sudor en una hora. Como el calor de vaporización del agua es 241 J/g (Apart. 11.3), la velocidad máxima de transmisión del calor por evaporación es

$$R_{evap} = \frac{(4000 \text{ g})(241 \text{ J/g})}{3600 \text{ s}} = 267 \text{ W}$$

Este valor es suficiente para permitir una actividad normal en un día caluroso, pero una actividad intensa aumentaría la velocidad metabólica por encima de la capacidad del cuerpo para eliminar el calor.

OBSERVACIÓN. El sudor también aparece en tiempo frío cuando una persona muy abrigada se ocupa en una actividad que exige un gran esfuerzo físico. Esto puede ser peligroso porque la humedad moja la ropa y reemplaza el aire aislante de la zona íntima por agua. Como la conductividad del agua es mucho mayor que la del aire, la ropa pierde su propiedad aislante y la persona puede experimentar una excesiva pérdida de calor. Excursionistas inexpertos han muerto en invierno de hipotermia (descenso de la temperatura interna) porque dejaban que su ropa llegase a mojarse. Los excursionistas experimentados sólo llevan en invierno ropa de lana porque la lana conserva algo de aire atrapado incluso cuando está mojada, mientras que otras fibras, en particular el algodón y las sintéticas, no poseen esta propiedad.

PROBLEMAS

1. Hallar la cantidad de calor, en joules y kilocalorías, necesaria para elevar desde 22 hasta 85 °C la temperatura de 650 g de agua.
   Resp. $1,71 \times 10^5$ J, 40,9 kcal.
2. (*a*) ¿Cuánto se eleva la temperatura de 1,25 kg de agua si se le suministran 2×10^5 J de calor? (*b*) ¿Cuánto se eleva la temperatura de 750 g de etanol al añadirle 35 kcal de calor?
3. Una piedra de 0,4 kg cae desde 1200 m en un balde que contiene 2,5 kg de agua. ¿Cuánto se eleva la temperatura del agua?
   Resp. 0,45 °C.
4. En un artículo publicado en 1845, Joule mencionó que la temperatura del agua en el fondo de las cataratas del Niágara es mayor que en la parte alta debido a la conversión de energía mecánica en calor. Suponiendo que las cataratas tienen 50 m de altura, ¿cuál es la elevación de temperatura?
   Resp. 0,12 °C.
5. ¿Cuál es la capacidad calorífica de una olla de aluminio de 350 g?
   Resp. 314 J/°C.
6. ¿Cuánto calor se necesita para elevar en 5 °C la temperatura de 15 kg de granito?
7. Se dispone de 880 J para elevar la temperatura de 350 g de plomo desde 0 a 20 °C. ¿Cuál es el calor específico del plomo?
   Resp. 126 J/kg · °C.
8. ¿Cuál es la capacidad calorífica de un sistema que consta de 7,5 kg de agua en un balde de aluminio de 0,75 kg?
9. Una tetera de aluminio de 400 g contiene 2 kg de agua a 15 °C. ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura del agua (y de la tetera) hasta 100 °C?
   Resp. $7,41 \times 10^5$ J.
10. El recipiente interior de un calorímetro contiene 100 g de triclorometano a 35 °C. El recipiente está rodeado de 1,75 kg de agua a 18 °C. Transcurrido un cierto tiempo el triclorometano y el agua alcanzan la temperatura común de 18,22 °C. ¿Cuál es el calor específico del triclorometano?
11. La evaporación de 50 g de triclorometano (cloroformo), $CHCl_3$, de la vasija interior de un calorímetro hacen bajar la temperatura de los 1,6 kg de agua que rodean la vasija en 1,9 °C. ¿Cuál es el calor de vaporización del triclorometano?
    Resp. 254 kJ/kg.
12. ¿Cuántos grados desciende la temperatura de los 2,3 kg de agua que rodean la vasija interior de un calorímetro, de la que se han evaporado 65 g de cloroetano, C_2H_5Cl?
13. Un clavo de hierro de 20 g está siendo golpeado por un martillo de 0,45 kg (1 lb). La velocidad del martillo cuando choca con el clavo es de 9 m/s. Si la mitad de la energía cinética del martillo se convierte en energía térmica del clavo, ¿cuántas veces debe golpearse para elevar su temperatura 25 °C?
    Resp. 27.
14. La capacidad calorífica molar es la capacidad calorífica de 1 mol de sustancia. Calcular las capacidades caloríficas molares (a presión constante) del dióxido de carbono, CO_2, oxígeno, O_2, y nitrógeno, N_2.

15. Se puede demostrar que la capacidad calorífica molar (a presión constante) de un gas ideal diatómico es 7/2 de R, donde $R = 8{,}32$ J/K es la constante de los gases. Comprobar esto para (*a*) el oxígeno y (*b*) el nitrógeno (ver Prob. 14).
Resp. (*a*) 3,51 *R*; (*b*) 3,50 *R*.

16. La ley de Dulong y Petit dice que las capacidades caloríficas molares de los elementos sólidos son aproximadamente iguales. Comprobar esta ley para el aluminio, cobre y hierro.

OBSERVACIÓN. Esta «ley» era empleada en el siglo XIX para determinar la masa atómica de un elemento a partir de la medida de su calor específico.

17. ¿Cuál es la masa atómica de un elemento cuyo calor específico es 129 J/kg · K? (Ver Prob. 16 y la observación subsiguiente.)
Resp. 194 u, aproximadamente.

*18. Un mol de oxígeno se calienta a una presión constante de 1 atm desde 10 hasta 25 °C. (*a*) ¿Cuánto calor absorbe el gas? (*b*) Utilizando la ley de los gases ideales, calcular la variación de volumen que experimenta el gas en este proceso. (*c*) ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas durante esta expansión? (*d*) Calcular, a partir de la primera ley, la variación de energía del gas en este proceso. (*e*) ¿Cuál es la capacidad calorífica C_v de 1 mol de oxígeno a volumen constante? (*f*) ¿Cuál es la diferencia $C_p - C_v$ entre las capacidades caloríficas molares a presión constante y a volumen constante?

OBSERVACIÓN. Obsérvese que $C_p - C_v$ es igual a la constante *R* de los gases. Se puede demostrar que éste es un resultado general para cualquier gas ideal sin más que repetir el problema anterior empleando símbolos algebraicos en lugar de números.

19. Uno de los extremos de una barra de aluminio se mantiene a 220 °C mientras que el otro se mantiene a 0 °C. La barra tiene 2 m de largo y 1 cm de diámetro. ¿Cuál es la velocidad de conducción del calor a lo largo de la barra?
Resp. 2,07 W.

20. ¿Cuál es la velocidad de transmisión del calor a través de una lámina de 1,2 por 2,4 m y 8 cm de espesor de material aislante cuando una cara está a 22 °C y la otra a 4 °C?

21. El área de la superficie exterior de una casa (paredes y tejado) tiene 280 m², de los cuales 30 m² corresponden a ventanas. Las ventanas tienen un espesor de 0,5 cm, y las paredes y tejado están cubiertas con un material aislante de 8 cm de espesor. Cuando la temperatura exterior es —10 °C, el interior de las ventanas está a 3 °C y el interior de las paredes y techo está a 15 °C. ¿Cuáles son las velocidades de conducción del calor a través de (*a*) las paredes y tejado y (*b*) las ventanas?
Resp. (*a*) 3,12 kW; (b) 62,4 kW.

22. ¿Qué espesor de tejido graso corporal es equivalente en aislamiento a 3 mm de aire?

23. Un radiador con una superficie exterior de 1,5 m² está revestido con pintura de aluminio ($\varepsilon = 0{,}55$). (*a*) ¿A qué velocidad emite radiación el radiador cuando su temperatura es 50 °C? (*b*) ¿A qué velocidad es absorbida la radiación por el radiador cuando las paredes de la habitación están a 22 °C? (*c*) ¿Cuál es la velocidad neta de la radiación procedente del radiador?
Resp. (*a*) 509 W; (*b*) 354 W; (*c*) 155 W.

*24. Demostrar que cuando la diferencia $\Delta T = T_e - T_a$ entre la temperatura T_e de un objeto y la temperatura T_a de las paredes de su recipiente es pequeña comparada con T_a, la velocidad neta de transmisión del calor por radiacion del objeto a las paredes puede escribirse $R = 4\varepsilon\sigma T_a^3 \Delta T$.

OBSERVACIÓN. La *ley de Newton del enfriamiento* establece que la velocidad de pérdida de calor de un objeto es proporcional a la diferencia ΔT entre las temperaturas del objeto y de su medio circundante. La Ec. 11.12 muestra que la conducción es proporcional a ΔT. El Prob. 24 muestra que la radiación es también proporcional a ΔT, siempre que ΔT sea pequeño comparado con la temperatura del medio.

*25. Una esfera de aluminio de 5 cm de diámetro está suspendida por un hilo fino dentro de un tarro en el que se ha hecho el vacío, de modo que sólo puede perder calor por radiación. La temperatura inicial de la esfera es 100 °C, y la pared del tarro está siempre a 22 °C. La emisividad del aluminio es 0,11. (*a*) ¿Cuál es la velocidad neta inicial de pérdida de calor de la esfera? (*b*) A la velocidad del apartado (*a*), ¿cuánto tardará la esfera en pasar de 100° a 90 °C? (*c*) ¿Cuál es la velocidad neta de

pérdida de calor a 90 °C? (*d*) A la velocidad del apartado (*c*), ¿cuánto tardará la esfera en pasar de 90 a 80 °C? (*Sugerencia:* Emplear las tablas 7.2 y 11.1 para calcular la capacidad calorífica de la esfera).
Resp. (*a*) 0,577 W; (*b*) 45,9 min; (*c*) 0,480 W; (*d*) 55,2 min.

26. La temperatura de un filamento de bombilla es 2700 K e irradia energía a la velocidad de 100 W. Si la emisividad del filamento es 0,42, ¿cuál es su área?

27. Durante el ejercicio físico la sangre a 37,0 °C fluye a la piel a la velocidad de 100 g/s. Si la velocidad de transmisión del calor en la etapa 1 es 500 W, ¿cuál es la temperatura de la sangre cuando vuelve al interior del cuerpo, suponiendo que todo el calor transmitido procede de la sangre y que el calor específico de ésta es igual al del agua?
Resp. 35,8 °C.

28. Una persona no habituada al clima tropical puede producir un máximo de 1,5 kg de sudor por hora. ¿Cuál es la velocidad máxima de pérdida de calor por evaporación de esa persona?

BIBLIOGRAFÍA

GUYTON, Arthur C.: «Textbook of Medical Physiology», W. B. Saunders Company, Filadelfia, 1971. En el cap. 71 se discute la regulación de la temperatura.

SHAMOS, Morris H.: «Great Experiments in Physics», Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1959. El Cap. 12 contiene el relato de Joule de su célebre experimento de la rueda de paletas para medir el equivalente mecánico del calor.

Capítulo 12 Termodinámica

La termodinámica es el estudio de la relación entre calor, trabajo y energía y, en particular, de la conversión de energía en trabajo. Aunque el trabajo puede transformarse completamente en energía interna, como en el experimento de la rueda de paletas de Joule (Apart. 11.2), no es posible el proceso inverso, consistente en la transformación completa de energía interna en trabajo. La restricción impuesta a esta transformación por la segunda ley de la termodinámica limita el rendimiento con que la energía puede ser utilizada tanto en la naturaleza como en la tecnología.

12.1. TRANSFORMACIONES TERMODINAMICAS

El estado termodinámico de un sistema está especificado por unas pocas variables termodinámicas, tales como la presión p, el volumen V y la temperatura T. En un gas ideal estas variables están relacionadas por la ecuación de estado (Ec. 8.9)

$$pV = nRT \tag{12.1}$$

donde n es el número de moles del gas y $R = 8{,}314$ J/K es la constante de los gases (Tabla 8.1). En consecuencia, si se dan dos cualesquiera de estas tres variables, la tercera queda determinada. Esto significa que para especificar el estado sólo se necesitan dos variables, ya que la tercera puede obtenerse a partir de la Ec. 12.1. Incluso si el gas no fuese ideal, sólo se necesitan dos variables, porque siempre existe una ecuación de estado que las relaciona. Desde luego, la ecuación de estado de un gas no ideal es más complicada que la Ec. 12.1.

Si escogemos p y V para especificar el estado, éste queda representado por un punto en un diagrama de p en función de V (Fig. 12.1). Por ejemplo, el estado A, con presión p_A y volumen V_A está representado por el punto A de la Fig. 12.1. La temperatura de este estado se determina a partir de la ecuación de estado.

Todos los estados con la misma temperatura se hallan sobre una curva llamada *isoterma.** En la Fig. 12.1 están representadas varias isotermas de diferentes temperaturas; la temperatura de una isoterma particular es mayor que la de todas las isotermas que se encuentran por debajo de ella y menor que la de todas las isotermas que se encuentran por encima de ella. A temperatura elevada, las isotermas son cur-

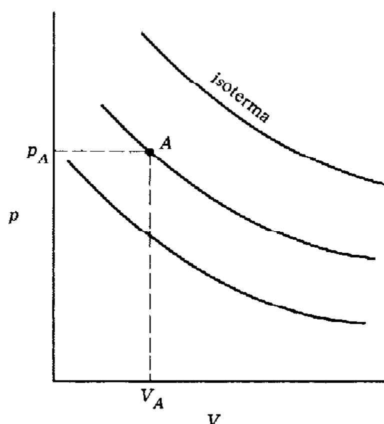


FIGURA 12.1
El estado A de un gas está representado por un punto en un diagrama pV. Las isotermas representan estados de igual temperatura.

* Iso- es un prefijo común que significa igual; así isoterma significa igual temperatura.

vas suaves dadas por la Ec. 12.1, pero a temperatura más baja la forma de la isoterma es más compleja debido a que el gas ya no es ideal. Esto se discute más ampliamente en el Apart. 8.5.

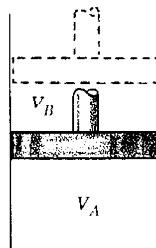


FIGURA 12.2
Un instante después de que se haya variado repentinamente el volumen de un gas, éste puede no estar en equilibrio termodinámico.

Cuando el estado de un sistema es modificado súbitamente, el sistema puede no estar en equilibrio durante un rato. Por ejemplo, cuando el volumen del gas del cilindro de la Fig. 12.2 se aumenta bruscamente desde V_A a V_B desplazando el émbolo, el movimiento del gas cuando se precipita sobre el nuevo volumen hace que la presión varíe en todo el gas. El estado inicial del gas está representado por el punto A en la Fig. 12.3 y transcurrido un cierto tiempo el gas se instala en un nuevo estado de equilibrio representado por el punto B. Sin embargo, durante la transformación desde A hasta B el gas no estuvo en equilibrio; es decir, no estuvo en un estado termodinámico definido. En consecuencia, los estados del gas durante la transformación no pueden ser representados por puntos en un diagrama pV. Transformaciones como éstas, en las que el sistema va de un estado a otro sin pasar por estados intermedios, se llaman *irreversibles* y se indican por líneas de trazos en un diagrama pV (Fig. 12.3).

Por otro lado, el volumen o la temperatura del gas pueden variarse tan lentamente que el gas esté siempre en equilibrio. Entonces, en cada paso de la transformación desde un estado a otro, el sistema se halla en un estado de equilibrio, y el proceso completo puede representarse por una línea continua que enlaza los estados inicial y final y que pasa a través de todos los estados intermedios. Ésta se denomina transformación *reversible* porque el sistema puede llevarse desde el estado final al inicial a través de los mismos estados intermedios. Cada una de las infinitas líneas que pueden trazarse entre dos estados representa una transformación reversible diferente. Ciertos casos de particular importancia reciben nombres especiales.

Definición. Una transformación *adiabática* es aquella en la que no se permite que el calor entre o salga del sistema. Esto se consigue rodeando el cilindro con un material aislante, tal como el amianto o el poliexpan (Fig. 12.4*a*). A partir de la primera ley de la termodinámica, la variación en la energía $\Delta E_{\mathcal{S}}$ de un sistema es

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = Q - W = Q - p\,\Delta V$$

Pero en una transformación adiabática $Q = 0$, de modo que

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = -p\,\Delta V$$

Siempre que un gas se expansiona, ΔV es positivo; por lo tanto en una expansión adiabática $\Delta E_{\mathcal{S}}$ es negativo. Esto significa que la energía, y por lo tanto la temperatura, de un gas disminuye cuando el gas se expansiona adiabáticamente. El sistema sigue la línea de trazo lleno AB de la Fig. 12.3.

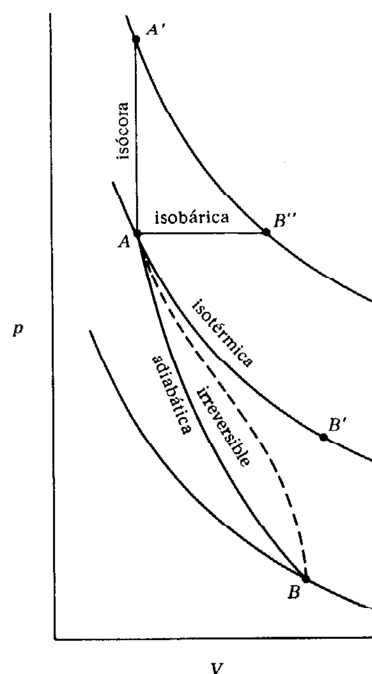


FIGURA 12.3
Un gas inicialmente en el estado A pasa a los estados A', B, B' y B'' por medio de una transformación isócora, adiabática, isotérmica e isobárica, respectivamente. Una transformación irreversible desde A hasta B se indica con una línea de trazos ya que el sistema no pasa por ninguno de los estados intermedios entre A y B.

Definición. Una transformación *isotérmica* es aquella en la que la temperatura se mantiene constante. Esto se lleva a cabo colocando el cilindro en contacto con un gran recipiente de agua que está a la temperatura deseada (Fig. 12.4*b*). El cilindro tiene paredes delgadas hechas de un material conductor del calor, tal como el cobre, de modo que el calor puede fluir en uno u otro sentido entre el recipiente y el

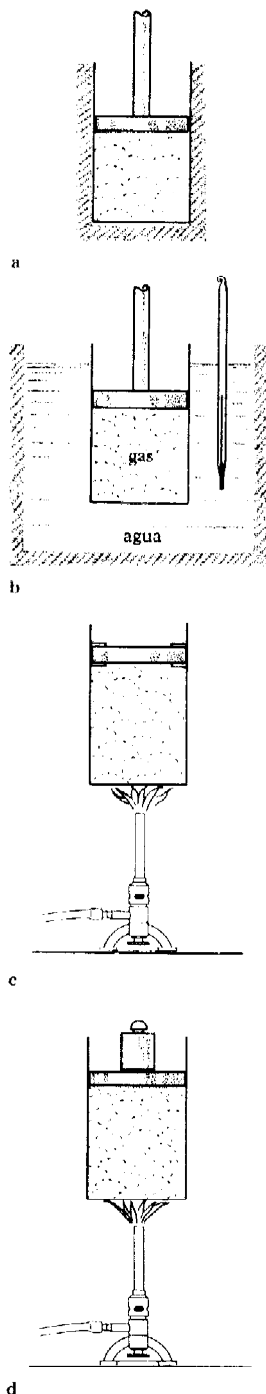


FIGURA 12.4
Diagramas esquemáticos que representan: (*a*) una transformación adiabática, (*b*) una transformación isotérmica, (*c*) una transformación isócora y (*d*) una transformación isobárica.

gas. El recipiente es lo suficientemente grande como para que su propia temperatura no se vea afectada por la cantidad de calor intercambiada con el gas. Durante una expansión isotérmica fluye calor al gas para así mantener constante su temperatura. (Recordemos que la temperatura de un gas disminuye si se impide que el calor fluya a él durante la expansión.) El sistema sigue la isoterma yendo desde el estado inicial A hasta el estado final B' (Fig. 12.3).

Definición. Una transformación *isócora* es aquella en la que el volumen del sistema se mantiene constante. Esto se lleva a cabo fijando el émbolo en una determinada posición. El estado del gas puede modificarse por calentamiento (Fig. 12.4*c*). Como el émbolo se mantiene fijo, el sistema no realiza trabajo durante la transformación. El sistema sigue la línea AA' de la Fig. 12.3.

Definición. Una transformación *isobárica* es aquella en la que la presión del sistema se mantiene fija. Esto se realiza aplicando al émbolo una presión externa constante (Fig. 12.4*d*). El estado del gas se modifica si se le calienta. El sistema sigue la línea AB'' de la Fig. 12.3.

Existen otras innumerables transformaciones en las que nada se mantiene constante, pero para nuestros fines es suficiente considerar solamente estos casos especiales. No hay necesidad de aprender ahora estas transformaciones, pero deberíamos repasar este apartado cada vez que se mencione en este mismo capítulo una determinada transformación.

12.2. LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

Un sistema termodinámico $\mathcal{S}$ y el medio ambiente $\mathcal{E}$ con el que intercambia energía constituye el universo $\mathcal{U}$. La primera ley de la termodinámica (Apart. 11.1) establece que la energía $E_{\mathcal{U}}$ del universo, que es la suma de la energía $E_{\mathcal{S}}$ del sistema y la energía $E_{\mathcal{E}}$ del medio

$$E_{\mathcal{U}} = E_{\mathcal{S}} + E_{\mathcal{E}}$$

se conserva; es decir, en una transformación termodinámica cualquiera

$$\Delta E_{\mathcal{U}} = 0$$

o bien

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = -\Delta E_{\mathcal{E}} \qquad \text{primera ley} \qquad 12.2$$

Por otra parte, como la energía $E_{\mathcal{S}}$ del sistema varía solamente como consecuencia del calor Q que entra en el sistema procedente del medio o del trabajo W realizado por el sistema sobre el medio, la primera ley puede escribirse (Ec. 11.4)

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = Q - W \qquad \text{primera ley} \qquad 12.3$$

Aunque no es posible una transformación que viole la primera ley, muchas transformaciones que no violan la primera ley no tienen lugar. La segunda ley de la termodinámica caracteriza estas transformaciones imposibles.

Un objeto de masa m soltado desde una altura h cae espontáneamente al suelo, en donde queda en reposo. En esta situación, la energía

del universo es la suma de la energía térmica del objeto, la energía térmica del suelo y la energía mecánica precisamente igual a su energía potencial $U = mgh$, y una vez que ha quedado en reposo en el suelo, su energía mecánica es cero. Por lo tanto, la energía mecánica del universo disminuye en este proceso desde mgh hasta cero. Como la energía total del universo no sufre variación (primera ley de la termodinámica), la energía térmica se pone de manifiesto por medio de un ligero aumento en la temperatura del objeto y el suelo.

OBSERVACIÓN. Normalmente una elevación de temperatura como ésta es demasiado pequeña para ser observada, de modo que de la experiencia diaria no resulta evidente la validez de la primera ley. La primera ley sólo se estableció después que el experimento de la rueda de paletas, cuidadosamente realizado por Joule (Apart. 11.2), demostrase que el trabajo es equivalente al calor empleado en elevar la temperatura del agua. Fue éste un resultado inesperado porque chocaba con los conceptos del calor entonces en boga.

La experiencia cotidiana enseña que un objeto inicialmente en reposo sobre el suelo nunca da un salto en el aire de manera espontánea. En principio, semejante suceso parece imposible porque contradice a la primera ley. Si un objeto diese un salto en el aire, es evidente que tendría lugar un incremento en la energía mecánica del universo. Sin embargo, esto no constituiría una violación de la primera ley, si tuviese lugar la correspondiente disminución en la energía térmica del universo. Por lo tanto, la primera ley no da una explicación de por qué los objetos no saltan nunca espontáneamente en el aire.
El proceso «objeto que salta espontáneamente en el aire» es el inverso del proceso «objeto que cae espontáneamente al suelo». Uno de los procesos ocurre con facilidad, mientras que el proceso inverso no ocurre jamás. Existen muchos otros procesos irreversibles que sólo pueden avanzar en una dirección. Por ejemplo, cuando un objeto frío y un objeto caliente se ponen en contacto, siempre fluye calor desde el objeto caliente al frío, y jamás desde el objeto frío al caliente. En consecuencia, la temperatura del objeto caliente disminuye, mientras que la del objeto frío aumenta. Si tuviese lugar el proceso inverso, el objeto frío se enfriaría más y el caliente se calentaría más. Veamos otro ejemplo. Una gota de tinta depositada en un vaso de agua se difunde hasta que queda distribuida por igual en toda el agua. No se da nunca el proceso inverso, en el cual una mezcla uniforme de agua y tinta se separa espontáneamente en agua pura y tinta pura.

Enunciados de Kelvin y de Clausius de la segunda ley de la termodinámica

La segunda ley de la termodinámica prescribe aquellos procesos que no pueden ocurrir espontáneamente. Existen muchos enunciados equivalentes de la segunda ley; en este capítulo sólo tendremos en cuenta algunos de ellos. Comenzamos con el enunciado de la segunda ley debido a Lord Kelvin.

Enunciado de Kelvin de la segunda ley de la termodinámica. *Es imposible construir un dispositivo que pueda, sin ningún otro efecto, levantar un objeto extrayendo energía térmica de otro.* Esta forma de

la segunda ley es la afirmación de que los objetos no pueden saltar espontáneamente en el aire. Pero va aún más lejos al afirmar que, incluso con la ayuda de un mecanismo especial, por complejo que sea, un objeto no puede ser levantado extrayendo únicamente energía térmica. En otras palabras, la energía térmica no puede ser completamente convertida en energía potencial sin ningún otro efecto, es decir, sin que suceda algo más.

Hay otra forma de la segunda ley que se debe a Clausius.

Enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica. *Es imposible construir un dispositivo que pueda, sin ningún otro efecto, transferir calor desde un objeto frío hasta otro más caliente.* Esta forma de la segunda ley es, en esencia, la afirmación de que el calor no puede fluir espontáneamente desde un objeto frío a otro más caliente. Pero va aún más lejos al afirmar que, incluso con la ayuda de un mecanismo especial, por complejo que sea, el calor no puede ser transferido desde un objeto frío a un objeto caliente sin ningún otro efecto.

Los enunciados de Kelvin y Clausius son equivalentes. Esto quiere decir que si fuese posible construir un dispositivo en contradicción con el enunciado de Kelvin, sería posible construir un dispositivo en contradicción con el enunciado de Clausius, y viceversa. Supongamos, por ejemplo, que existiera un dispositivo que pudiese levantar una masa extrayendo únicamente energía térmica del objeto A, en contradicción con el enunciado de Kelvin. Entonces, empleando las conexiones mecánicas adecuadas, podría conseguirse que este dispositivo levantara repetidamente la masa y la dejase caer sobre otro objeto B (Fig. 12.5). Cada vez que la masa fuese levantada, la energía térmica y la temperatura del objeto A disminuiría, y cada vez que la masa cayese, aumentarían la energía térmica y la temperatura del objeto B. En consecuencia, la energía térmica sería transferida desde A, que se iría enfriando, hasta B, que se iría calentando, con la consiguiente violación del enunciado de Clausius. Esto demuestra que un dispositivo que está en contradicción con el enunciado de Kelvin puede ser utilizado para construir un dispositivo que esté en contradicción con el enunciado de Clausius. Lo contrario también es cierto, pero no lo demostraremos aquí.

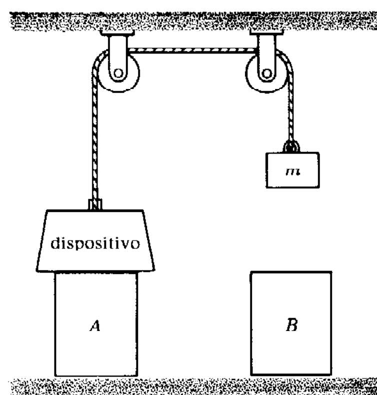


FIGURA 12.5
Dispositivo que contradice el enunciado de Kelvin al levantar una masa m empleando energía térmica extraída de A.

Rendimiento de máquinas

Una aplicación importante de la segunda ley es el cálculo del rendimiento de máquinas. Una máquina es un dispositivo, por ejemplo un motor de gasolina o un músculo, que convierte la energía en trabajo. Consideraremos que todas las máquinas contienen una sustancia que varía su tamaño cuando absorbe energía. En un motor de gasolina, que es un tipo de motor de combustión, la combustión de la gasolina convierte energía química en energía interna obligando al gas a expansionarse en el cilindro del motor. En un músculo, que es un tipo de máquina de conversión directa, la conversión del trifosfato de adenosina (TFA) en difosfato de adenosina (DFA) hace que se contraigan las fibras musculares. Los dos son procesos muy complejos y difíciles de analizar en detalle. Por lo tanto, para entender los principios ter-

modinámicos básicos que intervienen en la conversión de la energía en trabajo, vamos a estudiar un sistema mucho más sencillo.

La máquina más simple consiste en un gas ideal encerrado en un cilindro al que se ha adaptado un émbolo móvil (Fig. 12.2). Al principio el gas se encuentra en el estado A de presión p_A, volumen V_A y temperatura T_1. Para mantener el émbolo en su posición, se debe ejercer sobre él una presión externa p_A. Cuando esta presión externa se disminuye ligeramente, el gas se expansiona y el émbolo se desplaza hacia afuera realizando trabajo. Conectando convenientemente el émbolo a un dispositivo mecánico, se puede conseguir que, en su desplazamiento, el émbolo levante un peso. La variación de la energía potencial del peso es igual al trabajo $W = p_A \Delta V$ realizado por el émbolo.*

Supongamos que se deja que el gas se expansione gradualmente mientras el cilindro está en contacto térmico con un medio a temperatura T_1. Esto quiere decir que la temperatura del gas se mantiene constante durante la expansión absorbiendo calor del medio. Durante la expansión, el estado del sistema se desplaza a lo largo de la isoterma desde el estado A al estado B (Fig. 12.6). De acuerdo con la primera ley (Ec. 12.3), la variación de energía del gas es

$$\Delta E_S = Q_1 - W_1$$

donde Q_1 es el calor extraído del medio y W_1 es el trabajo realizado por el émbolo. Aunque este proceso convierte energía térmica en trabajo, no supone una contradicción de la segunda ley (enunciado de Kelvin) porque ha habido otro efecto: el gas ha pasado del estado A al estado B.

Todas las máquinas reales operan en ciclo, volviendo el sistema reiteradamente a su estado inicial. Para llevar al sistema desde el estado B al estado A, se ha de realizar el trabajo $-W_2$ para comprimir el gas. (El signo menos indica que este trabajo se realiza sobre el sistema.) La Fig. 12.6 muestra un ciclo hipotético en el que el gas se expansiona primero isotérmicamente a lo largo del camino 1 y se comprime después a lo largo del camino 2. Dado que la presión a lo largo del camino 2 es más baja (por término medio) que a lo largo de 1, se necesita menos trabajo para comprimir el gas que el que se obtuvo por expansión. Así la máquina realiza en un ciclo completo una cantidad neta de trabajo

$$W = W_1 - W_2$$

La variación de energía del gas es cero en un ciclo porque el sistema es devuelto a su estado original. Por lo tanto, aplicando la Ec. 12.3 a un ciclo, se obtiene

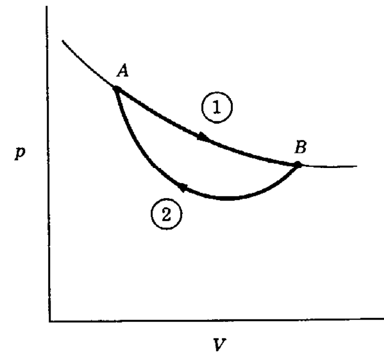


FIGURA 12.6
Ciclo para convertir energía interna en trabajo.

* Esto supone que no existe rozamiento en el sistema. En toda máquina real, se emplea cierto trabajo en vencer el rozamiento, trabajo que no se puede utilizar para levantar un peso externo. Sin embargo, como en principio el rozamiento puede eliminarse por completo, trataremos sólo de máquinas ideales sin rozamiento.

o sea

$$\Delta E_S = 0 = Q - W$$
$$Q = W$$

donde W es el trabajo neto realizado y Q el calor neto absorbido. Si no se hubiese intercambiado calor a lo largo del camino 2, el calor neto Q absorbido en un ciclo sería precisamente el calor Q_1 absorbido a lo largo del camino 1. De este modo, y sin ningún otro efecto, todo el calor absorbido del medio sería convertido en trabajo, en contradicción con la segunda ley. Por lo tanto, parte del calor debe intercambiarse a lo largo del camino 2 y, en realidad, el sistema cede el calor $-Q_2$ al medio. Solamente el calor neto absorbido en un ciclo

$$Q = Q_1 - Q_2$$

es convertido en trabajo, y éste es menor que el calor absorbido a lo largo del camino 1. Consecuencia de la segunda ley es que sólo una fracción del calor absorbido a lo largo del camino 1 puede convertirse en trabajo; el resto es expulsado a lo largo del camino 2 en forma de calor. El rendimiento e de una máquina es el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido:

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad 12.4$$

Ciclo de Carnot

Consideremos el ciclo particular mostrado en la Fig. 12.7. A lo largo del camino 1 el sistema se expansiona, primero isotérmicamente desde A hasta B y a continuación adiabáticamente desde B hasta C, lo cual hace bajar su temperatura. La máquina realiza el trabajo W_1 durante esta primera mitad del ciclo, y durante la porción isotérmica del camino 1 se absorbe el calor Q_1 a la temperatura T_1. A lo largo del camino 2, el sistema es comprimido, primero isotérmicamente desde C hasta D y después adiabáticamente desde D hasta A, lo cual hace subir su temperatura. Durante esta segunda mitad del ciclo se realiza sobre la máquina el trabajo $-W_2$ y durante la porción isotérmica del camino 2 se cede el calor $-Q_2$ a la temperatura T_2. Éste es un *ciclo de Carnot*, y la máquina que funciona siguiendo un ciclo como ése recibe el nombre de máquina de Carnot.

A partir de la segunda ley se pueden probar varios hechos importantes en torno a una máquina de Carnot.

1. Una máquina de Carnot es la de mayor rendimiento que funciona entre dos temperaturas T_1 y T_2.
2. El rendimiento de una máquina de Carnot es independiente de la sustancia activa. Es decir, el rendimiento es el mismo tanto si la sustancia es un gas ideal, un gas real o incluso un líquido.
3. El rendimiento de una máquina de Carnot que funciona entre las temperaturas absolutas T_1 y T_2 es

$$e = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad 12.5$$

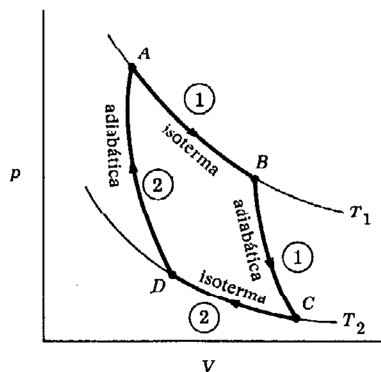


FIGURA 12.7
Ciclo de Carnot.

Por ejemplo, durante la primera mitad de su ciclo, una máquina de vapor utiliza para mover un émbolo vapor que ha sido calentado en

una caldera a una temperatura de 250° C. Durante la segunda mitad del ciclo, el vapor se condensa en agua a una temperatura de 38° C. Así, la máquina funciona entre una temperatura alta $T_1 = 523$ K y una temperatura baja $T_2 = 311$ K. El rendimiento de una máquina de vapor que funciona entre estas temperaturas es

$$e = 1 - \frac{311 \text{ K}}{523 \text{ K}} = 0{,}405$$

Esto significa que por cada 100 J de calor absorbido a T_1, 40,5 J son convertidos en trabajo y 59,5 J son devueltos en forma de calor a la temperatura T_2. El rendimiento de una máquina de vapor ideal es sólo alrededor de 0,32 porque no funciona según un ciclo de Carnot.

OBSERVACIÓN. La ecuación 12.5 sólo es válida cuando T_1 y T_2 son temperaturas absolutas.

Todas las máquinas térmicas solamente convierten en trabajo útil una fracción del calor que absorben; el resto debe ser vertido en el medio ambiente. Los ríos y lagos se utilizan para absorber la enorme cantidad de calor que acompaña a la generación de energía eléctrica.† La polución térmica se origina cuando se vierte en un río calor suficiente para elevar su temperatura de manera significativa. Con nuestra siempre creciente producción de energía eléctrica, se está haciendo cada vez más difícil disponer de calor sin perjuicio ecológico. La conversión directa de la energía en trabajo, como en una batería, es un método de más rendimiento en la producción de energía eléctrica, pero todavía no ha sido logrado empleando combustibles poco costosos.

12.3. FORMULACIÓN ESTADISTICA DE LA SEGUNDA LEY

Aunque la segunda ley se aplica a todos los procesos irreversibles, no son fáciles de aplicar los enunciados de Kelvin o Clausius a procesos que no lleven consigo una transferencia de energía. Por lo tanto, es conveniente introducir un tercer enunciado de la segunda ley.

Enunciado estadístico de la segunda ley de la termodinámica. *El desorden total del universo no disminuye nunca.* El concepto de desorden será aclarado en breve, pero por ahora nos basta con emplear el significado que el sentido común asigna a esa palabra.

Cuando, por ejemplo, se deposita tinta en el agua, aquélla se difunde hasta que queda distribuida por igual en toda el agua. Agua y tinta se hallan en un estado más desordenado cuando están mezcladas que cuando están separadas, ya que sus moléculas están mezcladas al azar en un estado y no en el otro. En consecuencia, el desorden del universo aumenta durante el proceso de difusión. El proceso inverso, en el que una mezcla uniforme de agua y tinta se separa espontáneamente en agua pura y tinta pura, está prohibido por la segunda ley, dado que disminuiría el desorden del universo.

† Las máquinas generadoras de potencia son máquinas de combustión que producen energía eléctrica con un rendimiento típico de las máquinas de combustión en general. La energía potencial eléctrica es equivalente al trabajo desde el punto de vista de la termodinámica porque puede convertirse en trabajo mediante un motor eléctrico con un 100 por ciento de rendimiento.

Veamos ahora otro ejemplo. Consideremos de nuevo un objeto de masa m mantenido a una altura h por encima del suelo. Su energía potencial mgh está distribuida por igual entre todas sus moléculas, puesto que cada molécula tiene la misma energía potencial $m_{mol}gh$, donde m_{mol} es la masa de una sola molécula. Cuando se deja caer el objeto, su energía potencial se convierte finalmente en energía térmica de las moléculas del suelo. Esta energía está distribuida al azar entre las moléculas, porque cada molécula puede tener una energía diferente. En consecuencia, el desorden del universo aumenta cuando la energía potencial se convierte en energía térmica. El proceso inverso, en el que la energía térmica se convierte totalmente en energía potencial, está prohibido por la segunda ley porque disminuiría el desorden del universo. Esto demuestra de qué modo está relacionado el enunciado estadístico de la segunda ley con el enunciado de Kelvin, aunque no demos aquí una demostración completa de su equivalencia.

El concepto de desorden puede hacerse cuantitativo teniendo en cuenta la relación entre un estado termodinámico y un estado molecular del sistema. Un estado molecular *(microestado)* queda especificado dando la posición y la velocidad de cada molécula del sistema, mientras que un estado termodinámico *(macroestado)* queda especificado dando unas pocas propiedades moleculares medias, tales como la temperatura y la presión. Diferentes microestados con las mismas propiedades medias corresponden al mismo macroestado. El número D de microestados distintos correspondientes a un macroestado es el *desorden* del macroestado.

Cuando las moléculas del sistema cambian sus posiciones y velocidades, el sistema pasa de un microestado a otro. El macroestado de equilibrio del sistema es el macroestado de máximo desorden, es decir, el macroestado con el mayor número de microestados. En el equilibrio el sistema no cambia de macroestado, aun cuando sus microestados estén constantemente cambiando, porque casi todos los microestados corresponden al macroestado de equilibrio. Esta discusión abstracta se hará más clara una vez que hayamos visto el ejemplo siguiente.

Se llena una bandeja con 100 fichas de plástico. Cada ficha es blanca por un lado y negra por el otro. Cuando se mira la bandeja desde lejos, las fichas no se ven individualmente. Todo lo que se ve es el color promedio que presenta la bandeja, color que varía entre el blanco puro y el negro puro pasando por cualquier matiz de gris, según el número de fichas que muestran la cara blanca o la cara negra. El color de la bandeja es, por tanto, una propiedad media del sistema, análoga a una variable termodinámica. La *calidad de gris* g, que se define como la fracción de fichas que muestran la cara negra, da una descripción cuantitativa del color. La calidad de gris varía desde 0 (blanco puro) hasta 1 (negro puro). El valor de g especifica el macroestado de la bandeja, lo mismo que los valores de p y T especifican el macroestado de un sistema termodinámico.

Para especificar un microestado de la bandeja hay que dar el color de cada ficha. Por ejemplo, un microestado puede tener la primera ficha por la cara negra, la segunda ficha por la cara blanca, la tercera blanca, la cuarta negra y así sucesivamente. Este microestado se representa mediante la sucesión

nbbn...

Otro microestado puede tener la primera ficha negra, la segunda negra, la tercera blanca, la cuarta blanca y así sucesivamente. Se representa por medio de la sucesión

nnbb...

Como cada ficha puede tener uno de los dos colores (negro o blanco), el número total N de microestados distintos es

$$N = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \cdots = 2^{100}$$

De la definición de logaritmo (Apéndice II) podemos escribir

$$2 = 10^{\log 2} = 10^{0,30}$$

y así

$$N = 2^{100} = (10^{0,30})^{100} = 10^{30}$$

Esto demuestra que incluso un sistema sencillo de unas 100 partículas solamente posee un número inmenso de microestados.

De mayor importancia aún es el número de microestados $D(g)$ que corresponden a un macroestado dado g. El macroestado «todas blancas» ($g = 0$) posee un solo microestado porque cada ficha debe mostrar su cara blanca; de aquí que $D(0) = 1$. El macroestado $g = 0{,}01$ tiene 99 fichas por la cara blanca y una por la cara negra. Como el macroestado es el mismo prescindiendo de cuál de las 100 fichas es negra, existen 100 microestados diferentes correspondientes a $g = 0{,}01$; de aquí que $D(0{,}01) = 100$. El macroestado $g = 0{,}02$ tiene 98 fichas blancas y 2 negras. En este caso existen 4950 microestados diferentes; por lo tanto $D(0{,}02) = 4950$. La Tabla 12.1 da el desorden $D(g)$ de diversos macroestados comprendidos entre 0 y 1. La tabla muestra que $D(g)$ es muy diferente de un macroestado a otro y que es máximo para el estado $g = 0{,}50$, en el que 50 fichas son blancas y 50 negras.

Cuando la bandeja se sacude arriba y abajo, las fichas pasan de un lado a otro al azar. En cada sacudida, la bandeja efectúa una transición aleatoria desde un microestado a otro. Aunque un microestado es tan probable como otro cualquiera, unos macroestados son mucho más probables que otros. La probabilidad $P(g)$ de que la bandeja se encuentre en el macroestado g después de una sacudida cualquiera es igual al número de microestados $D(g)$ correspondientes a g dividido por el número total N de microestados del sistema:

$$P(g) = \frac{D(g)}{N} \qquad 12.6$$

Por ejemplo, de los 10^{30} microestados de la bandeja, solamente uno corresponde a $g = 0$. Por lo tanto la probabilidad de que el macroestado «todas blancas» se presente después de una sacudida cualquiera de la bandeja es

$$P(g) = \frac{D(0)}{N} = \frac{1}{10^{30}} = 10^{-30}$$

Ésta es una probabilidad increíblemente pequeña; la bandeja podría sacudirse mil millones de veces por segundo durante 100 mil millones

TABLA 12.1. Número de microestados $D(g)$ correspondientes a varios macroestados g de una bandeja que contiene 100 fichas blancas y negras.

Macroestado g	Desorden $D(g)$
0,00	1
0,02	$4{,}9 \times 10^3$
0,05	$7{,}5 \times 10^7$
0,10	$1{,}7 \times 10^{13}$
0.20	5.5×10^{20}
0,40	$1{,}4 \times 10^{28}$
0,50	$1{,}0 \times 10^{29}$
0,60	$1{,}4 \times 10^{28}$
0,80	$5{,}5 \times 10^{20}$
0,90	$1{,}7 \times 10^{13}$
0,95	$7{,}5 \times 10^7$
0,98	$4{,}9 \times 10^3$
1,00	1

de años sin que ocurriese el macroestado «todas blancas». Un suceso con una probabilidad de ocurrencia tan baja es, a todos los efectos prácticos, imposible. Esto es, podemos decir con seguridad que el macroestado «todas blancas» no puede producirse sacudiendo la bandeja al azar. No existe ley mecánica que impida que esto ocurra, pero su probabilidad es tan pequeña que puede considerarse nula.

El macroestado de máximo desorden ($g = 0{,}50$) se presenta con la probabilidad máxima:

$$P(0{,}50) = \frac{1{,}0 \times 10^{29}}{10^{30}} = 0{,}10$$

Esto quiere decir que por término medio la bandeja se halla en el estado $g = 0{,}50$ tras una de cada 10 sacudidas de la bandeja. Los macroestados con g próximo a 0,50 también se presentan frecuentemente. De hecho puede demostrarse que el 98 por ciento de todos los microestados de la bandeja corresponden a macroestados comprendidos entre $g = 0{,}40$ y $g = 0{,}60$. Por esta razón, aunque el microestado cambia con cada sacudida de la bandeja, el macroestado está siempre próximo a 0,50.

Si se aumenta el número de fichas de la bandeja, la probabilidad de que ésta se halle en un macroestado distinto de 0,50 disminuye. Por ejemplo, en una bandeja con un millón de fichas, el 99,99 por ciento de los microestados corresponde a macroestados comprendidos entre $g = 0{,}499$ y $g = 0{,}501$. Supongamos que, al principio, estas fichas están todas vueltas del lado blanco, de modo que la bandeja comienza en el estado $g = 0$. Cuando se sacude la bandeja, cambia su microestado al azar y con una aplastante probabilidad efectuará una transición a un microestado correspondiente a un macroestado próximo a $g = 0{,}50$. En consecuencia, con cada sacudida de la bandeja el microestado cambia mientras el macroestado permanece próximo a 0,50.

En un sistema termodinámico, que consta de billones de millones de moléculas, el número de microestados que corresponden a un estado de mayor desorden es abrumadoramente más grande que el número de microestados que corresponden a un macroestado de menor desorden. En consecuencia, el sistema no cambia nunca espontáneamente a un estado de menor desorden. La segunda ley de la termodinámica es esencialmente una ley estadística. No existe ley física que impida a una mezcla uniforme de tinta y agua separarse espontáneamente en tinta pura y agua pura. Sin embargo, existen muchos más modos de disponer moléculas de tinta y agua en una mezcla que por separado, tantos que la probabilidad de que las moléculas de la mezcla estén alguna vez, por pura casualidad, en un microestado del sistema con los componentes separados es esencialmente nula.

OBSERVACIÓN. Es importante darse cuenta que la segunda ley establece que el desorden del *universo* nunca disminuye. El desorden de una parte del universo puede disminuir si tiene lugar un aumento correspondiente en el desorden de otra parte. Sin embargo, tal disminución no es espontánea ya que se produce por interacción con otra parte del universo. Por ejemplo, el calor Q_1 extraído del foco caliente de una máquina de Carnot disminuye el desorden de dicho foco. Pero el calor Q_2 suministrado al foco frío aumenta el desorden de este foco. La segunda ley exige que el incremento de desorden del foco frío sea, por lo menos, tan grande como la disminución de desorden del foco caliente.

A veces se dice que la evolución está en contradicción con la segunda ley porque en el transcurso de centenares de millones de años se han

ido desarrollando formas de vida cada vez más complejas. Las formas más complejas están evidentemente más ordenadas que las menos complejas. De este modo, la evolución, prosigue el argumento, es un proceso en el que la vida avanza desde un estado de menos orden hasta un estado de más orden, en contradicción, por tanto, con la segunda ley. Ciertas personas mantienen todavía que esto demuestra que la vida posee propiedades sin igual que están fuera de las leyes de la física.

Es cierto que la evolución ha producido, en general, formas de orden creciente. Precisamente el desarrollo de un organismo individual, desde el huevo hasta la madurez, es un proceso en el que aumenta el orden. Sin embargo, esto no supone una contradicción de la segunda ley porque la Tierra no es un sistema aislado. La Tierra recibe energía del Sol durante el día y emite energía radiante al espacio exterior durante la noche. Las reacciones de desprendimiento de energía que tienen lugar en el Sol aumentan el desorden de éste. Así, la energía utilizada en la Tierra para producir vida ordenada a partir de materia desordenada se origina a expensas del incremento de desorden del Sol. El desorden total de la Tierra y el Sol *aumenta* de acuerdo con la segunda ley.

La Tierra se puede considerar como una gigantesca máquina térmica. Parte del calor que absorbe del Sol a alta temperatura durante el día es devuelto al espacio exterior a baja temperatura durante la noche. El resto se convierte en trabajo que impulsa los vientos, eleva el vapor de agua hasta las nubes y contrae los músculos.

12.4. ENTROPÍA, ENERGÍA LIBRE Y ENTALPÍA

Entropía

Definición. La *entropía* S es una variable termodinámica que mide el desorden de un estado termodinámico. Esto quiere decir que cada estado tiene una entropía definida y que la entropía de un estado es mayor que la entropía de otro si el desorden del primer estado es mayor que el desorden del segundo. Pero a diferencia del desorden, la entropía de un sistema compuesto es simplemente la suma de las entropías de los subsistemas componentes.† En particular, la entropía S del universo es la suma de las entropías de un sistema y su medio ambiente:

$$S_{\mathcal{U}} = S_{\mathcal{S}} + S_{\mathcal{E}} \qquad 12.7$$

† El desorden D de un sistema compuesto de dos subsistemas es el producto D_1D_2 de los desórdenes de los dos subsistemas. Esto es así porque para cada microestado del subsistema 1, el sistema compuesto posee D_2 microestados. Como el subsistema 1 tiene D_1 microestados diferentes, el sistema compuesto posee un total de D_1D_2 microestados.
La entropía S de un estado es proporcional al logaritmo de su desorden. Por lo tanto las entropías individuales de los subsistemas 1 y 2 son

$$S_1 = k \log D_1 \quad \text{y} \quad S_2 = k \log D_2$$

y la entropía del sistema compuesto es

$$S = k \log D = k \log D_1D_2$$

Sean $S_{\mathcal{S}}$ y $S_{\mathcal{E}}$ las entropías del sistema y el medio cuando el sistema se encuentra en un estado, y sean $S'_{\mathcal{S}}$ y $S'_{\mathcal{E}}$ las entropías una vez que el sistema ha pasado a otro estado. De acuerdo con la forma estadística de la segunda ley, la entropía del universo no disminuye nunca, de manera que $S'_{\mathcal{U}}$ debe ser mayor o igual que $S_{\mathcal{U}}$

$$S'_{\mathcal{U}} \geq S_{\mathcal{U}}$$

A partir de la Ec. 12.7 se obtiene

$$S'_{\mathcal{S}} + S'_{\mathcal{E}} \geq S_{\mathcal{S}} + S_{\mathcal{E}}$$

o bien

$$(S'_{\mathcal{S}} - S_{\mathcal{S}}) + (S'_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}}) \geq 0$$

Utilizando ΔS para representar estos cambios de entropía, podemos escribir la expresión anterior en la forma

$$\Delta S_{\mathcal{U}} = \Delta S_{\mathcal{S}} + \Delta S_{\mathcal{E}} \geq 0$$

o bien

$$\Delta S_{\mathcal{E}} \geq -\Delta S_{\mathcal{S}} \quad \textit{segunda ley} \qquad 12.8$$

Esta última ecuación expresa la segunda ley en una forma análoga a la 12.2 de la primera ley.

En principio, es siempre posible tranformar una sistema desde un estado A a otro estado B sin modificar la entropía del universo ($\Delta S_{\mathcal{U}} = 0$). Tal transformación se dice que es reversible porque el sistema puede pasar de B a A a través de los mismos estados intermedios. Normalmente, sin embargo, $\Delta S_{\mathcal{U}}$ aumenta durante una transformación, de modo que el proceso inverso es imposible. Por ejemplo, $\Delta S_{\mathcal{U}}$ aumenta cuando la tinta se difunde espontáneamente en el agua. Éste es un proceso irreversible:* La separación espontánea de una mezcla de tinta y agua no puede ocurrir jamás.

Las transformaciones se clasifican en irreversibles, reversibles o imposibles, según que $\Delta S_{\mathcal{U}}$ sea mayor, igual o menor que cero:

$\Delta S_{\mathcal{U}} > 0$ irreversible

$\Delta S_{\mathcal{U}} = 0$ reversible

$\Delta S_{\mathcal{U}} < 0$ imposible

Las transformaciones reversibles son procesos idealizados en los que no hay incremento de desorden. Son semejantes a los procesos sin

---

donde k es la constante de proporcionalidad. A partir de las reglas de los logaritmos se obtiene

$$\log D_1 D_2 = \log D_1 + \log D_2$$

y por lo tanto

$$S = k \log D_1 + k \log D_2 = S_1 + S_2$$

La entropía de un sistema compuesto es, pues, igual a la suma de las entropías de sus subsistemas, mientras que el desorden del sistema compuesto es igual al producto de los desórdenes de sus subsistemas.

* La tinta y el agua se pueden mezclar reversiblemente por medio de un émbolo y una membrana semipermeable.

rozamiento de la mecánica, que son procesos idealizados sin disminución de energía mecánica. En un diagrama pV sólo se puede representar por medio de una línea continua una transformación reversible.

La entropía, que es una variable termodinámica como la temperatura y la presión, tiene un valor definido para cada estado del sistema. En consecuencia, la diferencia de entropía ΔS_S entre dos estados de un sistema depende sólo de estos estados y no del proceso particular seguido para llevar al sistema desde un estado a otro. La diferencia de entropía entre estados se puede calcular a partir de las siguientes reglas:

1. En una transformación adiabática reversible la variación de entropía de un sistema es cero

$$\Delta S_S = 0 \qquad \textit{adiabática} \tag{12.9}$$

2. En una transformación isotérmica reversible la variación de entropía de un sistema es

$$\Delta S_S = \frac{Q}{T} \qquad \textit{isotérmica} \tag{12.10}$$

donde Q es el calor absorbido a la temperatura absoluta T. La unidad de entropía es, por tanto, la caloría por kelvin o el joule por kelvin.

OBSERVACION. En la transformación de un sistema desde el estado A al estado B, la variación de entropía del universo ΔS_u depende de la naturaleza de la transformación, mientras que la variación de entropía del sistema ΔS_S depende sólo de los estados A y B. De aquí que transformaciones diferentes entre los dos mismos estados produzcan variaciones de entropía diferentes en el medio. La segunda ley da la relación entre estas variaciones de entropía.

Variación de entropía en el ciclo de Carnot

Calculemos, a modo de ejemplo, la variación de entropía de un sistema que efectúa un ciclo de Carnot (Fig. 12.8). El sistema, que parte del estado A, se transforma isotérmicamente hasta el estado B a la temperatura T_1. Durante la transformación, el sistema absorbe el calor Q_1, de modo que, según la regla 2, la variación de entropía es

$$S_B - S_A = \frac{Q_1}{T_1}$$

A continuación, el sistema se transforma adiabáticamente desde el estado B hasta el estado C y, de acuerdo con la regla 1, la variación de entropía es cero:

$$S_C - S_B = 0$$

Durante la transformación isotérmica desde el estado C al estado D, el sistema pierde el calor $-Q_2$ a la temperatura T_2, y la variación de entropía es

$$S_D - S_C = \frac{-Q_2}{T_2}$$

Por último, el sistema se transforma adiabáticamente desde D hasta A, de modo que de nuevo no hay variación de entropía:

$$S_A - S_D = 0$$

La suma de estas variaciones de entropía es

$$\Delta S_{\mathcal{S}} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

que es la variación de entropía total del sistema en un ciclo. Pero dado que el estado final coincide con el inicial, $\Delta S_{\mathcal{S}}$ es cero. Por consiguiente tenemos

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

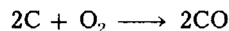
Esta ecuación, junto con la Ec. 12.4 muestra que el rendimiento de una máquina de Carnot es

$$e = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

que es precisamente el resultado dado en la Ec. 12.5.

Energía libre y entalpía

Es conveniente volver a escribir la segunda ley en una forma que contenga sólo variables del sistema. Para concretar consideremos una reacción química, tal como



$$2C + O_2 \longrightarrow 2CO$$

que tiene lugar a temperatura y presión constantes. Por cada mol de O_2 consumido se producen 2 moles de CO. Por lo tanto, para que T y p permanezcan constantes, el volumen del sistema debe aumentar durante la reacción, y de este modo el sistema debe realizar el trabajo $p\Delta V$.

La energía química del monóxido de carbono, CO, es menor que la del carbono y el oxígeno por separado: es decir, la variación de energía $\Delta E_{\mathcal{S}}$ en esta reacción es negativa. Por la primera ley

$$\Delta E_{\mathcal{S}} = Q - W$$

donde W es el trabajo total realizado por el sistema y Q es el calor absorbido por el sistema. En este caso Q es negativo porque el sistema cede calor al medio. El medio absorbe el calor

$$Q_{\mathcal{E}} = -Q = -(\Delta E_{\mathcal{S}} + W)$$

de modo que, de acuerdo con la Ec. 12.10, el cambio de entropía del medio es

$$\Delta S_{\mathcal{E}} = \frac{Q_{\mathcal{E}}}{T} = \frac{-(\Delta E_{\mathcal{S}} + p\,\Delta V)}{T}$$

La segunda ley (Ec. 12.8) puede, por tanto, escribirse

$$\Delta S_{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta E_{\mathcal{S}} + p\,\Delta V}{T} \geq -\Delta S_{\mathcal{S}}$$

o bien

$$\Delta E_{\mathcal{S}} + p\,\Delta V - T\,\Delta S_{\mathcal{S}} \leq 0 \qquad \textit{segunda ley} \qquad 12.11$$

Esta forma de la segunda ley sólo contiene variables del sistema. En lo sucesivo trataremos exclusivamente con variables termodinámicas del sistema y por lo tanto dejaremos de utilizar el subíndice $\mathcal{S}$.

Definición. La *energía libre de Gibbs* G se define como

$$G = E + pV - TS$$

Es otra variable termodinámica que sólo depende del estado del sistema. En una reacción química a temperatura y presión constantes, la energía libre varía hasta

$$G' = E' + pV' - TS'$$

Por lo tanto, la variación de energía libre es

$$\begin{aligned} \Delta G &= G' - G \\ &= (E' + pV' - TS') - (E + pV - TS) \\ &= (E' - E) + p(V' - V) - T(S' - S) \\ &= \Delta E + p\,\Delta V - T\,\Delta S \end{aligned} \qquad 12.12$$

que es idéntica al primer miembro de la Ec. 12.11 De aquí que en una reacción isotérmica e isobárica, la energía libre del sistema jamás aumenta

$$\Delta G \leq 0$$

Definición. La *entalpia* H se define como

$$H = E + pV$$

Es otra variable termodinámica útil. La variación de entalpía en una transformación isobárica es

$$\Delta H = \Delta E + p\,\Delta V \qquad 12.13$$

De la primera ley, $\Delta E = Q - W$, luego

$$\Delta H = Q - (W - p\,\Delta V) = Q - W_0 \qquad 12.14$$

donde $W_0 = W - p\Delta V$ es el trabajo, distinto del trabajo $p\Delta V$, realizado por el sistema. De este modo cuando W_0 es nulo, la variación de entalpía es igual al calor absorbido (o perdido si ΔH es negativo) por el sistema en una transformación isobárica.

La diferencia de entalpía entre dos estados, lo mismo que la diferencia de entropía, depende sólo de los estados y no de la transformación utilizada para llevar al sistema desde un estado a otro. En algunas transformaciones entre dos estados, W_0 es cero y el calor absorbido es igual a ΔH. En otras transformaciones entre los mismos estados, W_0 no es cero y Q no es igual a ΔH. El calor máximo absorbido es igual a $T\Delta S$, el calor absorbido en una transformación isotérmica reversible (Ec. 12.10). Se absorbe menos calor si la transformación es irreversible, de aquí que en general

$$Q \leq T\,\Delta S$$

Esta expresión, junto con la Ec. 12.14 , nos da la desigualdad

$$W_0 = Q - \Delta H \leq T\,\Delta S - \Delta H$$

Pero de las Ecs. 12.12 y 12.13 tenemos

$$\Delta G = \Delta H - T\,\Delta S \qquad 12.15$$

y por tanto

$$W_0 \leq -\Delta G$$

En otras palabras, $-\Delta G$ es el trabajo máximo (otro que el $p\Delta V$) que puede obtenerse de una transformación particular. Éste podría ser el trabajo generado por una batería o por la contracción de un músculo.

Reacciones bioquímicas

La energía libre es importante en el estudio de las reacciones bioquímicas. Por ejemplo, la oxidación de la glucosa



$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 6H_2O$$

es la fuente primaria de energía en los animales. Las variaciones de energía libre y de entalpía producidas por la oxidación de 1 mol de glucosa son

$$\Delta H = -2820 \text{ kJ} \qquad \text{y} \qquad \Delta G = -2870 \text{ kJ}$$

La variación de entalpía, llamada también *calor de combustión*, es en este caso igual a la variación de energía E porque no hay cambio de volumen en esta reacción. El trabajo máximo que se puede obtener de esta reacción es $-\Delta G = 2870$ kJ, el cual es mayor que la energía desprendida. Esto es debido a que la variación de entropía es positiva, y entonces, además de la energía desprendida por la reacción, se puede absorber energía del medio.

Desgraciadamente, no se conoce hasta ahora un mecanismo real capaz de convertir directamente en trabajo este $-\Delta G$. Se puede obtener tra-

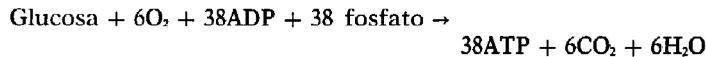
bajo de manera indirecta quemando la glucosa y utilizando el calor desprendido para mover una máquina térmica. El trabajo obtenido por este procedimiento es $W = e(-\Delta H)$, donde e es el rendimiento de la máquina.

La glucosa en los animales se descompone por medio de una serie compleja de reacciones bioquímicas, que incluye el ciclo del ácido tricarboxílico (ciclo de Krebs). Por cada mol de glucosa metabolizada se forman 38 moles de ATP a partir del ADP, según la reacción



$$\text{ADP} + \text{fosfato} \rightarrow \text{ATP}$$

La variación de energía libre de esta reacción es +33 kJ por mol de ATP formado. Por lo tanto, en la reacción total



$$\text{Glucosa} + 6O_2 + 38\text{ADP} + 38 \text{ fosfato} \rightarrow 38\text{ATP} + 6CO_2 + 6H_2O$$

la variación de energía libre es

$$\Delta G = -2870 \text{ kJ} + (38)(33 \text{ kJ}) = -1600 \text{ kJ}$$

Puesto que no hay trabajo durante el metabolismo de la glucosa esta energía libre es energía perdida, en el sentido de que ya no es utilizable para realizar trabajo.

Existen todavía (38)(33 kJ) = 1250 kJ de energía libre utilizable procedentes de la reacción



$$\text{ATP} \rightarrow \text{ADP} + \text{fosfato}$$

Ésta es la principal fuente de energía libre productora de trabajo en los animales. Esta reacción produce, por ejemplo, contracción muscular con un rendimiento de alrededor del 0,50. Es decir, las 1250 kJ utilizables para producir trabajo dan lugar a unos 625 kJ de trabajo útil. El resto se pierde en forma de calor. Con la glucosa a modo de combustible, el rendimiento del músculo considerado como una máquina es

$$e = \frac{W}{Q} = \frac{W}{-\Delta H} = \frac{625 \text{ kJ}}{2820 \text{ kJ}} = 0{,}22$$

La energía libre de Gibbs es de gran importancia en el estudio de las reacciones bioquímicas porque se puede utilizar para determinar la constante de equilibrio de las reacciones químicas y ver de este modo si son posibles los diferentes caminos metabólicos.

PROBLEMAS

1. Durante una transformación un sistema realiza 700 J de trabajo y absorbe 1200 J de calor. ¿Cuál es la variación de energía E del sistema?
   Resp. 500 J.
2. Durante una transformación adiabática la variación de energía ΔE_S de un sistema es —550 J. ¿Cuánto trabajo realiza el sistema durante la transformación?
3. Durante una transformación isobárica a 1 atm el volumen de un gas varía desde $1{,}0 \times 10^{-3}$ hasta $1{,}5 \times 10^{-3}$ m^3 y el gas ab-

sorbe 30 J de calor. ¿Cuál es la variación de energía ΔE_S del sistema?
Resp. —20,5 J.

4. Durante una transformación isócora un sistema absorbe 35 J de calor. ¿Cuál es la variación de energía ΔE_S del sistema?
5. Un gas absorbe 800 J de calor y realiza 500 J de trabajo cuando pasa del estado A al estado B a lo largo del camino 1 de la Fig. 12.8. (*a*) ¿Cuál es la variación de energía ΔE_S del sistema? (*b*) Cuando el gas vuelve al estado A a lo largo del camino 2, se realizan sobre él 300 J de trabajo. ¿Cuál es el rendimiento e del ciclo ($A \longrightarrow B \longrightarrow A$)? (*c*) ¿Cuánto calor se libera del gas a lo largo del camino 2?
Resp. (*a*) 300 J; (*b*) 0,25; (*c*) 600 J.

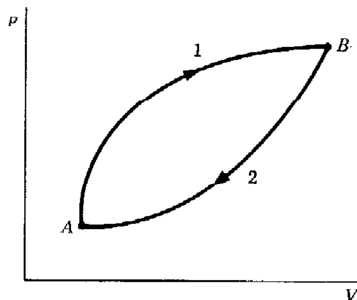


FIGURA 12.8
Problemas 5 y 6.

6. Un gas absorbe 7000 J de calor cuando pasa del estado A al B a lo largo del camino 1 de la Fig. 12.8 y desprende 5000 J de calor cuando regresa al estado A desde B por el camino 2. (*a*) ¿Cuál es el trabajo neto realizado en un ciclo? (*b*) ¿Cuál es el rendimiento del ciclo?
7. El rendimiento de una máquina es 0,21. Por cada 1000 J de calor absorbido por la máquina, (*a*) ¿cuánto trabajo realiza? y (*b*) ¿cuánto calor desprende?
Resp. (*a*) 210 J; (*b*) 790 J.
8. Una máquina desprende 450 J de calor por cada 100 J de trabajo realizado. ¿Cuál es el rendimiento de la máquina?
9. Los Estados Unidos producen unos 2×10^{16} J de energía eléctrica por día. Esta energía es equivalente a trabajo porque se puede convertir en trabajo con un rendimiento del 100 por cien por medio de un motor eléctrico. (*a*) Si esta energía es producida por centrales con un rendimiento medio del 0,30, ¿cuánto calor se vierte al medio ambiente cada día? (*b*) ¿Cuánta agua se necesita para absorber este calor si la temperatura del agua no ha de aumentar más de 2° C?
Resp. (a) $4{,}66 \times 10^{16}$ J; (*b*) $5{,}57 \times 10^{12}$ kg.
10. (*a*) Calcular el rendimiento de una máquina de Carnot que opera entre las temperaturas de 600 y 300° C. (*b*) Si la máquina absorbe 100 kcal de calor a la temperatura del foco caliente, ¿cuánto calor cederá al foco frío?
11. Una máquina de Carnot con un rendimiento de 0,30 opera entre una temperatura alta T_1 y una temperatura baja $T_2 = 310$ K. (*a*) ¿Cuál es T_1? (*b*) ¿Cuánto calor se libera a T_2 por cada 100 J de trabajo realizado?
Resp. (*a*) 443 K; (*b*) 233 J.

*12. Demostrar que en una máquina de Carnot el calor Q_2 desprendido a la temperatura baja T_2 está relacionado con el trabajo W realizado por la máquina por

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2} W$$

13. Consideremos una bandeja con seis fichas, cada una de las cuales es blanca por un lado y negra por el otro. (*a*) ¿Cuántos microestados posee este sistema? (*b*) ¿Cuántos macroestados tiene el sistema? (*c*) Hacer una lista de todos los microestados diferentes del sistema y determinar el desorden D de cada macroestado. (*d*) Después de sacudir la bandeja, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el macroestado $g = 0{,}5$?
Resp. (*a*) 64; (*b*) 7; (*d*) 0,31.
14. ¿Cuál es la probabilidad de que una bandeja con 100 fichas blancas y negras se encuentre en el macroestado $g = 0{,}10$ después de sacudirla?
15. (*a*) ¿Cuál es la variación de entropía de 1 mol de H_2O cuando pasa de hielo a agua a 0° C? (Ver Tabla 10.1.) (*b*) Si el hielo está en contacto con un medio a una temperatura de 10° C, ¿cuál es ΔS_u cuando el hielo funde? (*c*) Si la temperatura del medio es —10° C, ¿cuál sería ΔS_u si el hielo fundiese? (*d*) ¿Cuál debe ser la temperatura del medio para que ΔS_u sea cero?
Resp. (*a*) 22,0 J/°C; (*b*) +0,80 J/°C; (*c*) —0,84 J/°C; (*d*) 0 °C.

16. ¿Cuál es la variación de entropía de 850 g de agua que se calienta desde 20 hasta 50° C?

OBSERVACIÓN. La ecuación *12.10 sólo* es exacta para un proceso isotérmico. No obstante, se puede utilizar con buena aproximación siempre que el cambio de temperatura T sea pequeño comparado con la temperatura inicial T_1 del sistema. En tal caso, la temperatura media del sistema

$$T_{med} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$$

habría de ser utilizada en el denominador de la Ec. 12.10.

17. Un bloque de hierro de 500 g a una temperatura de 60° C se pone en contacto con un bloque de hierro de 500 g a una temperatura de 20° C. (*a*) Los bloques alcanzan en seguida una temperatura común de 40° C. ¿Cuál es la variación de entropía en este caso? (*b*) Calcular la variación de entropía suponiendo que la temperatura del bloque más caliente aumenta hasta 80° C mientras la temperatura del bloque más frío desciende a 0° C. (Como en este caso disminuye la entropía del universo, este proceso es imposible.)
Res. (*a*) 0,98 J/K; (*b*) —2,97 J/°C.

BIBLIOGRAFÍA

BENT, Henry A.: «The Second Law: An Introduction to Classical and Statistical Thermodynamics», Oxford University Press, Nueva York, 1965. Una excelente introducción a la termodinámica que no hace uso de matemáticas superiores. *El libro contiene* extensas citas del trabajo de los fundadores de la termodinámica que proporcionan rápidas ojeadas de la historia de esta materia.

GUYTON, Arthur C.: «Textbook of Medical Physiology», W. B. Saunders Company, Filadelfia, 1971. En el capítulo 67 se dan los detalles del metabolismo de los carbohidratos. El capítulo 7 contiene una interesante discusión de las teorías en boga acerca de la contracción muscular.

HUXLEY, H. E.: The Mechanism of Muscular Contraction, *Scientific American*, **213:**18 (Junio 1965). El autor discute su modelo de la contracción muscular.

INGRAHAM, Lloyd L. y Arthur B. PARDEE: Free Energy and Entropy in Metabolism, en David M. Greenberg (ed.), «Metabolic Pathways», 3.ª ed., vol. 1, Academic Press, Inc., Nueva York, 1967. Este artículo es una revisión del papel que la energía libre y la entropía juegan en el análisis de las reacciones bioquímicas. Otros artículos del libro discuten los detalles del metabolismo de la glucosa y otros procesos metabólicos.

Parte 4: Fenómenos Ondulatorios

Capítulo 13 Ondas

Este capítulo presenta las propiedades básicas de las ondas utilizando como ejemplo las ondas que se forman en una cuerda estirada. Estas ondas son muy apropiadas en este caso porque son fáciles de observar visualmente y al mismo tiempo muestran la mayoría de las propiedades generales comunes a todas ellas.

Las ondas que se producen en una cuerda, lo mismo que las ondas sonoras, consisten en vibraciones mecánicas de los elementos de un medio material. Por consiguiente, el comportamiento de las ondas mecánicas se puede entender perfectamente según las leyes de mecánica que rigen el movimiento de los objetos materiales.

13.1. ONDAS SOBRE UNA CUERDA ESTIRADA

La energía se puede transferir de un punto a otro por medios diversos. El más claro es quizás enviar un objeto de un punto a otro con velocidad v. La energía que lleva el objeto es su propia energía cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

en la que m es su masa. Por ejemplo, cuando se quema pólvora en un arma, parte de la energía que se produce se transforma en energía cinética de una bala. La bala lleva esta energía al blanco, transfiriendo energía de la pólvora al blanco.

Usando un objeto material para transferir energía, siempre hay una correspondiente transferencia de masa. ¿Es posible transferir energía sin transferir masa? En principio esto no parece probable porque se tiende a pensar en la energía en función de objetos en movimiento y, por lo tanto, la transferencia de energía parece que implica la transferencia de los objetos mismos. Sin embargo, es fácil demostrar un caso en el que la energía se transfiere sin transferencia alguna de masa.

Un extremo B de una cuerda larga* se sujeta a un soporte fijo y el otro extremo A lo sujeta una persona (Fig. 13.1). Cuando la persona da un golpe vivo arriba y abajo al extremo que sujeta, se forma una vibración que se mueve a lo largo de la cuerda hasta el otro extremo con una velocidad constante (Fig. 13.2). Al alcanzar el punto B, la vibración golpea el soporte y vuelve hacia A. Para demostrar que la vibración lleva energía, se sujeta el extremo B a un sistema de polea con peso, tal como se ve en la Fig. 13.3. Ahora, cuando la vibración alcanza B, el peso es desplazado momentáneamente hacia arriba, lo

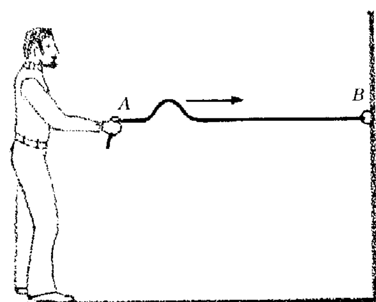


FIGURA 13.1
Una vibración que se desplaza con velocidad constante a lo largo de una cuerda.

* Para hacer la demostración se usa normalmente un muelle largo.

cual prueba que la vibración puede realizar trabajo. El trabajo que puede hacer es igual al trabajo realizado para producir la vibración en el punto A. Así, la cuerda permite que la energía fluya a lo largo de ella desde un extremo al otro. En el proceso no hay transferencia de masa, puesto que la cuerda permanece donde estaba al principio.

La perturbación que se propagó a lo largo de la cuerda se llama *onda*. Si el extremo A se sacude constantemente, se establece una configuración ondulatoria permanente en la cuerda (Fig. 13.4), que tiene como resultado una oscilación constante del peso. Nos tropezaremos frecuentemente con esas configuraciones ondulatorias, pero la palabra onda se usa normalmente para cualquier perturbación que se propaga de este modo sin tener en cuenta su forma.

Definición. Una *onda* es una perturbación en un medio que se propaga a través del mismo a una velocidad constante v característica del medio. En el ejemplo presente, la cuerda es el medio y la perturbación es el desplazamiento de los puntos de la cuerda desde su posición inalterada, o sea de equilibrio.

Es importante darse cuenta de que cada medio tiene una configuración de equilibrio en la que todos los puntos del medio están en reposo. La figura 13.5*a* muestra la configuración de una cuerda estirada. Con una regla se traza una línea en esta configuración de equilibrio, de modo que cada punto de la cuerda puede ser designado de acuerdo con su posición de equilibrio. Por ejemplo, el punto B es el punto que está a 3,0 cm del punto A en equilibrio.

La figura 13.5*b* muestra la cuerda con una onda. El punto B ya no está en el eje, sino que está desplazado del eje una distancia $y_{3,0} = 0{,}7$ cm. El subíndice 3,0 indica que $y_{3,0}$ es el desplazamiento del punto B cuya posición de equilibrio es 3,0 cm. Este desplazamiento es la medida de cuánto se altera el medio en este punto. Cuando la onda se mueve hacia la derecha, el desplazamiento del punto B cambia. En la Fig. 13.5*c*, la onda se ha movido, de modo que ahora el punto B tiene el desplazamiento $y_{3,0} = 0{,}9$ cm y el punto C tiene el desplazamiento $y_{4,0} = 0{,}7$ cm. Hay que hacer notar que cada punto de la cuerda se mueve solamente hacia arriba y hacia abajo mientras que la perturbación se mueve a velocidad constante v a lo largo de la cuerda. Esta velocidad no es la misma que la velocidad hacia arriba y hacia abajo de un punto concreto de la cuerda. De hecho, la velocidad hacia arriba y hacia abajo no es constante en absoluto, como tendremos ocasión de ver.

Para precisar aún más, supongamos que el intervalo de tiempo entre la Fig. 13.5*b* y *c* es 0,2 s. En este tiempo, el punto de la cuerda con el desplazamiento 0,7 cm ha cambiado del punto B (a 3,0 cm) al punto C (a 4,0 cm), de modo que la velocidad de la onda es

$$\mathrm{v} = \frac{4{,}0\ \text{cm} - 3{,}0\ \text{cm}}{0{,}2\ \text{s}} = 5\ \text{cm/s}$$

Por otro lado, durante este mismo tiempo, el desplazamiento en el punto B cambió de 0,7 a 0,9 cm, de modo que la velocidad (media) hacia arriba y hacia abajo, o *transversal*, de este punto durante este intervalo de tiempo es solamente

$$v = \frac{0{,}2\ \text{cm}}{0{,}2\ \text{s}} = 1{,}0\ \text{cm/s}$$

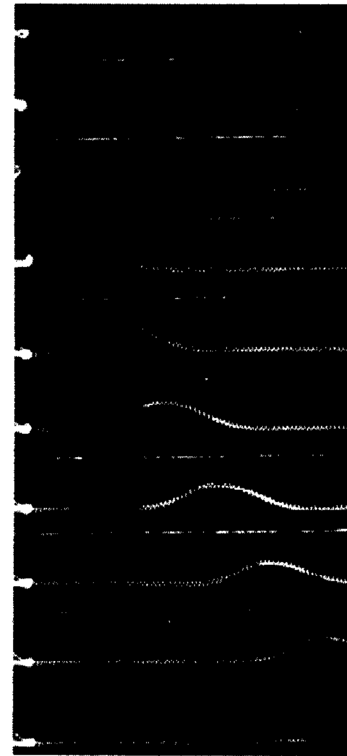


FIGURA 13.2
Fotografía de la formación y movimiento de una vibración sobre una cuerda. *(Tomado de «PSSC Physics», 3.ª ed., Education Development Center. Inc., reimpreso con autorización de D. C. Heath and Co.)*
La versión española de esta obra: Física, del PSSC, está publicada por EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

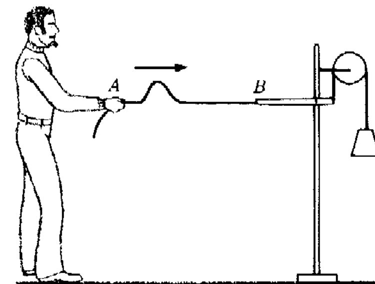


FIGURA 13.3
Disposición de polea y peso que convierte la energía de una vibración en energía potencial de un peso.

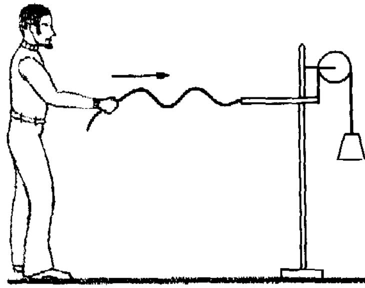


FIGURA 13.4
Un tren de vibraciones desplazándose sobre una cuerda.

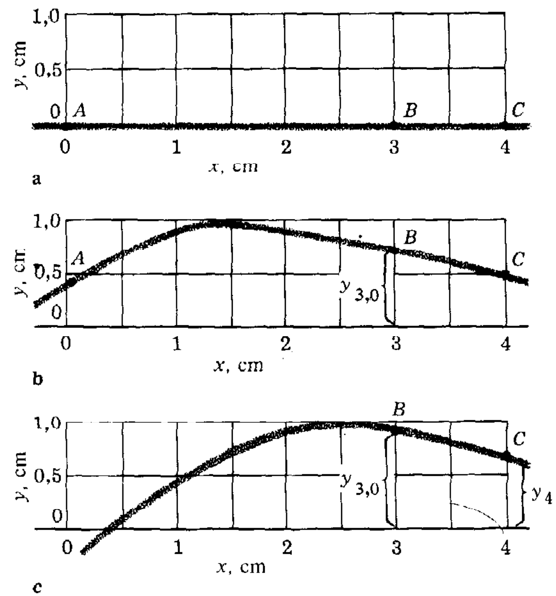


FIGURA 13.5
Porción de cuerda estirada.
(*a*) Posición de equilibrio de la cuerda. (*b*) Desplazamiento de la cuerda producido por una onda en un instante.
(*c*) Desplazamiento de la cuerda 0.2 segundos más tarde.

La velocidad transversal v está relacionada con la energía transportada por la onda (Apart. 13.4), mientras que la velocidad de la onda V es la velocidad con la que se transfiere esta energía a lo largo de la cuerda. Para un medio dado, la velocidad de la onda es una constante independiente de su forma, mientras que la velocidad transversal varía de una onda a otra e incluso de un punto a otro dentro de una misma onda.

Definición. Una *onda transversal* es una onda en la que los puntos del medio se mueven perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda. La onda en una cuerda es tranversal, porque los puntos de la cuerda se desplazan en dirección perpendicular a *ella en* tanto que la onda se propaga en su misma dirección.

Definición. Una *onda longitudinal* es una onda en la que los puntos del medio se mueven hacia atrás y hacia adelante, en dirección paralela a la de propagación de la onda. Una onda longitudinal puede crearse en un muelle largo comprimiendo unos pocos anillos de un extremo y soltándolos después. Cuando estos anillos se desplazan hacia atrás a su posición de equilibrio, los anillos próximos se comprimen y vuelven a su vez a sus posiciones de equilibrio, comprimiendo así a lo largo del muelle a los anillos más lejanos. El resultado es una onda de compresión longitudinal que se mueve a lo largo del muelle con velocidad constante.

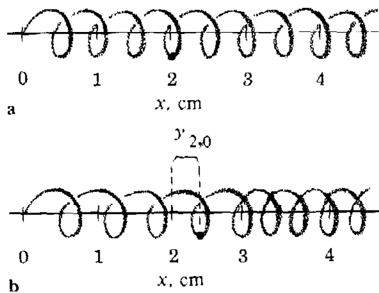


FIGURA 13.6
Porción de muelle.
(*a*) Configuración de equilibrio del muelle. (*b*) Desplazamientos longitudinales de los puntos del muelle.

La Fig. 13.6*a* muestra un muelle en su posición de equilibrio y la Figura 13.6*b* muestra el desplazamiento $y_{2,0}$ del punto cuya posición de equilibrio está a 2,0 cm del extremo del muelle. Aun cuando este punto se desplaza paralelamente al movimiento de la onda longitudinal, no hay todavía un flujo neto de masa a lo largo del muelle, porque el punto sólo se mueve hacia adelante y hacia atrás con respecto a su posición de equilibrio.

Tanto las ondas transversales como las longitudinales pueden propagarse a través de medios sólidos. Por ejemplo, después de un terremoto

(o de un temblor de Luna), tanto las ondas *sísmicas* transversales como las longitudinales se mueven hacia afuera desde el lugar del temblor a través de la corteza terrestre (o lunar). Estos dos tipos de ondas tienen velocidades diferentes que dependen de las propiedades de las rocas por las que se desplazan. Las medidas de la velocidad de las ondas sísmicas proporcionan una información valiosa sobre la naturaleza de las rocas del interior de la Tierra y de la Luna.

Las ondas transversales pueden propagarse también a lo largo de la superficie de un líquido, pero sólo las ondas longitudinales pueden propagarse por el interior de un fluido, porque un fluido no puede ejercer fuerzas paralelas a una superficie (Propiedad 1 de los fluidos, Apart. 7.2). Esto se discute con más detalle en el Apart. 14.1, donde se muestra que el sonido es una onda de compresión longitudinal en el aire. Las ondas que son perturbaciones en medios materiales, sean sólidos o fluidos, se llaman ondas *mecánicas*, para distinguirlas de las ondas electromagnéticas, como por ejemplo la luz.

13.2. LA TEORIA MATEMATICA DE LAS ONDAS

Todas las propiedades de las ondas mecánicas pueden deducirse matemáticamente de los principios de la mecánica (especialmente la segunda ley de Newton), de modo que no se requieren nuevos principios físicos para entender estas propiedades. De hecho, el poder explicar todos los aspectos de unos fenómenos tan complejos con los principios de la mecánica, es una sólida evidencia de la verdad universal de estos principios.

La teoría matemática considera solamente pequeños desplazamientos en el medio. Una porción de materia desplazada ligeramente de su posición de equilibrio es puesta de nuevo en equilibrio por fuerzas ejercidas sobre ella por porciones de materia cercanas. Al mismo tiempo, por la tercera ley de Newton, la materia desplazada ejerce fuerzas sobre sus vecinas, de modo que, cuando la materia es devuelta al equilibrio, desequilibra a las que están junto a ella. Estos trozos de materia, a su vez, son influenciados por sus vecinos y así se repite el proceso propagando la perturbación original a través del medio.

OBSERVACIÓN. Los desplazamientos deben ser tan pequeños que el medio no sea deformado permanentemente. Por ejemplo, un trozo de metal doblado ligeramente volverá a su forma original. Sin embargo, si se le dobla más allá de un cierto límite, quedará deformado permanentemente. Las ondas mecánicas están limitadas a desplazamientos que no exceden la capacidad del material para volver a su forma original.

La Fig. 13.7 muestra las posiciones sucesivas de una vibración que se mueve hacia la derecha a lo largo de una cuerda larga. Se marca una pequeña región R de la cuerda para que pueda estudiarse su movimiento cuando la vibración pasa por ella.

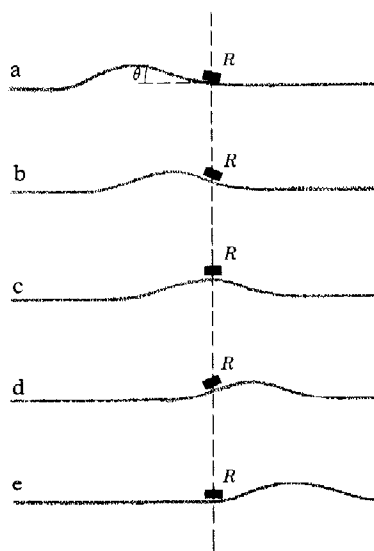


FIGURA 13.7
Posiciones sucesivas de una vibración que se desplaza hacia la derecha a lo largo de una cuerda. Se ha marcado una pequeña porción R de la cuerda para que su movimiento pueda ser estudiado.

En la Fig. 13.7*a*, la vibración está justamente alcanzando a R. Como R no ha empezado aún a moverse, su velocidad vertical es cero. Al mismo tiempo, la cuerda ejerce sobre ambos extremos de R las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Los módulos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son T (la tensión en la cuerda), pero como la región R está curvada, la suma $\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ de estas fuerzas no es cero. La Fig. 13.8*a* muestra que, como el ángulo θ es pequeño, $\mathbf{S}$ está dirigida hacia arriba, perpendicularmente a la cuerda. Por lo tanto, por la segunda ley de Newton, la región R tiene una aceleración hacia arriba $a = S/m$, en la que m es la masa de la cuerda en R. Esta ace-

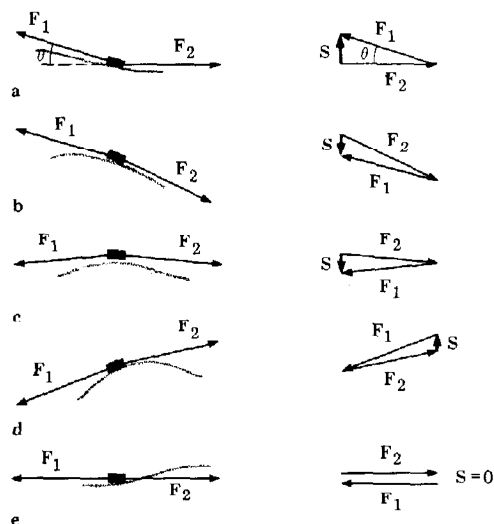


FIGURA 13.8
Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan sobre los extremos de la región R de la Fig. 13.7 y la suma $\mathbf{S} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

leración es la que hace que R empiece a moverse hacia arriba cuando la vibración se desplaza a lo largo de la cuerda.

Al poco rato R ha alcanzado una considerable velocidad hacia arriba y se halla en la posición que se muestra en la Fig. 13.7*b*. Pero ahora la fuerza total **S** sobre R está dirigida hacia abajo, tal como se muestra en la Fig. 13.8*b*. Esto significa que R continuará moviéndose hacia arriba pero con velocidad decreciente.

Cuando R alcanza su máximo desplazamiento (Fig. 13.7*c*), de nuevo tiene velocidad cero. En esta posición, la tensión de la cuerda ejerce sobre R una fuerza hacia abajo **S** (Fig. 13.8*c*) y, por lo tanto, R empieza a moverse hacia abajo con velocidad creciente. La Fig. 13.7*d* muestra a R en su posición de máxima velocidad hacia abajo, mientras que la Fig. 13.8*d* muestra que la fuerza total sobre ella es ahora hacia arriba. Así, la velocidad hacia abajo de R disminuye ahora hasta que R vuelve a su posición de equilibrio (Fig. 13.7*e*) donde tiene velocidad y aceleración cero (Fig. 13.8*e*).

Esta discusión muestra que, mientras la vibración en su totalidad se desplaza hacia la derecha a velocidad constante **v**, cada punto de la cuerda se mueve con una velocidad en dirección vertical (transversal) que cambia continuamente. La Fig. 13.9 muestra la velocidad de distintos puntos de la vibración. Las flechas apuntan en la dirección del movimiento y sus longitudes son proporcionales a la velocidad en ese punto. Los puntos en la mitad delantera de la ondulación (lado derecho) se mueven hacia arriba, la velocidad transversal del pico es cero y los puntos de la mitad posterior de la ondulación (lado izquierdo) se mueven hacia abajo.

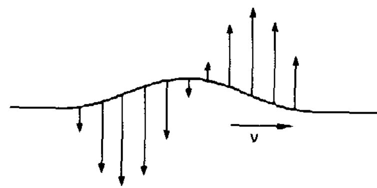


FIGURA 13.9
Velocidad de diferentes puntos de una vibración.

Esta discusión cualitativa indica cómo el mismo desplazamiento origina las fuerzas que lo mantienen en movimiento. La teoría matemática muestra, en general, que una onda de forma cualquiera se propagará de un modo parecido. En particular, se puede demostrar que la velocidad v de una onda en una cuerda de masa m y longitud L es

$$v = \sqrt{\frac{T}{m/L}}$$

en la que T es la tensión. La magnitud m/L es la masa por unidad de longitud, o *densidad lineal*, de la cuerda. Así, si hacemos

$$\mu = \frac{m}{L} \qquad 13.1$$

la velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad 13.2$$

Esta ecuación muestra que la velocidad de una onda en una cuerda estirada crece con la raíz cuadrada de la tensión y disminuye con la raíz cuadrada de la masa por unidad de longitud.

Ejemplo. ¿Cuál es la velocidad de una onda sobre una cuerda de guitarra que posee una tensión de 30 N y una masa por unidad de longitud de 0,015 kg/m?
De acuerdo con la Ec. 13.2 la velocidad de las ondas transversales sobre esta cuerda es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{30 \text{ N}}{0{,}015 \text{ kg/m}}}$$
$$= \sqrt{2000 \text{ N-m/kg}} = \sqrt{2000 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 44{,}7 \text{ m/s}$$

Si se cuadruplicase la tensión, la velocidad se duplicaría, y si la masa por unidad de longitud se cuadruplicase, la velocidad se haría mitad.

OBSERVACIÓN. No se puede dar una deducción elemental de este resultado de la Ec. 13.2. Sin embargo, en el apéndice IV se calcula la velocidad de una vibración teniendo presentes las fuerzas que actúan sobre ella. Este cálculo merece la pena estudiarlo para apreciar cómo se aplican los principios de la mecánica a una onda.

13.3. SUPERPOSICIÓN

En un medio puede haber más de una onda al mismo tiempo y en el mismo punto. Esta propiedad de las ondas las distingue claramente de los objetos materiales. Por ejemplo, las dos vibraciones de la figura 13.10*a*, que se encuentran una frente a otra en la cuerda, pasan una a través de la otra y continúan su camino sin experimentar ninguna alteración (Fig. 13.10*b*). Los objetos materiales no se penetran mutuamente de este modo. Sin embargo, una onda no es un objeto material. Es una configuración de desplazamientos de puntos que se autopropaga en un medio material.

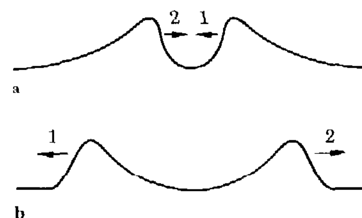


FIGURA 13.10
(*a*) Dos vibraciones una frente a la otra sobre una cuerda.
(*b*) Las mismas vibraciones un momento más tarde, después de pasar una a través de la otra.

OBSERVACIÓN. Una onda es una entidad física real, aun cuando no es un objeto material. Se mueve, transporta energía e interacciona con objetos materiales. De hecho, las ondas y los objetos materiales son los dos conceptos físicos básicos en función de los cuales se describe el mundo físico.

¿Cuál es el desplazamiento de la cuerda mientras las dos vibraciones de la Fig. 13.10 penetran una dentro de la otra? La teoría matemática

de las ondas responde a esto demostrando el importante principio que damos a continuación.

Principio de superposición. *Si en cualquier instante existen dos o más ondas simultáneamente en un punto, el desplazamiento del punto es la suma de los desplazamientos que hubiera tenido el punto con cada onda por separado.* Al aplicar este principio, los desplazamientos hacia un lado de la posición de equilibrio se toman como positivos y los desplazamientos hacia el otro lado se toman como negativos.

La Fig. 13.11 muestra cómo se aplica este principio a las vibraciones de la Fig. 13.10 cuando penetra una dentro de la otra. En cada parte de la figura, las líneas grises representan los desplazamientos que hubiera tenido la cuerda con cada vibración por separado. La vibración 1 se mueve invariablemente de derecha a izquierda mientras que la vibración 2 se mueve invariablemente de izquierda a derecha. Los desplazamientos reales de la cuerda en cada instante están representados por las líneas negras. Estos desplazamientos se hallan sumando los desplazamientos producidos por cada vibración por separado, de acuerdo con el principio de superposición.

Por ejemplo, supongamos el punto *A* en la cuerda. En la Fig. 13.11*a*, el pico de la vibración 2 y el borde delantero de la vibración 1 están

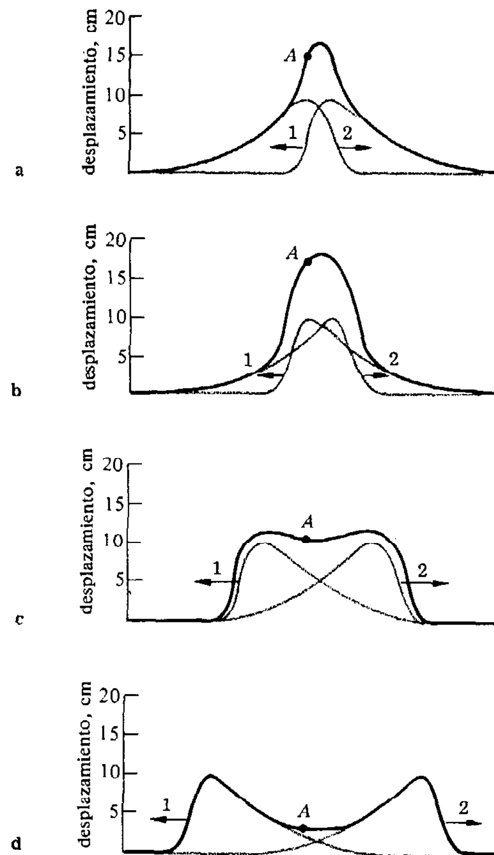


FIGURA 13.11
La superposición de las dos vibraciones de la Fig. 13.10 al pasar una a través de la otra.

simultáneamente en el punto *A*. Como la vibración 1 por separado hubiera desplazado el punto *A* 5 cm y la vibración 2 por separado lo hubiera desplazado 10 cm, el desplazamiento real de *A* en este instante es de 15 cm, tal como se muestra. El resto de la curva negra de la Fig. 13.11*a* se calcula del mismo modo.

En la Fig. 13.11*b*, el pico de la vibración 1 y el lado posterior de la vibración 2 están simultáneamente en *A*. De nuevo, el desplazamiento real de *A* es la suma de los desplazamientos producidos por cada una de estas vibraciones por separado. Todos los puntos de las curvas negras se calculan del mismo modo. Estas curvas negras representan el desplazamiento real de la cuerda, que puede ser bastante complicado, aun cuando es la suma de dos vibraciones simples.

En la Fig. 13.12 se muestra la penetración mutua de una vibración positiva y otra negativa. La Fig. 13.12*c* muestra que en el instante en el que estas vibraciones se superponen completamente, la cuerda tiene desplazamiento cero en toda ella. Esto es así porque, por el principio de superposición, la suma de un desplazamiento positivo y otro negativo de igual módulo es cero. (Estúdiense las Figs. 13.11 y 13.12 con detenimiento hasta estar seguro de haber entendido cómo se construyen las ondas negras, partiendo de las dos vibraciones grises.)

Es sorprendente que, de la aparente configuración de equilibrio que aparece en la Fig. 13.12*c*, la cuerda pueda evolucionar hasta producir las dos vibraciones viajeras que se muestran en las Figs. 13.12*d* y 13.12*e*. Por supuesto que la cuerda no está realmente en equilibrio en la Fig. 13.12*c*, porque los puntos de la región de superposición no están en reposo. La Fig. 13.13 muestra que los puntos del lado anterior de la vibración positiva se apartan del equilibrio, mientras que los puntos del lado posterior se mueven hacia el equilibrio; los puntos de la vibración negativa se comportan del mismo modo. Además, el principio de superposición se aplica a la velocidad lo mismo que al desplazamiento. Es decir, que la velocidad real de cada punto de la cuerda es la suma de las velocidades que tendría con cada vibración por separado. Así, cuando las dos vibraciones se solapan, ellas se combinan momentáneamente para dar una onda con desplazamiento cero para cada punto, pero no con velocidad cero. Cada punto de la onda se mueve a través de su posición de equilibrio con la suma de velocidades que tendría si cada vibración estuviera presente por separado (Fig. 13.13).

El principio de superposición hace posible expresar una onda compleja como la suma de varias ondas simples. De hecho, es posible expresar cualquier onda, por compleja que sea, como la suma de ondas de una forma especialmente simple llamada *ondas sinusoidales*. De ellas trata el apartado siguiente.

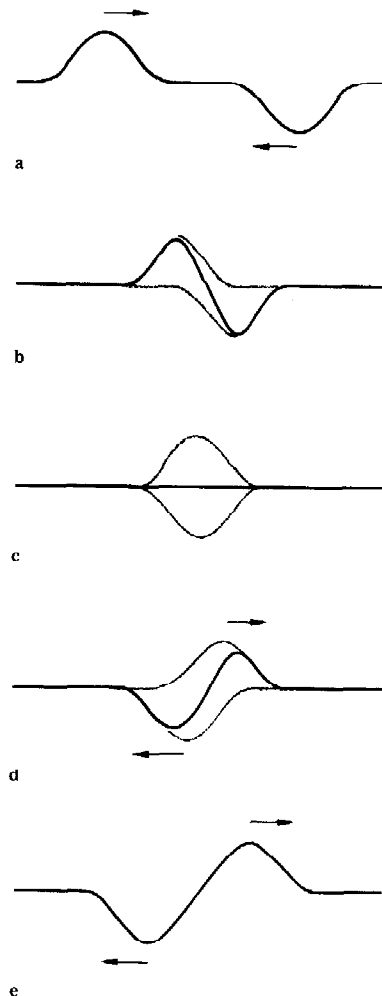


FIGURA 13.12
Superposición de una vibración positiva y otra negativa al pasar una a través de la otra.

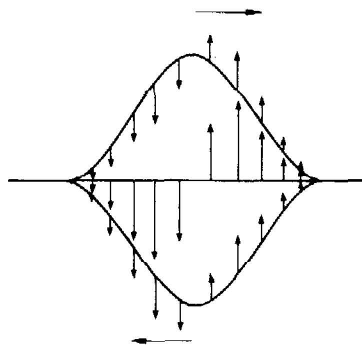


FIGURA 13.13
Superposición de las velocidades transversales de las dos vibraciones de la Fig. 13.12*c*.

13.4. ONDAS SINUSOIDALES

Longitud de onda y frecuencia

Una onda sinusoidal es una configuración de onda particular en la que las vibraciones positivas y negativas se alternan sucesivamente (Fig.13.14).

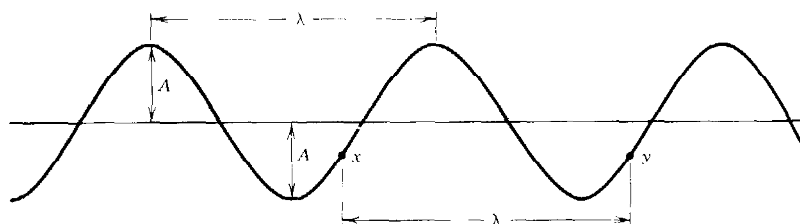


FIGURA 13.14
Una onda sinusoidal.

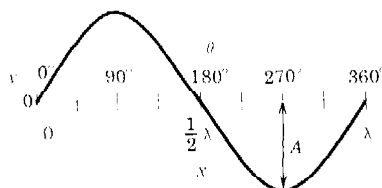


FIGURA 13.15
Una longitud de onda de una onda sinusoidal dividida en 360°.

Definición. La *longitud de onda* λ† de una onda sinusoidal es la distancia entre dos picos positivos vecinos. En una onda sinusoidal dada, dos picos positivos vecinos tienen la misma separación λ, y dos puntos cualesquiera de la onda que están separados una longitud de onda (tales como x e y en la Fig. 13.14) poseen el mismo desplazamiento. Esta clase de configuración ondulatoria se dice que es *periódica* porque la configuración se repite exactamente a intervalos de λ.

Definición. La *amplitud* A de una onda sinusoidal es el desplazamiento máximo de una onda. Es la misma para desplazamientos positivos y negativos.

La forma real de una onda sinusoidal está relacionada con el seno trigonométrico. Para entender esto considérese una longitud de onda de una onda sinusoidal de amplitud A, tal como se muestra en la Fig. 13.15. El intervalo entre $x = 0$ y $x = \lambda$ ha sido dividido en 360 divisiones iguales, que corresponden a los 360° del círculo. Por lo tanto, cualquier punto x sobre el eje x se puede relacionar con un ángulo θ por la proporción

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{\theta}{360°}$$

o sea

$$\theta = \frac{x}{\lambda}360°$$

El desplazamiento y de una onda sinusoidal en el punto x viene dado en función del seno de θ por la expresión

$$y = A \operatorname{sen} \theta$$
$$= A \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\lambda}360°\right) \quad 13.3a$$

Alternativamente, si los ángulos vienen medidos en radianes más que en grados, el desplazamiento se escribe

$$y = A \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \quad 13.3b$$

dado que 2 π radianes es igual a 360°.

Ejemplo. Una onda sinusoidal tiene una amplitud $A = 0{,}5$ cm y una longitud de onda $\lambda = 30$ cm. ¿Cuál es su desplazamiento en $x = 6$ cm?

De la ecuación 13.3*a*, este desplazamiento es

† λ es la letra griega lambda.

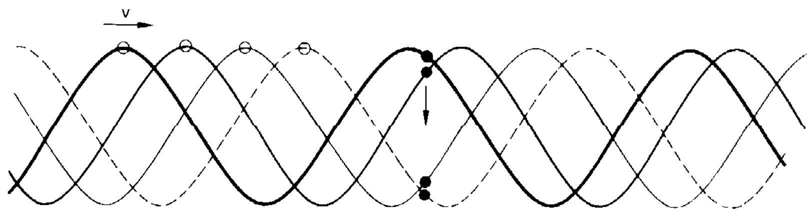


FIGURA 13.16
Una onda sinusoidal en cuatro instantes sucesivos. Los círculos vacíos marcan un rasgo característico de la onda (un pico), mientras que los círculos llenos marcan un punto físico del medio.

$$y = (0{,}5 \text{ cm}) \operatorname{sen}\left(\frac{6 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} 360°\right)$$
$$= 0{,}5 \text{ cm} \times \operatorname{sen} 72° = 0{,}5 \text{ cm} \times 0{,}951 = 0{,}475 \text{ cm}$$

OBSERVACIÓN. Es natural que se asocien los puntos en 1 longitud de onda de una onda sinusoidal con los puntos tomados sobre una circunferencia porque una onda sinusoidal se repite después de 1 longitud de onda, lo mismo que una circunferencia se repite cada 360°.

La Fig. 13.14 muestra una onda sinusoidal en un instante concreto. Si la onda se desplaza hacia la derecha con velocidad v, toda la configuración se desplaza en el tiempo, tal como se muestra en la Fig. 13.16. Los círculos vacíos de esta figura muestran cómo se desplaza un rasgo característico de la onda, mientras que los círculos llenos muestran cómo se desplaza un punto material fijo en el medio. El pico de la onda se mueve hacia la derecha con velocidad v, mientras que un punto en el medio se mueve hacia abajo y hacia arriba.

Una vez que la onda se ha desplazado una distancia λ, la configuración parece de nuevo la misma. En el tiempo $\tau = \lambda/v$, que la onda necesita para desplazarse la distancia λ, un punto fijo en el medio vuelve a su posición inicial, completando un *ciclo* del movimiento.

Definición. El *período* τ de una onda sinusoidal es el tiempo necesario para que un punto del medio complete un ciclo. Está relacionado con la velocidad de propagación y la longitud de onda por

$$\tau = \frac{\lambda}{v}$$

o bien

$$v = \frac{\lambda}{\tau} \qquad 13.4$$

Esta relación entre la velocidad, la longitud de onda y el período de una onda sinusoidal es de importancia fundamental en el estudio del movimiento ondulatorio.

El período τ es también el tiempo que necesita una longitud de onda completa para pasar por un punto dado. Si $\tau = 0{,}25$ s, 1 longitud de onda pasa por un punto dado cada 0,25 s, de modo que $1/0{,}25 = 1/\tau = 4$ longitudes de onda pasan cada segundo.

Definición. La *frecuencia* de una onda sinusoidal se define como

$$f = \frac{1}{\tau} \qquad 13.5$$

y es igual al número de longitudes de onda que pasan por un punto en 1 s. Su unidad es $1/s = s^{-1}$, que recibe el nombre de **hertz** (Hz). La frecuencia es también el número de ciclos que ejecuta en 1 s un punto

del medio, de modo que f se expresa a menudo en ciclos por segundo (cps). Así la frecuencia de una onda con el período $\tau = 0{,}25$ s es

$$f = \frac{1}{\tau} = 4\ \text{s}^{-1} = 4\ \text{Hz} = 4\ \text{cps}$$

Otra forma de la Ec. 13.4 se obtiene al combinarla con la Ec. 13.5 para dar

$$v = \lambda f \tag{13.6}$$

Solamente hay que recordar las Ecs. 13.5 y 13.6 porque la Ec. 13.4 se deduce fácilmente de ellas.

En cualquier situación física concreta, la velocidad v de la onda es una constante. Esto significa, por ejemplo, que la velocidad de una onda sobre una cuerda no depende de la longitud de onda ni de la frecuencia de la onda. Esto es cierto también para la velocidad del sonido (Apart. 14.2) y la velocidad de la luz* (Apart. 15.1), aunque, por supuesto, las velocidades de estas diferentes clases de ondas son todas distintas. Pero, para una determinada clase de onda en un medio dado, la Ec. 13.6 establece la relación entre la longitud de onda y la frecuencia de una onda.

La frecuencia tiene su importancia porque para el sonido y la luz tiene un significado psicofisiológico directo. El tono, o grado de elevación de un sonido depende de la frecuencia de la onda sonora, y el color de un objeto depende de la frecuencia de la onda luminosa que proviene de él. Por ejemplo, el tono musical A es una onda sonora de una frecuencia de unos 440 Hz, y el color azul de un arco iris es una onda luminosa de una frecuencia de unos $7{,}5 \times 10^{14}$ Hz.

Teorema de Fourier

Esta conexión entre la onda sinusoidal y las cualidades psicofisiológicas del tono y el color es ciertamente notable. Sin embargo, las ondas sinusoidales tienen una propiedad matemática aún más notable que justifica el que se les preste una atención especial.

Teorema de Fourier. *Cualquier onda, tenga la forma que tenga, se puede expresar de manera única como la superposición (suma) de ondas sinusoidales de longitudes de onda y amplitudes definidas.*

Por ejemplo, de acuerdo con este teorema, la configuración más bien compleja de la onda (curva oscura) de la Fig. 13.17 es igual a la superposición de ondas sinusoidales. Estas ondas sinusoidales, que se denominan *componentes de Fourier* de la configuración compleja, se muestran como curvas grises en la Fig. 13.17. Estas componentes son únicas; es decir, solamente las ondas sinusoidales con estas longitudes de onda y estas amplitudes se combinan hasta igualar la configuración dada. Cualquier configuración, sin importar su complejidad, es análogamente igual a una suma de ondas sinusoidales, aunque puede que haya que superponer muchas de estas ondas para llegar a igualar una configuración muy compleja.

* La velocidad de la luz en materiales tales como el vidrio y el agua depende ligeramente de su longitud de onda, pero esto puede no tenerse en cuenta en la mayoría de los casos.

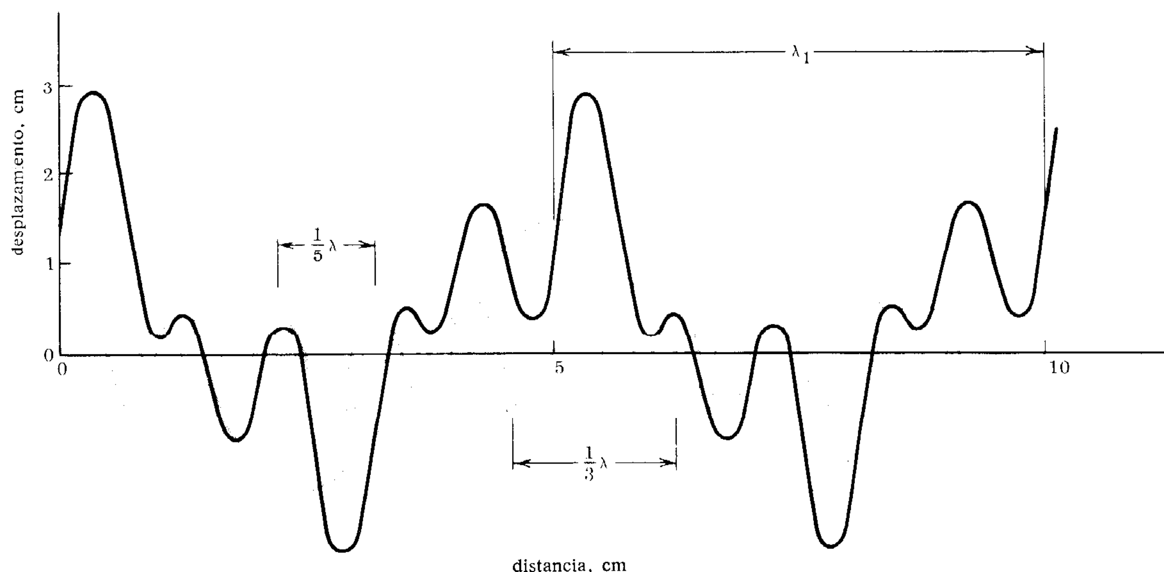


FIGURA 13.17
Una onda periódica compleja producida por la superposición de tres ondas sinusoidales de diferente amplitud y longitud de onda.

La componente de Fourier de longitud de onda más larga de la figura 13.17 tiene una longitud de onda de 5 cm y una amplitud de 1,5 cm. Si la velocidad de la onda es 12 m/s, la frecuencia de esta componente es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{12 \text{ m/s}}{0{,}05 \text{ m}} = 240 \text{ s}^{-1} = 240 \text{ Hz}$$

Esta componente se representa sobre un gráfico de la amplitud en función de la frecuencia (Fig. 13.18) por medio de una línea vertical de 1,5 cm de altura, colocada a 240 Hz sobre el eje horizontal. La siguiente componente de longitud de onda más larga tiene una frecuencia de

$$f = \frac{12 \text{ m/s}}{0{,}0167 \text{ m}} = 720 \text{ s}^{-1} = 720 \text{ Hz}$$

y una amplitud de 0,6 cm, de modo que se representa por una línea vertical de 0,6 cm de altura, colocada a 720 Hz sobre el eje horizontal. La tercera componente se representa por medio de una línea de 0,6 cm de altura, colocada a 1200 Hz.

Se llama *espectro* a una representación de las amplitudes y frecuencias de las componentes de una determinada onda, tal como la dada en la Fig. 13.18. Es un modo conveniente de especificar una onda. La Fig. 13.19 muestra varias ondas complejas con sus correspondientes espectros.

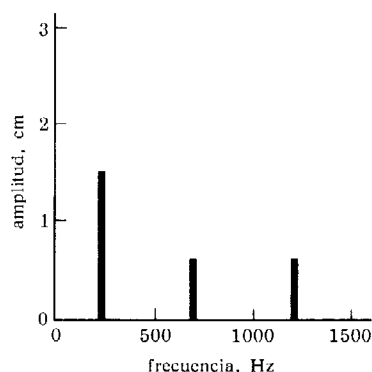


FIGURA 13.18
Espectro de la onda compleja de la Fig. 13.17.

Las configuraciones de ondas complejas son *periódicas* o *aperiódicas*. Una onda periódica, como por ejemplo una sola onda sinusoidal, repite su configuración exactamente a intervalos de longitud λ_1. Una onda aperiódica nunca repite su configuración. La onda de la Fig. 13.19*c* es aperiódica, y las ondas de las Figs. 13.17 y 13.19*a* y *b* son periódicas. El espectro de una onda aperiódica contiene una distribución continua de frecuencias componentes, mientras que el espectro de una onda periódica es discreto.

El espectro de una onda periódica es discreto porque para que una onda sea periódica con una longitud λ_1, las longitudes de onda de sus componentes de Fourier tienen que ser miembros de la sucesión

$$\lambda_1, \tfrac{1}{2}\lambda_1, \tfrac{1}{3}\lambda_1, \ldots, \tfrac{1}{n}\lambda_1, \ldots$$

donde n es un número entero ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Por ejemplo, las componentes de la onda de la Fig. 13.17 son los miembros primero, tercero y quinto de esa sucesión. En el intervalo λ_1 hay exactamente 1 longitud de onda de la componente igual a λ_1, exactamente 3 longitudes de onda de la componente igual a $1/3\ \lambda_1$, y exactamente 5 longitudes de onda de la componente igual a $1/5\ \lambda_1$. Así, como todas las ondas componentes son las mismas al principio y al final del intervalo, su suma se repite después de este intervalo. Es evidente que hay exactamente n longitudes de onda de las componentes iguales a $(1/n)\lambda_1$, de modo que en el intervalo λ_1 se repite una suma de tales componentes.

Supongamos que f_1 es la frecuencia de la componente cuya longitud de onda es λ_1:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$$

Entonces, las frecuencias de las componentes de una onda periódica deben ser miembros de la sucesión

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$$

$$f_2 = \frac{v}{\frac{1}{2}\lambda_1} = \frac{2v}{\lambda_1} = 2f_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n = \frac{v}{(1/n)\lambda_1} = \frac{nv}{\lambda_1} = nf_1$$

o sea

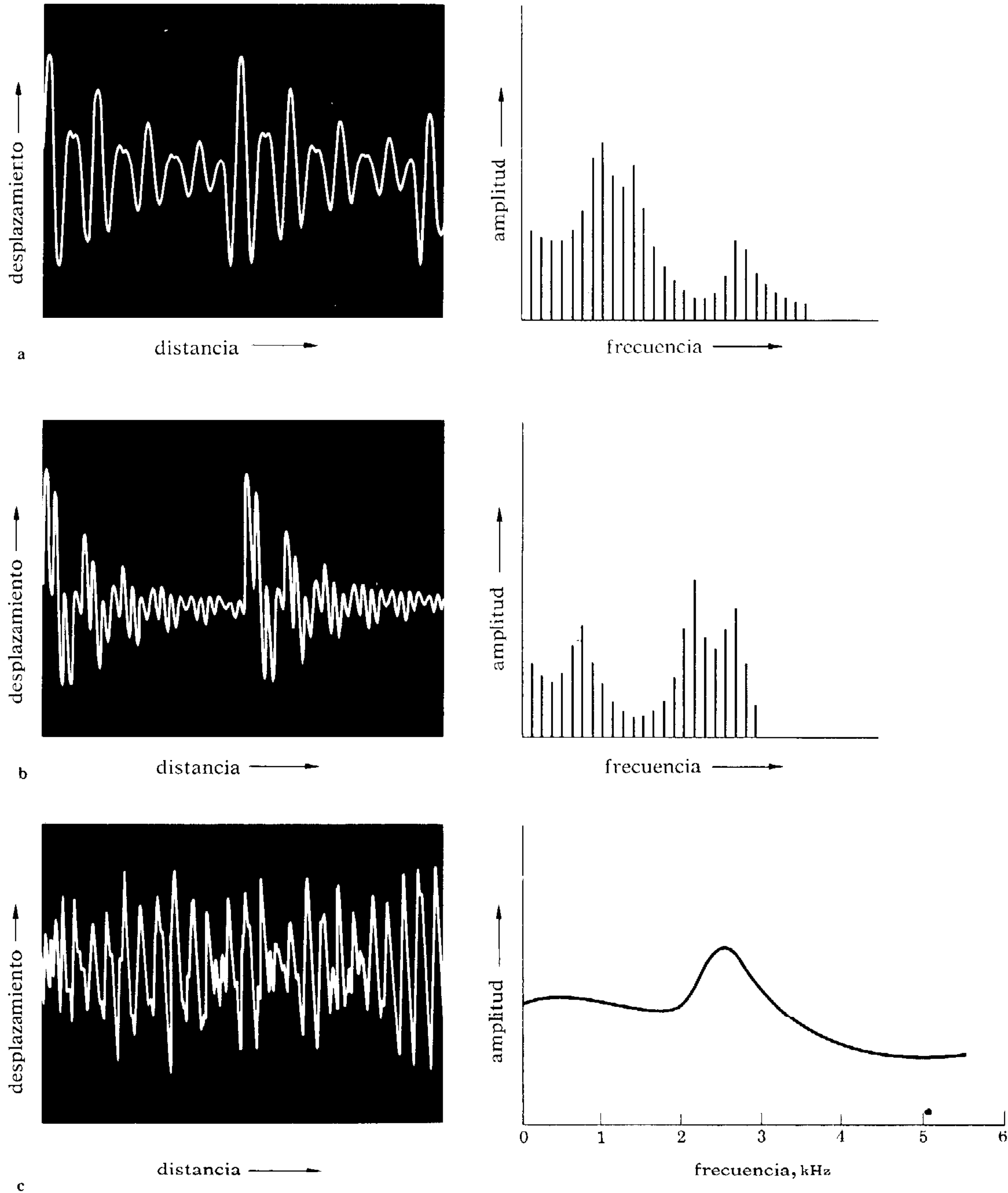
$$f_1, 2f_1, 3f_1, \ldots, nf_1, \ldots$$

A tal sucesión de frecuencias igualmente espaciadas se le llama *sucesión armónica*. El espectro de una onda periódica se compone solamente de miembros de una sucesión armónica, aunque no todos los miembros de la sucesión tienen que estar presentes, ni siquiera f_1. Por ejemplo, una onda cuyas tres componentes de Fourier tienen las frecuencias 120, 180 y 300 Hz es periódica porque cada una de estas frecuencias es igual a un número entero de veces 60 Hz. Tal onda se repite en un intervalo de longitud

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{v}{60\ \text{Hz}}$$

aun cuando f_1 no es una de sus componentes.

FIGURA 13.19
Espectros de algunas ondas complejas: (*a*), (*b*) ondas periódicas, (*c*) aperiódica.
(Según P. B. Denes y E. N. Pinson, «The Speech Chain». Bell Telephone Laboratories, Incorporated, usado con permiso.)



Energía de una onda sinusoidal

Una onda sinusoidal transporta energía cuando se desplaza, lo cual puede entenderse examinando 1 longitud de onda de una onda sinusoidal sobre una cuerda. En cualquier instante, cada punto de la cuerda se mueve verticalmente a una velocidad diferente, como en la Fig. 13.9 Pero en el tiempo τ de un período, cada punto ejecuta un ciclo completo, moviéndose desde el desplazamiento cero hasta un desplazamiento positivo A, para volver de nuevo a cero, pasar después a un desplazamiento negativo $-A$ y finalmente volver de nuevo a cero. Así, un punto recorre una distancia total de $4A$ en el tiempo τ, de modo que su velocidad vertical media es $\bar{v} = 4A/\tau$. La masa de un trozo de cuerda de longitud igual a 1 longitud de onda es $\mu\lambda$, en la que μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. Como cada punto de la cuerda tiene la velocidad media $\bar{v}$, la energía cinética media de 1 longitud de onda de cuerda es

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}m(\text{velocidad media})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\mu\lambda\left(\frac{4A}{\tau}\right)^2 \\ &= \frac{8\mu\lambda A^2}{\tau^2} \end{aligned}$$

Usando las Ecs. 13.5 y 13.6, podemos escribirla también así

$$K = 8\mu v f A^2$$

donde v es la velocidad de la onda y f es la frecuencia.

Esta deducción de la energía cinética de una onda sinusoidal no es exacta porque debería usarse el valor medio de la (velocidad)^2, más que la (velocidad media)^2. Estas dos medias no son iguales. Un cálculo matemático exacto muestra que

$$K = \pi^2 \mu v f A^2$$

O sea, que el factor 8 obtenido anteriormente debería ser realmente π^2. (Como $\pi^2 = 9{,}87$, nuestro sencillo cálculo no está demasiado lejos del resultado correcto.)

Cada punto de la onda tiene también energía potencial resultante del trabajo realizado al desplazarlo del equilibrio. Se puede demostrar que la energía potencial de 1 longitud de onda es igual a la energía cinética, de modo que la energía total de 1 longitud de onda es

$$\begin{aligned} E &= K + V = 2K \\ &= 2\pi^2 \mu v f A^2 \end{aligned} \qquad 13.7$$

El número de longitudes de onda que pasan por un punto fijo en 1 s es f. Por lo tanto, la energía total que pasa por este punto cada segundo es

$$P = fE = 2\pi^2 \mu v f^2 A^2 \qquad 13.8$$

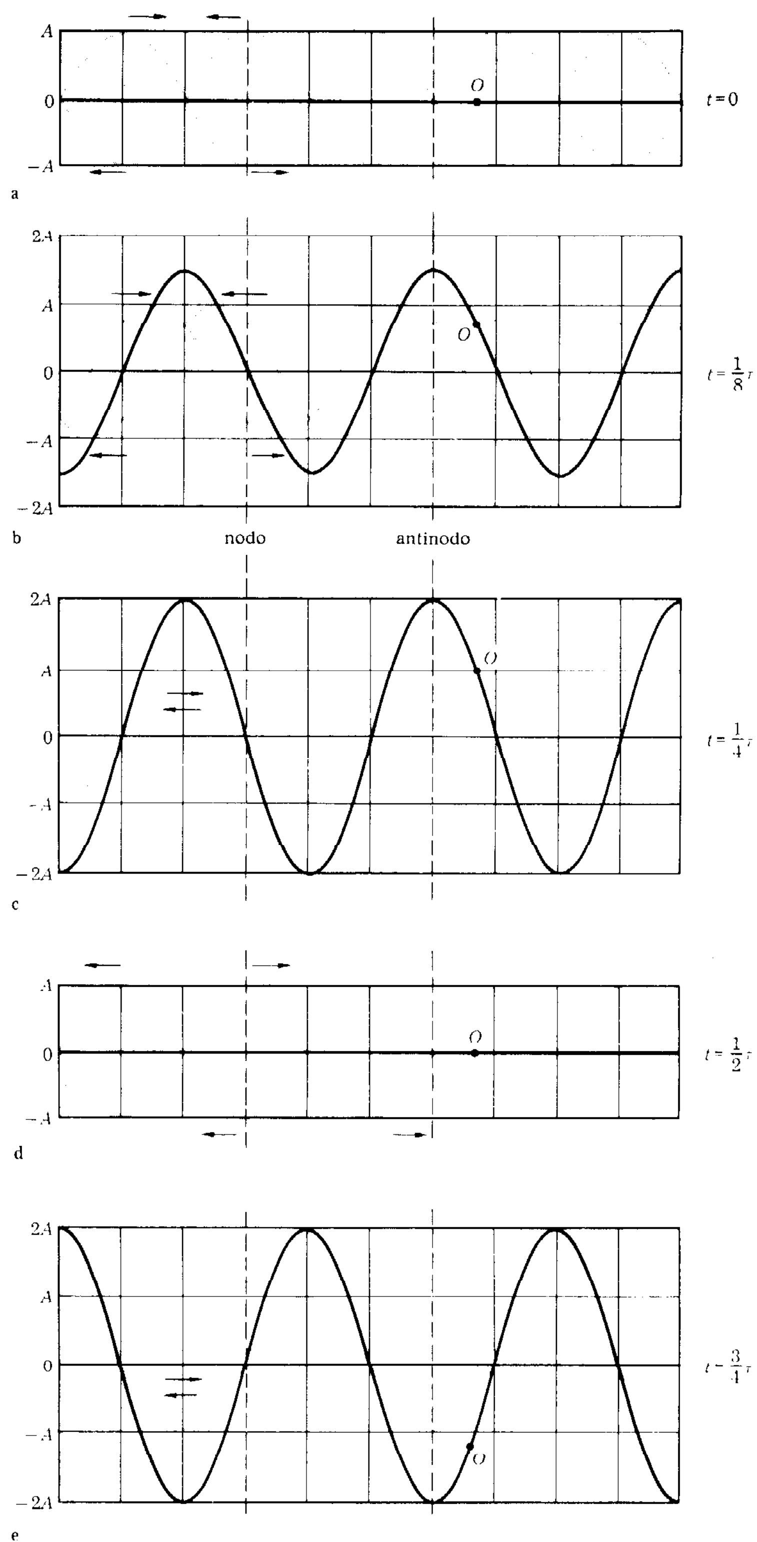


FIGURA 13.20
Superposición de dos ondas sinusoidales de igual amplitud y longitud de onda desplazándose en direcciones opuestas.

Se emplea aquí el símbolo P porque tiene la misma dimensión que la potencia (energía/tiempo). La importancia de este resultado está en que muestra que una onda sinusoidal, que se desplaza en una determinada dirección, transporta energía, y que la velocidad de transporte de esta energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

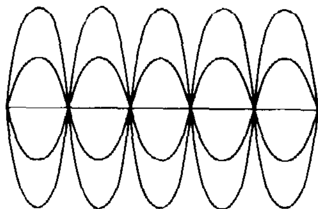


FIGURA 13.21
Desplazamientos de una onda estacionaria en diversos instantes de tiempo.

13.5. ONDAS ESTACIONARIAS

Una configuración de onda de particular interés se forma mediante la superposición de dos ondas sinusoidales de la misma longitud de onda y amplitud que se desplazan en direcciones opuestas. En el instante ($t = 0$), en que dos de estas ondas se hallan en las posiciones que se indica en la Fig. 13.20*a*, su superposición produce un desplazamiento cero en cualquier parte del medio. Un cuarto de período más tarde ($t = 1/4\ \tau$), una onda sinusoidal se ha desplazado 1/4 de longitud de onda hacia la derecha, mientras que la otra se ha desplazado 1/4 de longitud de onda hacia la izquierda. Esto hace que las dos ondas coincidan, tal como se muestra en la Fig. 13.20*c*, de modo que su superposición es una onda sinusoidal de amplitud $2A$.

La figura 13.20*b* muestra que la superposición de las ondas en un tiempo intermedio ($t = 1/8\ \tau$) es también una onda sinusoidal, pero con una amplitud menor que $2A$. Además, las posiciones en las que el desplazamiento resultante es cero son las mismas las dos veces. Las Figs. 13.20*d* y *e* muestran que la situación es semejante en $t = 1/2\ \tau$ y $t = 3/4\ \tau$. Así, cuando las dos ondas sinusoidales se desplazan una a través de la otra, su superposición sigue siendo una onda sinusoidal de *amplitud variable y ceros fijos*.

El desplazamiento resultante del medio en varios momentos se ve en la Fig. 13.21. Este tipo de configuración de onda se llama *onda estacionaria* porque, aunque la configuración cambia con el tiempo, no se desplaza a lo largo de la cuerda. Los ceros, o *nodos*, de la configuración son puntos fijos que están espaciados a intervalos iguales de 1/2 longitud de onda. Un punto del medio localizado en un nodo no tiene oscilación vertical, mientras que un punto a mitad de camino entre dos nodos (llamado *vientre* o *antinodo*) oscila hacia arriba y hacia abajo entre $+2A$ y $-2A$. Un punto situado entre un nodo y un antinodo tiene una amplitud entre 0 y $2A$.

Todos los puntos de una onda estacionaria completan una oscilación en el tiempo τ igual al período de las ondas sinusoidales que la componen. Esto se ve en la Fig. 13.20, en donde el punto O del medio aparece realizando una oscilación en el tiempo τ. (La configuración en el tiempo $t = \tau$ es idéntica a la configuración en el tiempo $t = 0$.)

Las ondas estacionarias son importantes porque se pueden encerrar en un espacio limitado. Éstas son, por lo tanto, las ondas naturales a considerar cuando se estudia el movimiento ondulatorio de un medio finito, como, por ejemplo, una cuerda de guitarra que es precisamente una cuerda de longitud L fija por ambos extremos. Sobre la cuerda no puede existir una sola onda sinusoidal desplazándose en una dirección, porque tal onda requiere que los puntos extremos oscilen. Sin embargo, una onda estacionaria puede existir sobre la cuerda si los extremos de la cuerda coinciden con nodos de la onda. La Fig. 13.22 muestra varias ondas estacionarias posibles que pueden existir sobre una cuerda de longitud L.

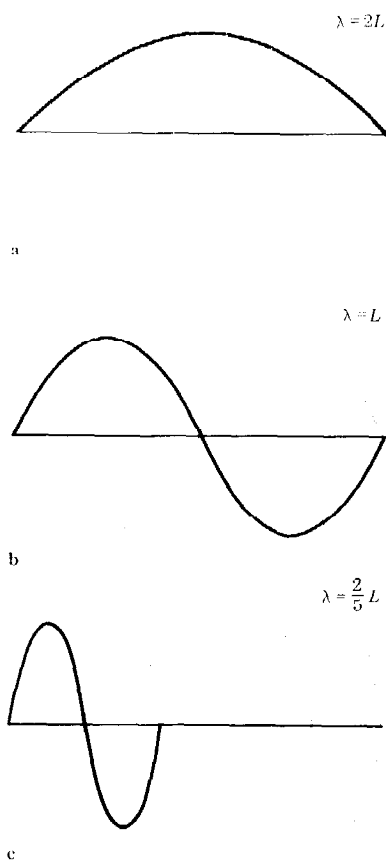


FIGURA 13.22
Algunas posibles ondas estacionarias que pueden existir sobre una cuerda de longitud L sujeta por los dos extremos.

La condición de que los puntos extremos estén en los nodos supone una rigurosa restricción sobre las longitudes de ondas de las posibles ondas estacionarias. Como los nodos ocurren a intervalos de 1/2 λ y como debe haber exactamente un número entero de estas semi-longitudes de onda en la cuerda, la longitud de onda de una onda estacionaria está relacionada con la longitud L de la cuerda por

$$n\tfrac{1}{2}\lambda = L$$

en donde n es un número entero. Así, sólo las longitudes de onda que satisfacen la condición

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad 13.9$$

pueden existir como ondas estacionarias sobre la cuerda. La Fig. 13.22 nos muestra ondas estacionarias con n igual a 1, 2 y 5.

La frecuencia de oscilación de la cuerda está relacionada con la longitud de onda y la velocidad de la onda por la Ec. 13.6. Así, una cuerda fija en ambos extremos puede oscilar sólo con las frecuencias f_n dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} \qquad 13.10$$

La frecuencia más baja, que ocurre cuando $n = 1$, es

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

Se le llama la *fundamental* y corresponde a $L = 1/2\ \lambda$ (Fig. 13.22*a*). En la Ec. 13.8 vemos que todas las otras frecuencias son números enteros múltiplos de f_1:

$$f_n = nf_1$$

Las posibles frecuencias de una cuerda vibrante forman así una sucesión armónica.

Cuando se toca una cuerda de guitarra, la oscilación que se produce es la superposición de muchas ondas estacionarias diferentes. Por supuesto que la frecuencia de cada componente de la onda estacionaria satisface la Ec. 13.8. Normalmente domina la frecuencia fundamental, o sea, tiene una amplitud mucho mayor que la de las otras componentes. La cuerda vibrante hace que el aire oscile, lo cual genera una onda sonora con las mismas frecuencias. El oído oye estas ondas como un tono musical de frecuencia f_1. Las otras frecuencias (llamadas *armónicos*) contribuyen a la calidad del tono.

Todos los instrumentos musicales de cuerda como el violín, la guitarra, el arpa y el piano producen sonidos de este modo. Las diferencias de calidad del sonido producido por estos instrumentos al tocar la misma nota, o sea, oscilando con la misma frecuencia fundamental, se deben a las diferencias de amplitud de los armónicos. En la Fig. 13.23 vemos el espectro del sonido producido por un violín y un piano al tocar la

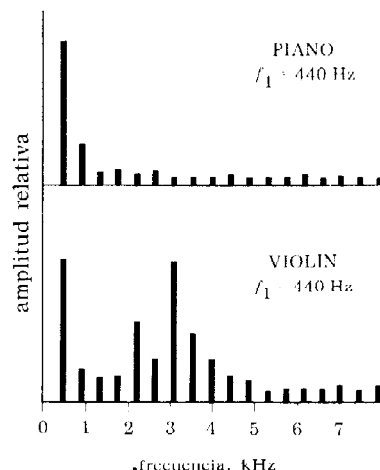


FIGURA 13.23
Espectros de la misma nota (A) tocada por un piano y un violín.

misma nota ($f_1 = 440$ Hz). Cada instrumento produce la misma sucesión de frecuencias armónicas pero con diferentes amplitudes.

Un instrumento de cuerda se afina ajustando la tensión de sus cuerdas. A partir de la Ec. 13.2, se ve que esto cambia la velocidad v de las ondas en la cuerda y por lo tanto, según la Ec. 13.8, esto cambia las frecuencias a las que oscila la cuerda. Una vez afinados, un violín o una guitarra producen diferentes notas presionando sus cuerdas en puntos diferentes, puesto que así cambia la longitud L que queda libre para oscilar. Otros instrumentos, tales como el arpa y el piano, tienen muchas cuerdas de longitudes y densidades diferentes, cada una de las cuales se ajusta para producir una nota distinta.

PROBLEMAS

1. La figura 13.24 muestra una vibración sobre una cuerda en los instantes $t = 0$ y $t = 0,2$ s. (Obsérvese que las escalas vertical y horizontal son diferentes.) (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la vibración? (*b*) ¿Cuál es la velocidad vertical del punto *A* sobre la cuerda durante este tiempo?
Resp. (*a*) 1,5 m/s; (*b*) 30 cm/s.
2. La Fig. 13.25 nos muestra una oscilación sobre una cuerda en el instante $t = 0$. La oscilación se desplaza hacia la derecha con la velocidad de 2,5 m/s. (*a*) Dibujar la forma de la cuerda en el instante $t = 0,6$ s. (*b*) ¿Cuál es la distancia vertical que se desplaza el punto *A* entre $t = 0$ y $t = 0,6$ s? (*c*) ¿Cuál es la velocidad vertical (media) del punto *A* durante este tiempo?
3. (*a*) ¿Cuál es la posición del pico de la vibración de la Fig. 13.24 en el instante $t = 3,0$ s? (véase el problema 1) (*b*) ¿En qué tiempo llegará el pico de la vibración a la posición de 4 m?
Resp. (*a*) 6,0 m; (*b*) 1,66 s.
4. La Fig. 13.26 muestra una onda compleja que se mueve hacia la derecha a lo largo de una cuerda. Dibujar la forma de la cuerda un instante más tarde y determinar qué partes de la cuerda se mueven hacia arriba y cuáles hacia abajo.
5. Una cuerda metálica de guitarra tiene una

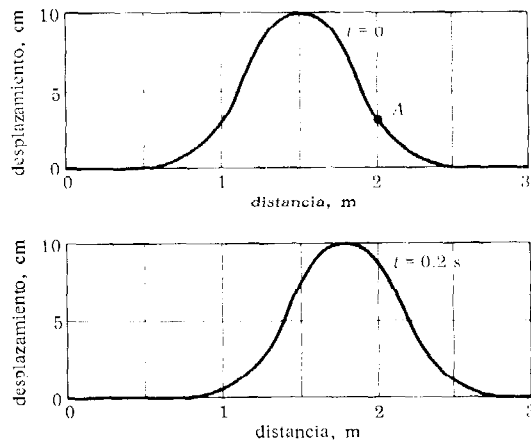


FIGURA 13.24. Problemas 1 y 3.

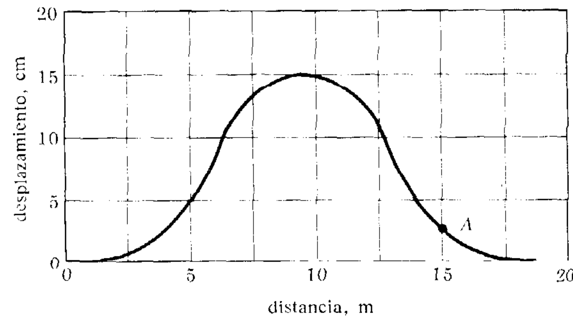


FIGURA 13.25. Problema 2.

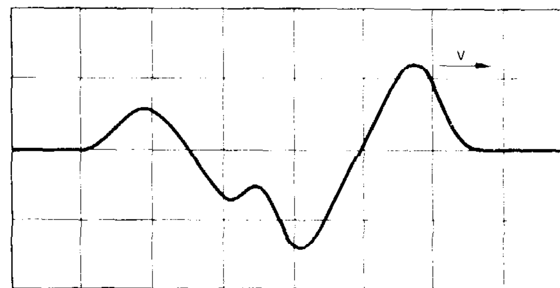


FIGURA 13.26. Problema 4.

densidad lineal $\mu = 3{,}2 \times 10^{-3}$ kg/m. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda cuando su tensión es de 90 N?
Resp. 168 m/s.

6. La velocidad de las ondas transversales en una cuerda es 200 m/s. Si la densidad lineal de la cuerda es 7×10^{-3} kg/m, ¿cuál es la tensión de la cuerda?
7. Cuando la tensión en una cuerda es 75 N, la velocidad de la onda es 140 m/s. ¿Cuál es la densidad lineal de la cuerda?
Resp. $3{,}83 \times 10^{-3}$ kg/m.
8. Cuando la tensión en una cuerda es 100 N, la velocidad de la onda es 120 m/s. ¿Cuál es la velocidad de la onda cuando la tensión es 200 N?
9. La Fig. 13.27 muestra dos vibraciones sobre una cuerda en el instante $t = 0$. Las vibraciones se desplazan una hacia la otra y la velocidad de cada vibración es de 40 cm/s. Dibujar la forma de la cuerda en los instantes $t = 0{,}15$, 0,25 y 0,30 s.

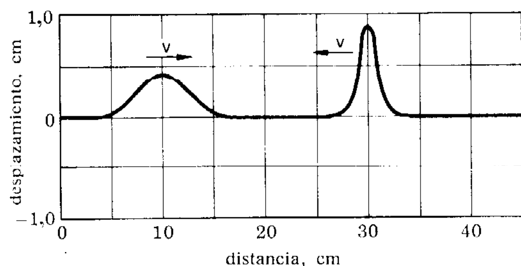


FIGURA 13.27. Problema 9.

10. La Fig. 13.28 muestra dos vibraciones sobre una cuerda en el instante $t = 0$. Las vibraciones se desplazan una hacia otra y la velocidad de cada vibración es de 2,5 m/s. Dibujar la forma de la cuerda en los instantes $t = 0{,}6$, 0,8 y 0,9 s.

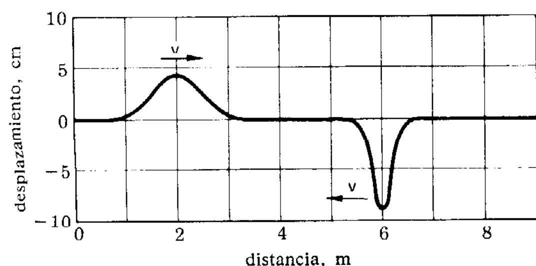


FIGURA 13.28. Problema 10.

11. La Fig. 13.29 muestra una onda sinusoidal que se mueve hacia la derecha sobre una cuerda. La curva de trazo continuo representa la forma de la cuerda en un tiempo $t = 0{,}12$ s. (Obsérvese que las escalas horizontal y vertical son diferentes.) ¿Cuál es (*a*) la amplitud y (*b*) la longitud de onda de esta onda? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de

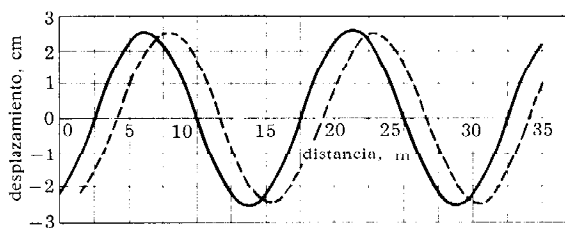


FIGURA 13.29. Problema 11.

la onda? ¿Cuál es (*d*) la frecuencia y (*e*) el periodo de la onda?
Resp. (*a*) 2,6 cm; (*b*) 15 m; (*c*) 12,5 m/s; (*d*) 0,833 Hz; (*e*) 1,2 s.

12. Dibujar una onda sinusoidal con una longitud de onda de 10 cm y una amplitud de 6 cm. Trazar por lo menos 20 puntos con precisión sobre papel cuadriculado, utilizando la tabla de funciones trigonométricas que está en la cubierta posterior.
13. La ecuación de una onda sinusoidal es

$$y = (3{,}5 \text{ cm}) \operatorname{sen} (60^{\circ} \text{ cm}^{-1} x)$$

en la que x e y vienen dadas en centímetros. ¿Cuál es (*a*) la amplitud y (*b*) la longitud de onda de esta onda?
Resp. (*a*) 3,5 cm; (*b*) 6,0 cm.

14. Escribir la ecuación de una onda sinusoidal cuya amplitud es 12 cm y cuya longitud de onda es 30 cm.
15. Para $t = 0$ la ecuación de una onda sinusoidal es

$$y = (0{,}21 \text{ cm}) \operatorname{sen} (0{,}3\,\pi \text{ cm}^{-1} x)$$

donde el argumento del seno está en radianes. Hallar (*a*) la amplitud y (*b*) la longitud de onda de esta onda. (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento en $x = 0{,}5$ cm?
Resp. (*a*) 0,21 cm; (*b*) 6,67 cm; (*c*) 0,0953 cm.

*16. Si la onda descrita en el Prob. 15 se mueve hacia la derecha con una velocidad de

66,7 cm/s, ¿cuál es su desplazamiento en $x = 0,5$ cm y $t = 0,005$ s?

17. ¿Cuál es la velocidad de una onda sinusoidal cuya frecuencia y longitud de onda son respectivamente 500 Hz y 0,5 m? *Resp.* 250 m/s.
18. ¿Cuál es la longitud de onda de una onda sinusoidal cuya velocidad y período son 75 m/s y 0,005 s, respectivamente?
19. ¿Cuál es la frecuencia de una onda sinusoidal cuya velocidad y longitud de onda son 120 m/s y 30 cm, respectivamente? *Resp.* 400 Hz.
20. El espectro de una onda periódica contie- 12, 24, 48 y 96 Hz. ¿Qué armónicos faltan?
21. Una onda periódica está compuesta de tres ondas sinusoidales cuyas frecuencias son 36, 60 y 84 Hz. Si la velocidad de la onda es 180 m/s, ¿cuál es la distancia más corta en la que se repite la forma de la onda? *Resp.* 15 m.
22. (*a*) ¿Cuáles son las razones de las energías (por longitud de onda) de las componentes de Fourier de la onda de la figura 13.17? (*b*) ¿Cuáles son las razones de las energías (por centímetro) de estas componentes?
23. Una cuerda de guitarra de 0,75 m de longitud tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de una onda sobre esta cuerda? (*b*) Para producir otras frecuencias, la longitud efectiva L de la cuerda se acorta presionando sobre ella en un punto por debajo del extremo de la cuerda. ¿Qué longitud se necesita para producir una frecuencia fundamental de 660 Hz? *Resp.* (*a*) 660 m/s; (*b*) 0,50 m.
24. Demostrar que la energía total en una onda estacionaria de amplitud $2A$ es $4\pi^2 L\mu f^2 A^2$, en donde L es la longitud total de la cuerda. (*Sugerencia:* La energía de una onda estacionaria es la suma de las energías de sus dos componentes sinusoidales.)
25. Una cuerda de guitarra de 0,75 m de longitud tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz. La densidad lineal de la cuerda es $2,2 \times 10^{-3}$ kg/m. (*a*) Cuando se pulsa la cuerda fuertemente, el armónico fundamental vibra con un desplazamiento máximo de 0,2 cm. ¿Cuál es la energía de este armónico? (véase Prob. 24). (*b*) ¿Cuál es la energía del tercer armónico si su amplitud es 0,05 cm? (*Sugerencia:* La amplitud de una onda estacionaria es $2A$, en la que A es la amplitud de sus componentes sinusoidales.) *Resp.* (*a*) $1,26 \times 10^{-2}$ J; (*b*) $7,09 \times 10^{-3}$ J.
26. Una cuerda de 20 cm, fija por los dos extremos, está oscilando simultáneamente con sus frecuencias fundamental f_1 y segundo armónico $2f_1$. La amplitud de la fundamental es 5 cm y la amplitud del segundo armónico es 3 cm. En el tiempo $t = 0$, ambos armónicos tienen máximo desplazamiento. (*a*) Dibujar el desplazamiento producido por cada onda separadamente en el instante $t = 0$ y dibujar después la forma de la cuerda estando presentes simultáneamente las dos ondas. (*b*) Dibujar la forma de la cuerda en el tiempo $t = 1/2\tau_1$.
27. Una cuerda de longitud 1,5 m está fija por ambos extremos. Su masa por unidad de longitud es $1,2 \times 10^{-3}$ kg/m. (*a*) Si la cuerda tiene una tensión de 12 N, ¿cuál es la frecuencia de la oscilación fundamental? (*b*) ¿Qué tensión se requiere si el tercer armónico f_3 ha de tener una frecuencia de 500 Hz? *Resp.* (*a*) 33,3 Hz; (*b*) 300 N.
28. Una cuerda de 55 cm de longitud está fija por los dos extremos. Cuando la tensión es 25 N, la frecuencia fundamental es 40 Hz. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la fundamental? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de una onda sobre esta cuerda? (*c*) ¿Cuál es la masa por unidad de longitud de la cuerda?
29. La nota más baja en un piano tiene una frecuencia de 27,5 Hz. La cuerda del piano tiene 2,0 m de longitud y una tensión de 300 N. ¿Cuál es la masa total de la cuerda? *Resp.* 49,6 g.

BIBLIOGRAFÍA

BACKUS, John: «The Acoustical Foundation of Music», W.W. Norton and Company, Inc., New York, 1969. Un relato del movimiento ondulatorio y su relación con la música. Éste ha sido siempre un tema fascinante

Capítulo 14 El sonido

El sonido es una onda mecánica longitudinal que se propaga a través del aire, el agua y otros medios materiales. Es de vital importancia en la vida de todos los animales superiores, los cuales tienen órganos especializados para producir y detectar estas ondas. Por medio del sonido, los animales (especialmente el hombre) pueden comunicarse entre sí y obtener información acerca del medio que les rodea.

En este capítulo se discuten los principios físicos básicos de las ondas mecánicas longitudinales y la relación entre sus propiedades físicas y las sensaciones psicofisiológicas que producen en un oyente. La física de la producción del habla, que se da en el último apartado, proporciona una oportunidad para revisar la mayoría de los principios generales del movimiento ondulatorio y del sonido tratados aquí y en el capítulo 13.

14.1. ONDAS MECANICAS LONGITUDINALES

En el capítulo 13 se vio el movimiento de las ondas en general, usando como ejemplo una onda transversal sobre una cuerda estirada. Sin embargo, como una cuerda es un medio unidimensional solamente, estos ejemplos deben ampliarse de modo que se pueda entender la naturaleza de una onda en un medio tridimensional.

Las ondas sobre la superficie del agua son un ejemplo familiar de una onda en dos dimensiones. La Fig. 14.1 muestra una onda transversal tridimensional que se mueve en sentido paralelo al eje z, mientras que el medio oscila paralelamente al eje x. A esto se llama una *onda plana* porque todos los puntos en un plano perpendicular al eje z tienen el mismo desplazamiento en el mismo tiempo. Las ondas planas se ca-

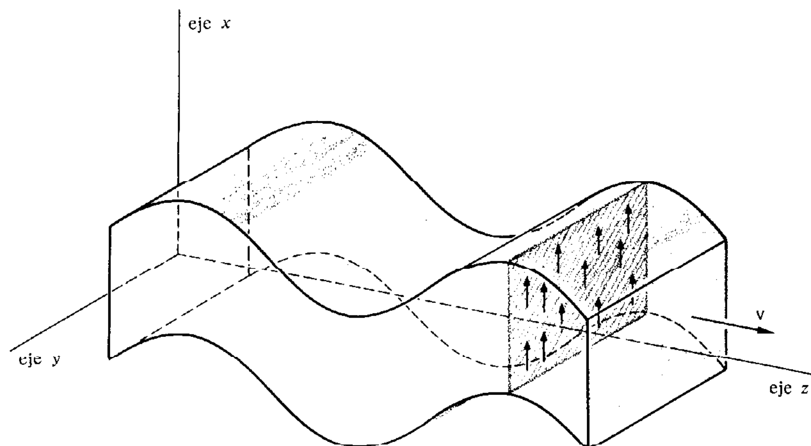


FIGURA 14.1
Una onda plana sinusoidal.

racterizan también porque tienen una sola dirección de propagación. Si el desplazamiento de una onda plana varía como el seno a lo largo de su dirección de propagación, la onda es una *onda plana sinusoidal*. Ésta es análoga a una onda sinusoidal unidimensional.

Cuando se lanza una piedra en un estanque, las ondas son círculos concéntricos que se extienden en todas direcciones desde donde cayó la piedra. La onda análoga en tres dimensiones es una *onda esférica* que se extiende en esferas concéntricas desde un punto central (figura 14.2). En una onda esférica transversal, cada punto de una capa esférica determinada oscila paralelamente a la capa, mientras que en una onda esférica longitudinal los puntos de una capa oscilan radialmente hacia adentro y hacia afuera, alrededor de sus posiciones de equilibrio. Si el desplazamiento de una onda esférica varía como el seno a lo largo de cada línea radial, la onda es una *onda esférica sinusoidal*.

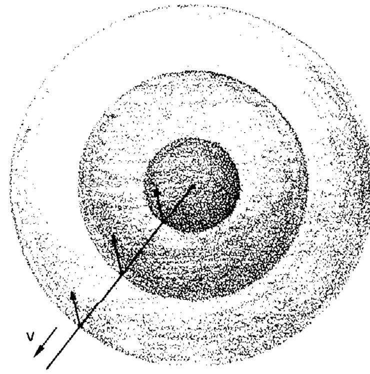


FIGURA 14.2
Una onda esférica.

Las ondas mecánicas longitudinales pueden propagarse a través de medios sólidos, líquidos y gaseosos, pero las ondas mecánicas transversales sólo pueden propagarse a través de sólidos. Esto es así porque los puntos de una onda transversal oscilan paralelos a un plano (Fig. 14.1), lo cual requiere que el medio ejerza fuerzas paralelas al plano. Un medio sólido puede ejercer tales fuerzas, pero un fluido no (propiedad 1 de los fluidos, Apart. 7.2). Por consiguiente, sólo las ondas longitudinales se pueden propagar en medios fluidos, como el agua y el aire.

Hemos estado utilizando la palabra «punto» en el sentido de un pequeño trozo de medio, pero quizás sería mejor utilizar la palabra «elemento», porque no estamos utilizando el punto en el sentido matemático de la palabra. Aquí lo que queremos designar es una región pequeña del medio que se supone que se desplaza como una sola unidad. Claramente el tamaño de tal región, o *elemento*, debe ser pequeño comparado con las longitudes de onda de las ondas que se propagan a través del medio, porque si el elemento fuera demasiado grande las diferentes partes podrían tener diferentes desplazamientos en el mismo tiempo, y el elemento no se desplazaría como una unidad. En la cuerda que aparece en la Fig. 14.3, la región R' es demasiado grande para ser un elemento porque las diferentes partes de ella tienen claramente diferentes desplazamientos. Sin embargo, la región R es lo suficientemente pequeña para ser un elemento porque la diferencia en los desplazamientos de sus partes es despreciable.

Por otro lado, un elemento debe ser lo suficientemente grande para contener miles de millones de moléculas. Si un elemento contuviese solamente unas cuantas moléculas, su movimiento aleatorio haría que el propio elemento se moviese a tirones, de modo que no tendría una posición de equilibrio bien definida. Sin embargo, los movimientos aleatorios de miles de millones de moléculas tienden a anularse mutuamente y, por lo tanto, si el elemento es lo suficientemente grande, puede tener una posición de equilibrio definida. Como las moléculas son tan pequeñas, es posible tener elementos de un tamaño que satisfaga ambas condiciones.

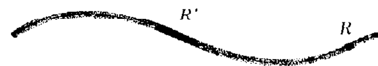


FIGURA 14.3
Una región R de una cuerda que es lo suficientemente pequeña como para ser un elemento y una región R' que no lo es.

Ejemplo 1. ¿Cuál es el volumen ocupado por 10^9 moléculas de aire en condiciones normales?

¿Qué volumen de aire satisface las condiciones para un elemento?

Como 1 mol contiene 6×10^{23} moléculas, un elemento con 10^9 moléculas es

$$n = \frac{10^9}{6 \times 10^{23}} = 1{,}6 \times 10^{-13} \text{ mol}$$

El volumen V ocupado por n moles de un gas ideal viene dado por la Ec. 8.9 como

$$V = \frac{nRT}{p}$$

Así, en un gas con una presión de 1 atm ($p = 1{,}01 \times 10^5$ N/m²) y una temperatura de 0 °C ($T = 273$ K), estas 10^9 moléculas ocupan el volumen

$$V = \frac{(1{,}6 \times 10^{-13})(8{,}3 \text{ J/K})(273 \text{ K})}{1{,}01 \times 10^5 \text{ N/m}^2}$$
$$= 3{,}6 \times 10^{-15} \text{ m}^3$$

Éste es el volumen de un cubo de arista $1{,}6 \times 10^{-5}$m $= 1{,}6 \times 10^{-3}$ cm, que es mucho menor que cualquier longitud de onda que consideremos. Por lo tanto, un volumen de aire de este tamaño satisface las condiciones para un elemento.

Cuando una onda longitudinal se propaga a través del aire, los elementos de aire se desplazan hacia adelante y hacia atrás alrededor de su posición de equilibrio. La Fig. 14.4 *a* representa los desplazamientos de una onda sinusoidal y la Fig. 14.4*b* muestra las direcciones en las que se desplazan los elementos de aire. En la Fig. 14.4*a*, un desplazamiento positivo corresponde a un desplazamiento longitudinal de un elemento hacia la derecha y un desplazamiento negativo corresponde a un desplazamiento de un elemento hacia la izquierda.

Obsérvese que los elementos que están a ambos lados del nodo A de la Fig. 14.4 se desplazan hacia el nodo, de modo que la densidad y la presión del aire en este punto están por encima de lo normal. Del mismo modo, los elementos que están a ambos lados del nodo B se alejan de éste, de modo que la densidad y la presión en este punto están por debajo de lo normal. De hecho, la presión oscila alrededor de su valor normal, al mismo tiempo que los elementos oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio. Si p_0 es la presión normal y p es la presión en un punto concreto de la onda, la variación de presión y_p es por definición

$$y_p = p - p_0$$

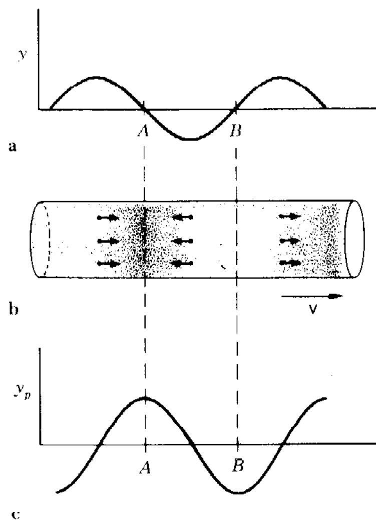


FIGURA 14.4
Desplazamientos en una onda longitudinal. (*a*) Gráfico de los desplazamientos longitudinales de los elementos de un gas en función de sus posiciones de equilibrio. (*b*) Desplazamientos de los elementos del gas. (*c*) Gráfico de la variación de presión del gas en función de la posición.

Una onda longitudinal es tanto una configuración de variaciones de presión como una configuración de desplazamientos.

La variación de presión para la onda de la Fig. 14.4*b* se muestra en la Fig. 14.4*c*. Es una onda sinusoidal, como la onda de desplazamientos de la Fig. 14.4*a*, con excepción de que sus vientres tienen lugar en los nodos de la onda de desplazamiento y viceversa. La onda de presión se puede escribir

$$y_p = A_p \text{sen}\left(\frac{x}{\lambda} 360°\right) = A_p \text{sen}\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \tag{14.1}$$

donde la amplitud de presión A_p es la diferencia máxima entre la presión en la onda y la presión normal. A menudo es útil pensar que una onda longitudinal es una onda de presión más que una onda de desplazamiento, porque lo que normalmente se detecta es la variación de presión.

El oído humano puede detectar como *sonido* ondas mecánicas longitudinales dentro del intervalo de frecuencias comprendido entre 20 y 20 000 Hz. Las ondas con frecuencias por encima de 20 000 Hz se llaman *ultrasónicas* y las que tienen frecuencias por debajo de 20 Hz se llaman *infrasónicas*. Como esta clasificación depende de las propiedades del mecanismo de audición del hombre, no tiene significación física fundamental. Sin embargo, tiene una significación práctica porque para detectar ondas ultrasónicas e infrasónicas se necesita un equipo especial.

Velocidad del sonido

Las ondas longitudinales o para ser más breves, el sonido, se propaga a través de diferentes medios con una velocidad característica del medio

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{sólido} \qquad 14.2$$

donde E es el módulo de Young (Apart. 10.2) del sólido y ρ es su densidad. En un medio líquido la velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{líquido} \qquad 14.3$$

donde B es el módulo de compresibilidad (Apart. 10.2). En un medio gaseoso la velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad \text{gas} \qquad 14.4$$

donde p es la presión no perturbada y γ es igual a c_p/c_v, la razón de los calores específicos del gas a presión constante y a volumen constante (Apart. 11.2). Para gases diatómicos tales como el oxígeno, el nitrógeno y el aire, γ es igual a 7/5, o sea 1,4. La tabla 14.1 da la velocidad del sonido para varias sustancias.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el intervalo de longitud de onda del sonido audible?

El intervalo de frecuencias es de 20 a 20 000 Hz, y de acuerdo con la tabla 14.1 la velocidad del sonido en el aire (a 20 °C) es 343 m/s, de modo que el intervalo de longitudes de onda audibles se extiende desde

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{20\,000 \text{ Hz}} = 0{,}0171 \text{ m}$$

hasta

$$\lambda = \frac{343 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17{,}1 \text{ m}$$

TABLA 14.1. **Velocidad del sonido en varias sustancias.** Se da la temperatura para las sustancias en las que la velocidad varía considerablemente con este parámetro. La velocidad en un sólido depende de la composición y estructura del sólido, por lo que sólo se pueden dar valores aproximados.

Sustancia	Temperatura °C	Velocidad m/s
Gases		
Dióxido de carbono	0	259
Oxígeno	0	316
Aire	0	331
	20	343
Nitrógeno	0	334
Helio	0	965
Líquidos		
Mercurio	25	1450
Agua	25	1498
Agua del mar	25	1531
Sólidos		
Goma		1800
Plomo		2100
Lucita		2700
Oro		3000
Hierro		5000-6000
Vidrio		5000-6000
Granito		6000

Ejemplo 3. Calcular la velocidad del sonido en el agua utilizando los datos de las tablas 7.2 y 10.4 y comparar el resultado con el valor dado en la tabla 14.1.

Según las tablas 7.2 y 10.4 la densidad y el módulo de compresibilidad del agua son, respectivamente, 996 kg/m³ y $2{,}2 \times 10^9$ N/m², de modo que la Ec. 14.3 da

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}2 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{996 \text{ kg/m}^3}} = 1{,}49 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Este resultado concuerda con el valor de la tabla 14.1 dentro de un error del 1 %.

14.2. INTENSIDAD

La «fuerza» de un sonido (sonoridad) está relacionada con la energía que transporta la onda sonora. La sonoridad es una impresión subjetiva que el que escucha atribuye a un sonido particular, mientras que la energía de la onda sonora es una magnitud física objetiva. La relación entre estas magnitudes es el objeto de estudio de una rama de la psicología llamada *psicofísica*.

Definición. La *intensidad* I de una onda es la energía que atraviesa una área unidad en la unidad de tiempo. Se determina experimentalmente midiendo la energía E que incide sobre un detector (por ejemplo un micrófono) en un tiempo t. Entonces la intensidad es igual a esta energía dividida por el tiempo y por el área A del detector:

$$I = \frac{E}{At} \qquad 14.5$$

En el sistema SI, la unidad de intensidad es joules por metro cuadrado por segundo ($J/m^2 \cdot s$), o watts por metro cuadrado (W/m^2).

Ejemplo 1. Durante un intervalo de 5 s un micrófono con una área efectiva de 3 cm^2 recibe $1{,}5 \times 10^{-11}$ J de energía sonora. ¿Cuál es la intensidad del sonido?

De acuerdo con la Ec. 14,5 la intensidad del sonido es

$$I = \frac{E}{At} = \frac{1{,}5 \times 10^{-11}\ \text{J}}{(3 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(5\ \text{s})} = 10^{-6}\ \text{J/m}^2 \cdot \text{s} = 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

Ésta es más o menos la intensidad del sonido en una conversación normal.

En una onda sinusoidal la intensidad está relacionada con la amplitud de presión A_p por

$$I = \frac{A_p{}^2}{2\rho v} \qquad 14.6$$

en donde ρ es la densidad del medio y v es la velocidad de la onda en el medio.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la amplitud de presión del sonido con una intensidad de 10^{-6} W/m^2?

Según las tablas 7.2 y 14.1 la densidad del aire y la velocidad del sonido en el aire son, respectivamente, 1,2 kg/m^3 y 343 m/s, de modo que la Ec. 14.6 nos da la amplitud de presión

$$A_p = \sqrt{2\rho v I} = \sqrt{(2)(1{,}2\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(10^{-6}\ \text{W/m}^2)}$$
$$= 2{,}86 \times 10^{-2}\ \text{N/m}^2$$

Ésta es la diferencia que existe entre la presión máxima en la onda y la presión del aire no perturbado. Como la presión normal del aire es alrededor de 10^5 N/m^2, la presión en la onda cambia en sólo 0,286 partes por millón.

Escala decibélica

Aunque la sonoridad con que se percibe un sonido aumenta con su intensidad, la relación entre sonoridad e intensidad está lejos de ser lineal. Por ejemplo, en una sala de conferencias, la intensidad de voz de un conferenciante puede ser 100 veces mayor en la parte delantera de la sala que en la parte trasera; sin embargo, un oyente que se desplace de la parte delantera a la trasera de la sala solamente experimenta una ligera disminución de la sonoridad.

Debido al extenso intervalo de intensidad sonora en el que es sensible el oído humano, la intensidad se mide habitualmente en una escala logarítmica de *nivel de intensidad* denominada *escala decibélica* (d*B*). En esta escala el nivel de intensidad β de un sonido de intensidad I es

TABLA 14.2. **Niveles e intensidades sonoras de algunos sonidos comunes.**

Nivel sonoro dB	Intensidad W/m^2	Sonido
0	10^{-12}	Umbral de audición
10	10^{-11}	Susurro de las hojas
20	10^{-10}	Cuchicheo (a 1 m de distancia)
30	10^{-9}	Casa tranquila
40	10^{-8}	Casa normal, oficina tranquila
50	10^{-7}	Oficina normal
60	10^{-6}	Conversación normal, tráfico normal
70	10^{-5}	Oficina ruidosa
80	10^{-4}	Tráfico intenso, interior de un coche en medio del tráfico
90	10^{-3}	Dentro de un ferrocarril subterráneo
100	10^{-2}	Taller de maquinaria
120	10^{0}	Taladro neumático (a 2 m) umbral del dolor
140	10^{2}	Avión a reacción (a 30 m)

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad 14.7$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 es la intensidad de referencia estándar.
El oído humano puede detectar sonidos con intensidades que van desde 10^{-12} a 1 W/m^2. En la escala decibélica este intervalo se extiende desde

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-12}\ W/m^2}{10^{-12}\ W/m^2} = 10 \log 1 = 0\ dB$$

hasta

$$\beta = 10 \log \frac{1\ W/m^2}{10^{-12}\ W/m^2} = 10 \log 10^{12} = 120\ dB$$

A niveles de intensidad por encima de 120 dB la sensación cambia de sonido a dolor; es decir, la onda se siente más que se oye.

La tabla 14.2 da los niveles de intensidad β y las intensidades I de algunos de los sonidos más corrientes. Para hacer la conversión de decibelios a watts por metro cuadrado se puede utilizar o bien esta tabla o la Ec. 14.7.

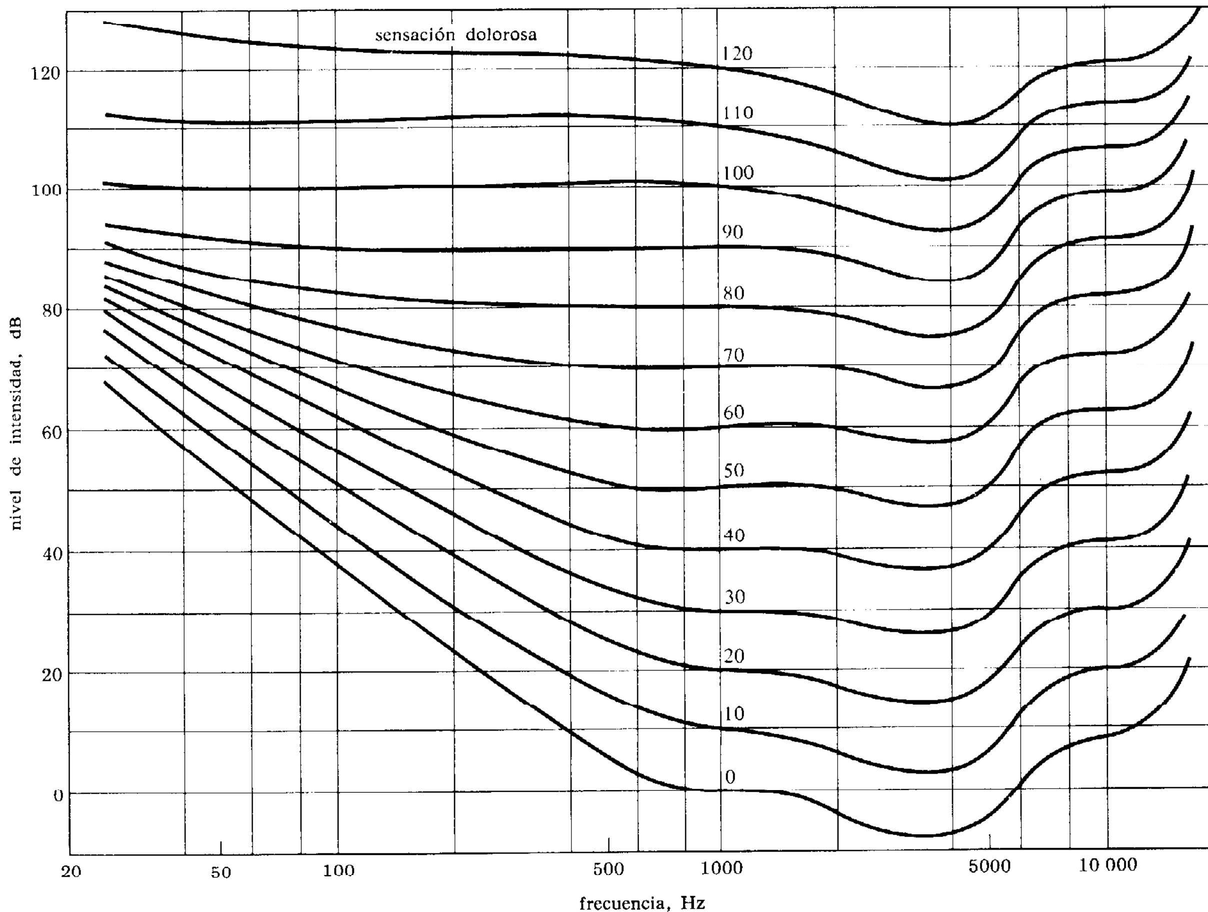
Psicofísica de la audición

Aunque la razón de la intensidad del sonido detectable más fuerte al más suave es 10^{12}, no sabemos nada de un factor 10^{12} en la sonoridad de los sonidos que oímos. Esto es así porque la relación entre intensidad, que es un atributo físico del sonido, y sonoridad, que es un atributo subjetivo, involucra procesos fisiológicos y psicológicos en el oído y en el cerebro. Los experimentos psicofísicos sirven para medir la relación entre el atributo físico de un estímulo y el atributo subjetivo que percibe el individuo.

Como ejemplo, vamos a ver el siguiente experimento psicofísico. Una persona compara un sonido estándar, supongamos que de una frecuencia de 1000 Hz y un nivel de intensidad de 60 dB, con un sonido de prueba que tiene una frecuencia f. La intensidad del sonido de prueba se varía hasta que la persona piensa que tiene la misma sonoridad que el sonido estándar de 1000 Hz. Esto se repite con una serie de frecuencias hasta obtener una curva como la 60 de la Fig. 14.5. Cada punto de la curva da el nivel de intensidad en el que se piensa, que una señal de la frecuencia correspondiente, tiene la misma sonoridad que la señal estándar (1000 Hz a 60 dB). Por ejemplo, una señal de 100 Hz tiene que tener un nivel de intensidad de 72 dB para que se piense que es tan fuerte como una señal de 1000 Hz a 60 dB. La Fig. 14.5 muestra también las curvas producidas cuando la señal estándar de 1000 Hz se da a diferentes niveles de intensidad. Por medio de estas curvas se ve que la audición es más aguda para sonidos de frecuencia comprendida entre 3000 y 4000 Hz.

En otro experimento, se disminuye la intensidad de una señal de prueba de frecuencia f hasta que la persona ya no la oye. Repitiendo esto en una serie de frecuencias se obtiene una curva de la agudeza de oído

FIGURA 14.5
Relación psicofísica de la sonoridad con la intensidad y la frecuencia. Cada curva da las intensidades a las que sonidos de diferentes frecuencias tienen la misma sonoridad aparente. El nivel de sonoridad se hace igual, arbitrariamente, al nivel de intensidad de una señal de 1000 Hz. *(Según P. B. Denes y E. N. Pinson, «The Speech Chain», Copyright, 1963, Bell Telephone Laboratories, Incorporated. Usado con permiso.)*



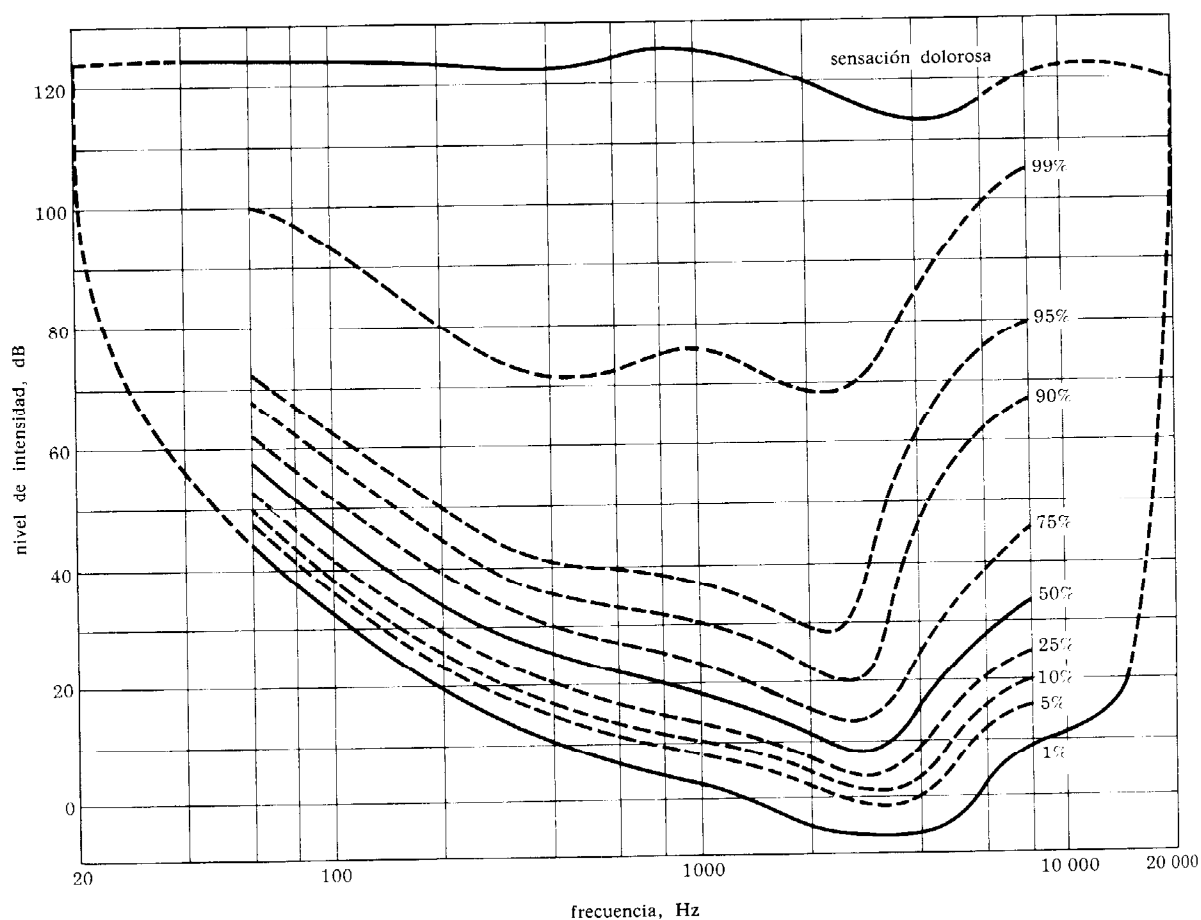


FIGURA 14.6
Perfiles de la agudeza de audición de la población de EE. UU.
El número que aparece a la derecha de cada curva es el porcentaje de la población que puede percibir todas las señales que están por debajo de la curva.

de la persona. La Fig. 14.6 resume los resultados de miles de estos experimentos llevados a cabo por el Servicio de Salud Pública de Estados Unidos. Cada curva aparece marcada por el porcentaje de personas cuya agudeza auditiva estaba por debajo de esa curva. Así, el 99 % de la población podía oír señales por debajo de la curva del 99 %, mientras que solamente el 10 % podía oír señales por debajo de la curva del 10 %. (El 1 % de la población que no puede oír por debajo del 99 % necesita aparatos de audición puesto que no pueden oír una conversación normal a 60 dB.) La curva del 1 % se toma a menudo como la estándar para los que tienen un oído normal, o

sea, inalterado. Solamente los niños y los jóvenes pueden oír a este nivel, puesto que la agudeza disminuye con la edad. Estas curvas tienen una depresión entre los 3000 y 4000 Hz, lo cual indica que la audición es más aguda en este intervalo de frecuencias.

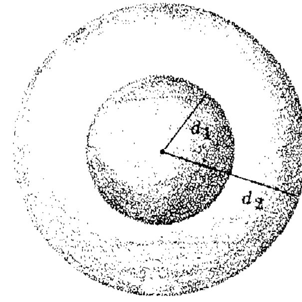


FIGURA 14.7
El sonido procedente de una fuente puntual se propaga radialmente en todas direcciones.

Variación de la intensidad con la distancia

La intensidad del sonido producido por una fuente disminuye con la distancia a la fuente. Si la fuente es pequeña, el sonido se propaga desde ella en ondas esféricas (Fig. 14.7), en las que la intensidad I_1 es la misma en todos los puntos que se hallan a la misma distancia d_1 de la fuente. Como la intensidad es la energía que atraviesa una área unidad en la unidad de tiempo, la energía por segundo, o potencia P_1, que pasa a través de la esfera de radio d_1 centrada en la fuente es el producto de la intensidad I_1 a esta distancia y el área $A_1 = 4\pi d_1^2$ de la esfera:

$$P_1 = A_1 I_1 = 4\pi d_1^2 I_1$$

De modo análogo, la potencia P_2 que pasa a través de una esfera de radio d_2 es

$$P_2 = 4\pi d_2^2 I_2$$

Al propagarse desde d_1 a d_2, el aire absorbe parte de la energía de la onda, pero esta energía es pequeña si la distancia de d_1 a d_2 no es demasiado grande. Si hacemos caso omiso de esta pérdida de energía, toda la energía que pasa a través de la esfera 1 debe pasar también a través de la esfera 2. Por lo tanto, la energía por segundo P_1 que pasa a través de la esfera 1 es igual a la energía por segundo P_2 que pasa a través de la esfera 2, de modo que de las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$4\pi d_1^2 I_1 = 4\pi d_2^2 I_2$$

o también

$$I_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} I_1 \qquad 14.8$$

Esta ecuación se utiliza para determinar la intensidad a la distancia d_2 conociendo la intensidd I_1 a la distancia d_1.

Ejemplo 3. La tabla 14.2 muestra que la intensidad de un avión a reacción es 10^2 W/m² a una distancia de 30 m. ¿Cuáles son la intensidad y el nivel de intensidad a 5000 m del avión?
Según la Ec. 14.8 la intensidad a 5000 m del avión es

$$I_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} I_1 = \left(\frac{30 \text{ m}}{5000 \text{ m}}\right)^2 (10^2 \text{ W/m}^2) = 3{,}6 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

La tabla 14.2 muestra que ésta corresponde a un nivel de intensidad comprendido entre 90 y 100 dB. Para obtener el nivel de intensidad exacto utilizamos la Ec. 14.7:

$$\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{3{,}6 \times 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}$$
$$= 10 \log (3{,}6 \times 10^{9}) = 10 \log 3{,}6 + 10 \log 10^{9}$$

En la tabla II.1 del apéndice II vemos que el logaritmo de 3,6 es 0,556, de modo que

$$\beta = (10)(0{,}556 + 9) = 95{,}6\ \mathrm{dB}$$

OBSERVACIÓN. La Ec. 14.8 muestra que la intensidad I_2 disminuye en razón inversa al cuadrado de la distancia d_2 a la fuente. Así, pues, la intensidad obedece a una ley inversocuadrática semejante a las leyes de las fuerzas gravitatoria (Apart. 5.3) y eléctrica (Apart. 17.2).

14.3. ONDAS ESTACIONARIAS Y RESONANCIA

Ondas estacionarias

Al igual que una cuerda fija por ambos extremos, el aire dentro de una cavidad sólo puede vibrar a distintas frecuencias que son características de la cavidad. En el Apart. 13.5 vimos que una cuerda fija por los dos extremos vibra solamente con frecuencias que corresponden a ondas estacionarias en la cuerda. Del mismo modo, en una cavidad sólo pueden existir ondas estacionarias de ciertas longitudes de onda y frecuencias. Las frecuencias de estas ondas dependen del tamaño y la forma de la cavidad, pero sólo son fáciles de calcular las de cavidades de geometría muy simple.

Un caso especialmente importante es el de una cavidad cilíndrica de longitud L abierta por ambos extremos (tubo abierto). Soplando aire por uno de los extremos del cilindro se producen ondas que se propagan por el cilindro. Si el diámetro del cilindro es pequeño, comparado con la longitud de onda de las ondas, se reflejarán en el otro extremo del cilindro y volverán hacia atrás. La superposición de ondas de idéntica amplitud y frecuencia, que se propagan en direcciones opuestas, produce una configuración de ondas estacionarias (Apart. 13.5). La presión en cada extremo está fijada al valor de la presión atmosférica, puesto que los extremos están abiertos a la atmósfera. Por lo tanto sólo podrá haber en el cilindro ondas estacionarias que tengan nodos de presión en ambos extremos (Fig. 14.8). La situación es idéntica a la de una cuerda fija por ambos extremos: solamente son posibles las ondas estacionarias que tienen longitudes de onda dadas por

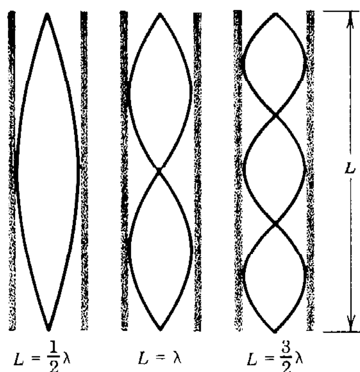


FIGURA 14.8
Ondas estacionarias en un tubo abierto. Las curvas muestran la variación de presión dentro del tubo.

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \text{o} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

en donde n es un número entero. Las frecuencias de estas ondas son

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} \qquad 14.9$$

Este conjunto, como las frecuencias de una cuerda vibrante, incluye la fundamental $f_1 = v/2L$ y todos los armónicos $f_n = nf_1$.

Los tubos de órganos y otros instrumentos de viento, incluyendo la

voz humana (Apart. 14.4), producen tonos estableciendo ondas estacionarias en las cavidades. Sin embargo, las frecuencias características constituyen una sucesión armónica sólo si la cavidad es un cilindro perfecto abierto por ambos extremos (tubo abierto). Para cavidades de diferente forma, las frecuencias no forman una sucesión armónica. Por ejemplo, algunos tubos de órgano tienen un extremo cerrado y el otro abierto (tubo cerrado). Un tubo de esta índole tiene un vientre de presión en el extremo cerrado porque el aire tiene aquí un desplazamiento cero. (La Fig. 14.4 muestra que la presión tiene un vientre siempre que el desplazamiento presenta un nodo.) Entonces, las ondas estacionarias características tienen un nodo en el extremo abierto y un vientre en el extremo cerrado. La Fig. 14.9 muestra las tres primeras ondas estacionarias que satisfacen esta condición. Estas ondas tienen 1/4, 3/4, 5/4, ... de longitud de onda en el tubo, de modo que

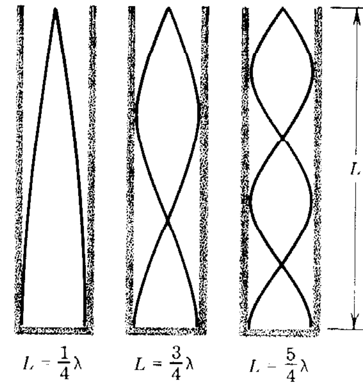


FIGURA 14.9
Ondas estacionarias en un tubo cerrado. Las curvas muestran la variación de presión dentro del tubo.

$$L = m\frac{\lambda_m}{4} \qquad \text{o} \qquad \lambda_m = \frac{4L}{m}$$

en donde m es un número entero impar ($m = 1$,3, 5, 7, ...). Las frecuencias características son

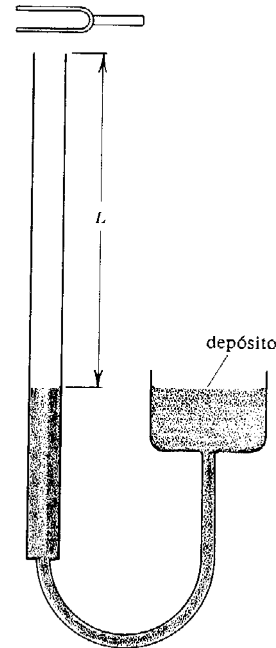
$$f_m = \frac{m\text{v}}{4L} \qquad 14.10$$

La frecuencia fundamental es $f_1 = \text{v}/4L$, que es la mitad de la frecuencia fundamental de un tubo abierto de la misma longitud. Los sobretonos (o armónicos) del tubo cerrado están compuestos solamente de los armónicos impares: f_1, $3f_1$, $5f_1$, ...

Resonancia

Para establecer una onda estacionaria en una cavidad, sólo se necesita que el aire de la cavidad vibre con una frecuencia cercana a una de las frecuencias características de la cavidad. Para esto es muy útil un diapasión porque al golpearlo vibra con una frecuencia fija f y produce ondas sonoras de la misma frecuencia. Sin embargo, cuando el diapasón vibra libremente, sólo una pequeña fracción de su energía mecánica se transforma en sonido y el resto se disipa en forma de calor. Como consecuencia, un diapasón que vibra libremente produce una onda sonora de baja intensidad.

Sin embargo, si se coloca un diapasón que vibra cerca del extremo abierto de una cavidad, que tiene una frecuencia característica casi igual a f, una gran parte de su energía mecánica se transforma en una onda estacionaria de gran amplitud dentro de la cavidad. Este fenómeno, llamado *resonancia*, se demuestra fácilmente por medio de un cilindro conectado a un depósito de agua, tal como aparece en la Fig. 14.10 Encima del extremo abierto del cilindro se coloca un diapasón, mientras la longitud L del tubo cerrado se ajusta subiendo y bajando el depósito. Cuando la longitud del tubo cerrado es tal que tiene una frecuencia característica igual a la frecuencia del diapasón, el sonido se hace claramente más alto porque al resonar, una fracción mayor de la energía mecánica del diapasión se convierte en energía sonora.



FIGUR14.10
Un cilindro conectado a un depósito lleno de agua. Si se varía la altura del depósito se varía también la longitud L de la columna de aire del cilindro.

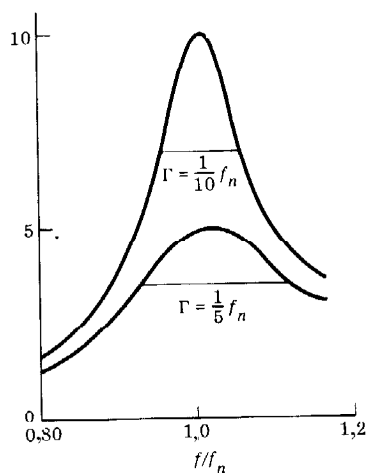


FIGURA 14.11
Dos curvas de respuesta típicas.

Los instrumentos de cuerda, como las guitarras y violines, tienen una cavidad resonante detrás de las cuerdas para hacer más intenso el sonido. Por supuesto que las frecuencias características de la cavidad no pueden ser iguales a todas las frecuencias tocadas en las cuerdas, pero, afortunadamente, puede haber resonancia incluso cuando la frecuencia estimulante f no es exactamente igual a una frecuencia característica f_n. Cuando una cuerda que vibra libremente produce un sonido de una amplitud A_p a una frecuencia f, la cavidad vibra a la misma frecuencia f con otra amplitud A'_p. La razón

$$r = \frac{A'_p}{A_p}$$

se llama *factor de respuesta*. Cuando r es mayor que 1, la cavidad amplifica el sonido.

El factor de respuesta r es mucho mayor que 1 cuando f es próxima a una frecuencia característica f_n de la cavidad, y r es pequeño cuando f está lejos de f_n. Esto se ve en las curvas de respuesta de la figura 14.11, que es una gráfica de r en función de f/f_n para dos casos típicos. Estas curvas presentan un pico cuando $f/f_n = 1$, o sea, cuando la frecuencia estimulante f es igual a la frecuencia característica f_n. Por definición, la magnitud Γ† es la anchura de una curva de respuesta a siete décimas de su valor máximo. Es decir, r está dentro del 70 % de su valor máximo cuando f se halla entre $f_n - 1/2\ \Gamma$ y $f_n + 1/2\ \Gamma$. Se puede demostrar que el valor máximo de r es igual a f_n/Γ, de modo que una curva de respuesta ancha (Γ grande) tiene menos amplificación que una curva de respuesta estrecha (Γ pequeña). Cuando se diseña un instrumento de cuerda, las frecuencias f_n y las anchuras Γ_n de la cavidad deben ser tales que todas las notas resuenen. Las frecuencias f_n dependen del tamaño y de la forma de la cavidad, y las anchuras Γ_n dependen del material del que está hecha la cavidad. Sin embargo, los detalles de la relación entre el diseño y la función de los instrumentos musicales se han estudiado detalladamente sólo desde hace muy poco tiempo. Los físicos esperaban mejorar el diseño de estos instrumentos aportando la moderna tecnología al viejo arte de fabricar instrumentos, pero se dieron cuenta de que la mayoría de los instrumentos tradicionales han ido evolucionando por medio de tanteos hasta alcanzar unas formas tan perfectas que casi no son susceptibles de mejora.

El próximo apartado se va a ocupar del más fascinante de todos los instrumentos, la voz humana.

14.4. LA VOZ HUMANA

Siguiendo un proceso evolutivo, los órganos que el hombre utiliza para respirar y para comer han desarrollado la función adicional de producir una rica sucesión de sonidos. La capacidad para producir un sonido concreto se aprende desde la más tierna infancia, pero los órganos capaces de producir sonido son innatos. Estos sonidos se utilizan para comunicarse simbólicamente con otras personas que tienen la misma lengua. Una de las pocas características específicas que tiene

† Γ es la gamma mayúscula.

el hombre y que le distingue de los otros animales es precisamente su capacidad para hablar y usar el lenguaje simbólico.

La producción del habla se puede dividir en dos fases distintas: (1) la producción de un sonido audible y (2) el control ejercido sobre este sonido para producir un *fonema* concreto. Fonema es la unidad sonora más pequeña que tiene un papel funcional en un idioma. Cada idioma tiene su propia colección de fonemas y una persona adulta que habla un idioma puede tener dificultades para aprender a pronunciar un fonema poco familiar en otro idioma.

El alfabeto es sólo una tosca e inexacta representación de los fonemas ingleses. Como en el inglés americano existen en realidad 38 fonemas, algunas letras deben representar varios fonemas mientras que algunos fonemas vienen representados por más de una letra. Por ejemplo, la letra *a* representa cuatro sonidos diferentes: el sonido «ah» de f*a*ther, el sonido «ae» de h*a*d, el sonido *o* (aw) de c*a*ll y el sonido «ei» de t*a*ke. Por otra parte, las letras *c* y *k* representan en varios casos el mismo sonido, como en *c*ap y *k*ey.

Todos los fonemas tienen su origen en la espiración. El aire que es expulsado de los pulmones asciende por la *tráquea*, pasa a través de la *laringe*, entra en la *faringe* y sale por la nariz y por la boca (Fig. 14.12). La faringe es la parte del pasadizo del aire que se halla por encima de la laringe y por detrás de las cavidades orales y nasales. La laringe es un haz de cartílagos entre la faringe y la tráquea que controla el fluir del aire a través de la tráquea y que impide que el alimento entre en los pulmones. (Un cartílago de la laringe es el que forma la nuez en la parte anterior del cuello). Cuando una persona deglute, la *epiglotis* cierra la abertura de la laringe para evitar que los alimentos pasen por ella.

Un par de ligamentos doblados dentro de la laringe, llamados las *cuerdas vocales*, controlan el flujo del aire. Mientras se respira normalmente, estas cuerdas permanecen relajadas de modo que el aire puede pasar libremente a través de la laringe. Un sonido vocal*(sonoro) se produce cuando las cuerdas vocales taponan completamente la laringe. Entonces, cuando se espira el aire, aumenta la presión debajo de las cuerdas. Cuando la presión se hace suficientemente grande, parte del aire pasa con fuerza por las cuerdas, reduciendo la presión que había detrás de ellas. Tan pronto como se reduce la presión se cierran de nuevo las cuerdas, de modo que aumenta la presión una vez más y se repite el proceso.

De este modo, se produce una serie periódica de vibraciones sonoras con una frecuencia que depende de la tensión y de la masa de las cuerdas vocales. En general, la frecuencia es menor en los hombres que en las mujeres porque las cuerdas de los hombres tienen más masa. Sin embargo, si se cambia la tensión de las cuerdas vocales una persona puede variar la frecuencia en un factor 3.

Para una tensión determinada, el sonido producido por la cuerdas vocales es una serie periódica de vibraciones de presión positivas, tal como se muestra en la Fig. 14.13*a*. En un hombre la frecuencia f de estas vibraciones es de unos 125 pulsos por segundo. Como la configuración de vibraciones es periódica, se puede considerar como si fuese

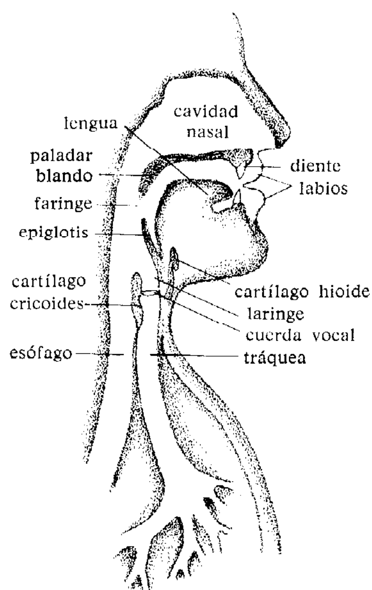


FIGURA 14.12
Anatomía de los órganos vocales del hombre.

* La laringe no interviene en la producción de fonemas *sordos* como «f», «s» y «sh». Un susurro también es sordo.

la superposición de muchas ondas sinusoidales (Apart. 13.3) cuyas frecuencias forman una sucesión armónica:

$$f_1 = 125 \text{ Hz}, f_2 = 2f_1, f_3 = 3f_1, \ldots$$

El espectro de la onda contiene muchos armónicos de amplitud casi igual, tal como se muestra en la Fig. 14.13*b*.

Ésta es la primera fase en la producción del habla, la producción de un sonido vocal. La segunda fase, la articulación de este sonido den-

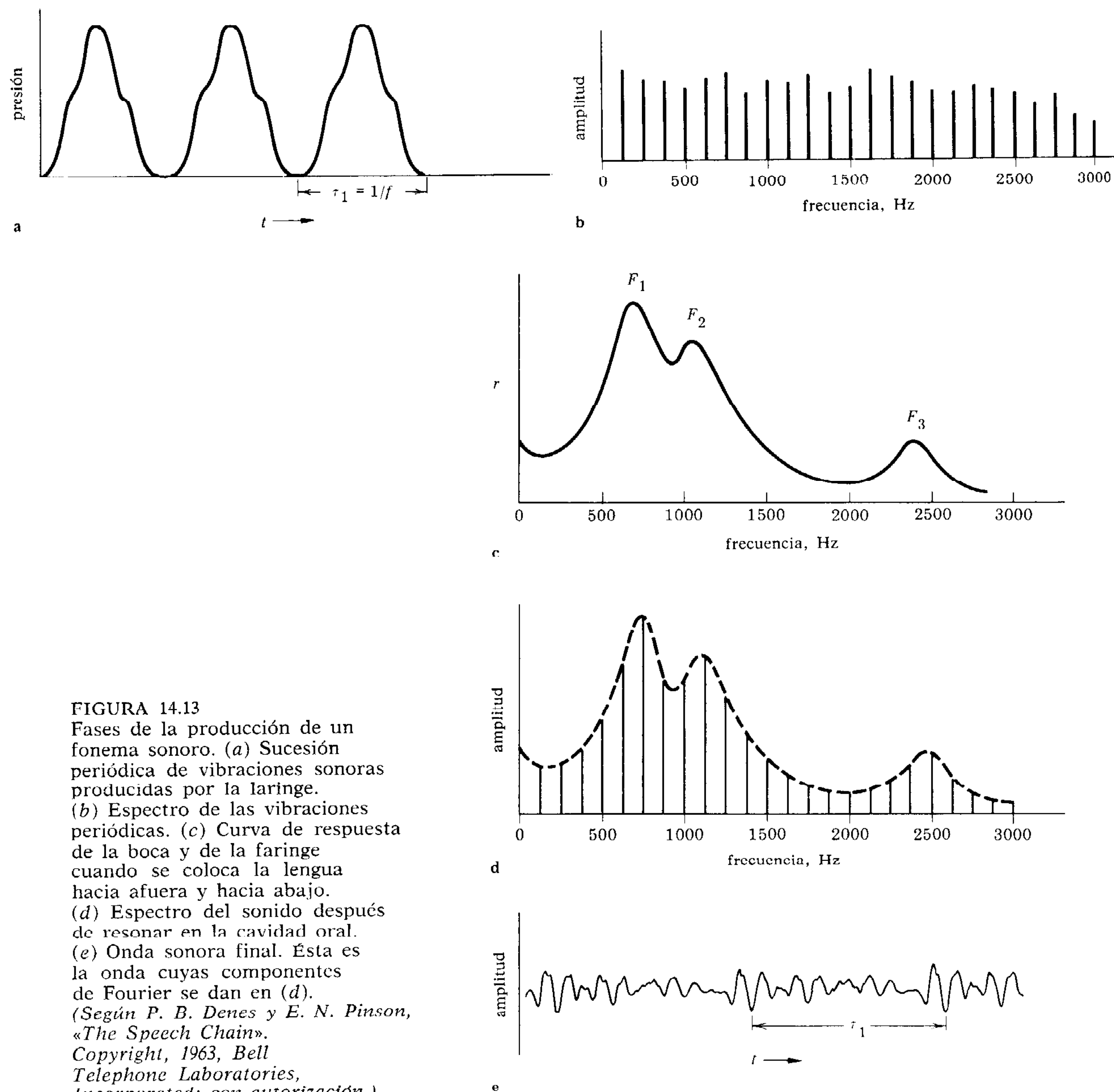


FIGURA 14.13
Fases de la producción de un fonema sonoro. (*a*) Sucesión periódica de vibraciones sonoras producidas por la laringe. (*b*) Espectro de las vibraciones periódicas. (*c*) Curva de respuesta de la boca y de la faringe cuando se coloca la lengua hacia afuera y hacia abajo. (*d*) Espectro del sonido después de resonar en la cavidad oral. (*e*) Onda sonora final. Ésta es la onda cuyas componentes de Fourier se dan en (*d*). *(Según P. B. Denes y E. N. Pinson, «The Speech Chain». Copyright, 1963, Bell Telephone Laboratories, Incorporated; con autorización.)*

tro de un fonema, tiene lugar en la faringe y en las cavidades oral y nasal. Juntas todas ellas constituyen una única cavidad cuyo tamaño y forma son controlados por la posición de la lengua, los labios y el paladar blando que está en la parte posterior de la boca (Fig. 14.12). Para un determinado tamaño y forma, la cavidad tiene sus propias frecuencias características (Apart. 14.3) llamadas frecuencias *formantes*. Normalmente, por debajo de los 3000 Hz hay dos o tres formantes.

Por ejemplo, para emitir el sonido «ah», la lengua adopta una posición situada hacia adelante y hacia abajo, al mismo tiempo que se eleva el cielo del paladar. Esta posición oral equivale en el orden de frecuencias formantes a 730, 1090 y 2440 Hz aproximadamente. Nuestro oído aprecia el fonema representado por «ah» como el correspondiente a una *a* larga y de entonación grave. Al entrar la onda sonora producida por las cuerdas vocales en la cavidad del habla, la cavidad empieza a resonar. Cada formante tiene una curva de respuesta, y así, aunque ninguna de las frecuencias del espectro de la onda sonora sea exactamente igual a cualquiera de las frecuencias formantes, la cavidad resuena a frecuencias cercanas a las formantes. La Fig. 14.13*c* muestra la curva de respuesta combinada de las tres formantes que se crean al emitir el sonido «ah». Por regla general, tres o cuatro armónicos se hallan lo suficientemente cerca de cada formante para aumentar su valor por resonancia. Esto se ve en la Fig. 14.13*d* que es la superposición de las Figs. 14.13*b* y *c*.

Si la fundamental f_1 es 125 Hz, el armónico más próximo a la primera formante ($F_1 = 730$ Hz) en «ah» es $f_6 = 6 \times 125$ Hz $= 750$ Hz. Éste tendrá una gran amplitud en la cavidad, tal como se ve en la Fig. 14.13*d*. Los armónicos contiguos, $f_5 = 625$ Hz y $f_7 = 875$ Hz, aumentarán su valor pero no tanto como f_6. Por consiguiente, el espectro del sonido se modifica después de entrar en la cavidad del habla. Las Figs. 14.13*b* y *d* dan los espectros del sonido «ah» antes y después de entrar en dicha cavidad y las Figs. 14.13*a* y *e* muestran las correspondientes configuraciones ondulatorias.

En resumen, la primera fase en la producción del habla es la producción, por medio de las cuerdas vocales, de una onda periódica que tiene un espectro de armónicos de amplitud casi igual. La segunda fase es la intensificación selectiva de algunos de estos armónicos por la resonancia dentro de la cavidad del habla.

Los diferentes sonidos vocálicos se distinguen por sus frecuencias formantes, las cuales son controladas por la posición de la lengua y por la forma de la boca. Como ya queda dicho, el sonido «ah» se produce con la lengua extendida hacia adelante y situada a nivel bajo. En cambio, el sonido representado por «oo», como ocurre en la voz *afternoon*, se produce con la lengua colocada hacia arriba y en situación retrasada, que viene a ser equivalente a una *u* larga de nuestro idioma. La Fig. 14.14 representa las frecuencias medias y las amplitudes relativas de las tres primeras formantes (F_1, F_2, F_3) de los sonidos vocálicos «ah» y «oo» pronunciadas por hombres y mujeres. En cada caso se da también la frecuencia fundamental f_1 de las cuerdas vocales.

Obsérvese que la fundamental no difiere tanto entre estas vocales como entre hombres y mujeres, lo cual quiere decir que la frecuencia fundamental no juega ningún papel a la hora de distinguir sonidos vocálicos. Aunque las frecuencias de las formantes difieren también entre

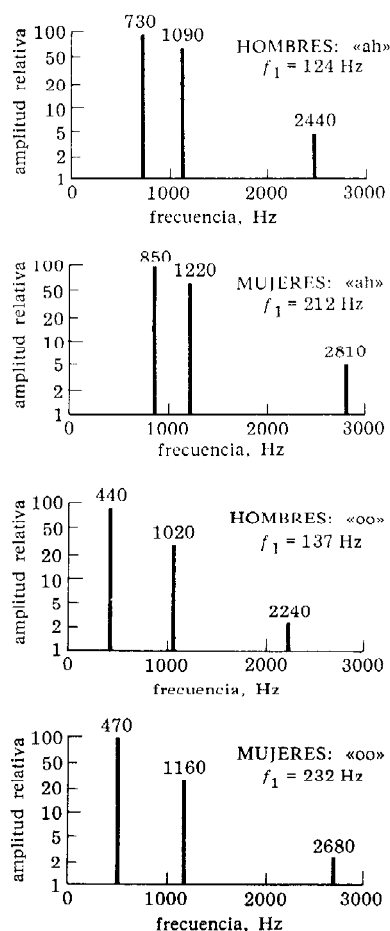


FIGURA 14.14
Amplitudes relativas de las tres primeras formantes (F_1, F_2, y F_3) de las vocales «a» y «oo» tal como las pronuncian los hombres y las mujeres; f_1 es la frecuencia media de la fundamental en cada caso.

hombres y mujeres, la razón de las frecuencias formantes para una determinada vocal es aproximadamente la misma. Por ejemplo, las razones F_2/F_1 y F_3/F_1 para «ah» son 1,49 y 3,34 para los hombres y 1,44 y 3,31 para las mujeres. De esto se desprende que estas razones juegan un papel importante a la hora de distinguir un sonido vocálico de otro. Un hombre puede hablar con falsete aumentando la tensión de las cuerdas vocales. Esto cambia la frecuencia fundamental de sus cuerdas pero no las frecuencias formantes de su cavidad del habla. La voz de falsete se entiende perfectamente lo cual quiere decir que la frecuencia fundamental no se utiliza para hacer una discriminación entre fonemas. El efecto que producen las frecuencias formantes sobre el habla se puede demostrar llenando los pulmones de helio al respirar. La velocidad del sonido en el helio es 2,9 veces mayor que en el aire (tabla 14.1). Las frecuencias formantes de una cavidad son proporcionales a la velocidad del sonido en la cavidad, como en las Ecs. 14.9 y 14.10, de modo que las frecuencias formantes de la cavidad del habla se ven aumentadas en un factor 2,9 al llenarlas con helio en lugar de aire. Una persona que habla con helio en los pulmones tiene una voz parecida a la del Pato Donald. Unos acuonautas que usaron para respirar una mezcla de gas que contenía 97 por ciento de helio mientras vivían a 200 m de profundidad en el mar, tuvieron dificultades para entenderse cuando hablaban entre sí.

PROBLEMAS

OBSERVACIÓN. A no ser que se diga lo contrario, suponemos que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s.

1. Los murciélagos emiten ondas ultrasónicas de una frecuencia de 10^5 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de una de estas ondas en el aire?
Resp. 0,34 cm.
2. Los delfines emiten ondas ultrasónicas de una frecuencia de $2,5 \times 10^5$ Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de una de estas ondas en el agua?
3. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda en el aire de una onda sonora cuya frecuencia es de 75 Hz? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de esta onda en el agua del mar?
Resp. (*a*) 4,53 m; (*b*) 20,4 m.
4. ¿Qué frecuencia debe tener una onda sonora en el agua del mar para que tenga la misma longitud de onda que una onda sonora de 500 Hz en el aire?
5. Calcular el módulo de compresibilidad del agua utilizando los datos de las tablas 7.2 y 14.1. Compararlo con el valor de la tabla 10.4.
Resp. $2,24 \times 10^9$ N/m^2.
6. Calcular la velocidad del sonido en el dióxido de carbono, a 0° C y presión atmosférica usando los datos de las tablas 7.2 y 13.2 y el hecho de que $\gamma = 1,29$. Comparar el resultado con el valor de la tabla 14.1.
7. Calcular la velocidad del sonido en el etanol utilizando los datos de las tablas 7.2 y 10.4.
Resp. 1067 m/s.

* 8. Utilizar la Ec. 14.4 y la ley de los gases ideales Ec. 8.9 para demostrar que la velocidad del sonido en un gas ideal puede escribirse

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m}}$$

donde k es la constante de Boltzmann (Apart. 8.4), m es la masa de una molécula y T es la temperatura absoluta.

9. Una onda sonora de un nivel de intensidad de 80 dB incide sobre un tímpano de área $0,60 \times 10^{-4}$ m^2. ¿Cuánta energía absorbe el tímpano en 3 min?
Resp. $1,08 \times 10^{-6}$ J.
10. El nivel de sonido a 25 m de un altavoz es de 70 dB. ¿Cuál es la velocidad a la que el altavoz produce energía sonora?
11. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de presión de una onda sonora de un nivel de intensidad (en el aire) de 120 dB? (*b*) ¿Qué fuerza ejerce

ésta sobre un tímpano de $0,55 \times 10^{-4}$ m² de área?
Resp. (*a*) 28,7 N/m²; (*b*) 0,00158 N.

12. Las ondas ultrasónicas tienen muchas aplicaciones en medicina y en tecnología. Una de sus ventajas es que las ondas ultrasónicas de gran intensidad pueden usarse sin miedo a dañar al oído. Consideremos una onda ultrasónica de intensidad $I = 10^5$ W/m². (*a*) ¿Cuál es el nivel de intensidad de esta onda? (*b*) ¿Cuánta energía cae sobre una superficie de 1 cm² en 1 min? (*c*) ¿Cuál es la amplitud de presión de la onda en el aire? (*d*) En el *agua*, ¿cuál es la intensidad de una onda ultrasónica que tiene la amplitud de presión hallada en (*c*)?

*13. ¿Cuál es el nivel de intensidad de un sonido con una intensidad de $7,5 \times 10^{-6}$ W/m²?
Resp. 48,8 dB.

*14. ¿Cuál es la intensidad de un sonido con un nivel de intensidad de 53 dB?

15. (*a*) ¿Qué porcentaje de la población no puede oír un sonido de 200 Hz a 40 dB? (*b*) ¿Cuál es el nivel de intensidad más bajo de un sonido de 1000 Hz que puede ser oído por el 90 por ciento de la población?
Resp. (*a*) 25 %; (*b*) 30 dB.

16. ¿Cuál es el nivel de intensidad de una señal de 60 Hz que suena tan fuerte como una señal de 600 Hz con un nivel de intensidad de 24 dB?

17. Un cohete explota a una altura de 400 m produciendo en un punto del suelo verticalmente debajo de él, una intensidad sonora media de $6,7 \times 10^{-2}$ W/m² durante 0,2 s. (*a*) ¿Cuál es la intensidad media del sonido a una distancia de 10 m del cohete? (*b*) ¿Cuál es el nivel de sonido (en decibelios) a 10 m de distancia del cohete? (*c*) ¿Cuál es la energía sonora total irradiada en la explosión?
Resp. (*a*) 107 W/m²; (*b*) 140 dB; (*c*) 2,69 por 10^4 J.

18. El sonido de un tubo de órgano tiene un nivel de sonido de 120 dB en un punto que se halla a 1 m de distancia del extremo abierto del tubo. (*a*) ¿Cuál es el nivel de sonido a una distancia de 32 m del extremo del tubo? (*b*) ¿A qué velocidad sale energía sonora del extremo abierto del tubo?

19. El nivel de intensidad a 20 m de una motocicleta es 90 dB. ¿A qué distancia el nivel de intensidad es de 60 dB?
Resp. 63,2 m.

*20. El nivel de intensidad a 30 m de un camión es de 84 dB. ¿Cuál es el nivel de intensidad a 5 m del camión?

*21. La amplitud de presión de una onda sonora es 0,04 N/m² a una distancia de 12 m de su origen. ¿Cuál es la amplitud de presión de la onda que se halla a 150 m de su origen?
Resp. 0,0032 N/m².

*22. Demostrar que el nivel de intensidad de un sonido está relacionado con la amplitud de presión A_p por medio de

$$\beta = 20 \log \frac{A_p}{A_{p0}}$$

donde A_{p0} es la amplitud de presión correspondiente a la intensidad de referencia I_0.

23. (*a*) ¿Cuáles son las tres primeras frecuencias características de un tubo cerrado de 1,5 m de longitud? (*b*) ¿Cuáles son las tres primeras frecuencias características si el tubo está lleno de dióxido de carbono a 0° C en vez de aire?
Resp. (*a*) 56,7, 170 y 283 Hz; (*b*) 43,2, 129 y 216 Hz.

24. El oído externo está compuesto de las partes externas visibles y del *canal auditivo*, que es el pasadizo que comunica el exterior con el tímpano. (*a*) Hallar la frecuencia fundamental de este pasadizo si tiene 2 cm de longitud. (*b*) Indicar un papel que podría jugar esta cavidad en la audición.

25. Cuando se coloca un diapasón sobre el extremo abierto del tubo de la Fig. 14.10, el valor más pequeño de L que produce resonancia resulta ser 30 cm. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido emitido por el diapasón? (*b*) ¿Cuál es el siguiente valor mayor de L en el que se produce resonancia? (*c*) Si suponemos que la frecuencia del diapasón es de 300 Hz, ¿qué valor podemos deducir de estos datos para la velocidad del sonido en el aire?
Resp. (*a*) 1,2 m; (*b*) 90 cm; (*c*) 360 m/s.

26. Cuando una mujer pronuncia el sonido «aw» que representa la o de la voz inglesa Call, la primera frecuencia formante de su cavidad del habla es de 590 Hz y la frecuencia fundamental de sus cuerdas vocales es de 216 Hz. ¿Qué frecuencia es la que más se intensifica?

27. Si la primera frecuencia formante de un hombre al pronunciar «ah» es normalmente de 730 Hz, ¿cuál sería si respirase helio?
Resp. 2100 Hz.

La luz Capítulo 15

La luz, al igual que el sonido, es una onda que propaga energía sin propagar masa. La luz es esencial para toda clase de vida que hay sobre la Tierra porque las plantas utilizan la energía solar en forma de luz para sintetizar los carbohidratos a partir del dióxido de carbono y el agua (fotosíntesis). A su vez, las plantas son la base de la cadena alimenticia de los animales.

La luz, como el sonido, también proporciona a los animales información vital acerca de su medio ambiente. Los animales superiores han desarrollado mecanismos complejos para detectar la luz, aunque algunos animales con historias evolutivas divergentes, como los artrópodos y los cordados, han desarrollado aparatos muy diferentes para detectar la luz. Lo que «ve» un animal depende de las propiedades físicas particulares de la luz a la que es sensible su ojo. El hombre tiene buena visión para el color (detección de frecuencia) mientras que las abejas detectan tanto el color como la polarización de la luz.

Sin embargo, a diferencia del sonido, la luz no tiene una base en la mecánica. Como el sonido es la vibración de elementos de aire bajo la acción de fuerzas mecánicas (Apart. 13.2), sus propiedades son simplemente las consecuencias de las leyes de la mecánica aplicadas a estos elementos. Una onda luminosa, por otra parte, no es la vibración de ninguna sustancia material, de aquí que sus propiedades no puedan deducirse de la mecánica. La luz es un fenómeno fundamentalmente distinto que no tiene base en la mecánica. No obstante, una onda es una onda, y las propiedades generales de las ondas discutidas en el Cap. 13 se aplican lo mismo a la luz que al sonido. Por supuesto que el gran interrogante es: Si no hay medio material, ¿qué es lo que vibra?

15.1. NATURALEZA DE LA LUZ

Naturaleza ondulatoria de la luz

Ya era un hecho conocido para Aristóteles (384-322 a. d. C.) que el sonido es producido por vibraciones en el aire. Este conocimiento se basó probablemente en la observación de que la música es producida por cuerdas que vibran. De hecho, el estudio de la relación de los tonos musicales con la longitud de la cuerda vibrante fue desarrollado perfectamente en la antigüedad, pero por supuesto no fue posible una explicación adecuada de las ondas sonoras hasta los tiempos de Newton. Aunque no se sabía nada sobre la naturaleza fundamental de la luz en tiempos de Newton, era lógico especular que la luz era una onda semejante al sonido. Christian Huygens (1629-1695), que vivió en la época de Newton, desarrolló una teoría ondulatoria de la luz, pero el mismo Newton apoyaba una teoría según la cual la luz está compuesta de partículas sin masa (corpúsculos). Newton lanzó la hipótesis de que

estos corpúsculos viajan por el espacio a velocidad constante y que hay un tipo diferente de corpúsculos para cada color. Su principal objeción a la teoría ondulatoria era que la luz, a diferencia del sonido, no parece que doble las esquinas.

La gran reputación de Newton y la falta de una evidencia definitiva condujo de un modo u otro a la aceptación general de la teoría corpuscular durante el siglo XVIII. Esto, sin embargo, no fue obstáculo para el desarrollo de la óptica ya que estos desarrollos estaban basados en leyes empíricas que son compatibles tanto con una teoría ondulatoria como corpuscular.

La naturaleza ondulatoria de la luz fue establecida finalmente por una serie de experimentos que demostraron que la luz obedece el principio de superposición (Apart. 13.3). Estos experimentos fueron llevados a cabo en primer lugar por Thomas Young (1773-1829), el gran egiptólogo, y más tarde, y de modo más definitivo, por Agustín Fresnel (1788-1827). En el siguiente apartado se discuten los experimentos de Young.

Naturaleza electromagnética de la luz

Cuando se hacían estos avances en el estudio de la luz se estaban haciendo importantes descubrimientos en los campos de la electricidad y el magnetismo (Apart. 17.1). Las leyes básicas de la electricidad y el magnetismo, que ya habían sido descubiertas en la primera mitad del siglo XIX, fueron formuladas en forma de una amplia teoría matemática por James Clark Maxwell (1831-1879). Maxwell dedujo de esta teoría que deberían existir ondas electromagnéticas consistentes esencialmente en campos eléctricos y magnéticos oscilantes que se propagan por el espacio con una velocidad definida. De acuerdo con la teoría de Maxwell, esta velocidad viene dada en función de ciertas constantes eléctricas bien definidas que forman parte de la teoría. Cuando Maxwell calculó la velocidad de las ondas electromagnéticas a partir de estas constantes, vio que era igual a la velocidad de la luz. Este gran éxito de la teoría de Maxwell estableció que la luz es una forma de radiación electromagnética.

Hoy en día los físicos están familiarizados con ondas electromagnéticas cuya longitud de onda va desde menos de 10^{-17} m hasta más de 10^{4} m. El ojo humano solamente detecta las ondas cuyas longitudes de onda oscilan entre 4×10^{-7} y 7×10^{-7} m y constituyen por tanto la luz visible. Las ondas con longitudes de onda mayores o menores tienen nombres especiales como ondas de radio, microondas, infrarrojos, ultravioleta, rayos X, etc. La Fig. 15.1 muestra toda la gama de radiaciones electromagnéticas que han sido estudiadas y también los nombres que reciben las diferentes regiones. Los límites entre las regiones no están claramente definidos, si se exceptúa la región visible.

OBSERVACIÓN. Las ondas electromagnéticas, al igual que las otras ondas, se esperaba que fueran desplazamientos en un medio. Por supuesto que no es un medio ordinario, puesto que la luz y otras formas de la radiación electromagnética llegan hasta nosotros desde estrellas distantes a través del vacío del espacio exterior. Durante el siglo XIX se pensó que el medio era una susancia especial, llamada *éter*, que llenaba todo el espacio. Entonces, las ondas 'ectromagnéticas serían vibraciones de elementos del éter alrededor de sus siciones de equilibrio.

éter tendría que ser una sustancia extraordinaria porque no ofrece resisia al movimiento de los planetas alrededor del Sol. Cualquier material ario, incluso un gas muy diluido, ejercería fuerzas de rozamiento sobre

los planetas que producirían efectos observables en su movimiento. Una sustancia como el éter que no producía ningún efecto sobre la materia ordinaria hubiera parecido que no se podía distinguir del mismo espacio. O sea, que no tiene otra realidad que la de ser el medio donde se propagan las ondas electromagnéticas. El fracaso en los intentos llevados a cabo a finales del siglo XIX para detectar el éter condujo a los físicos a abandonar completamente la idea del éter y aceptar que las ondas electromagnéticas no tienen un fundamento mecánico.

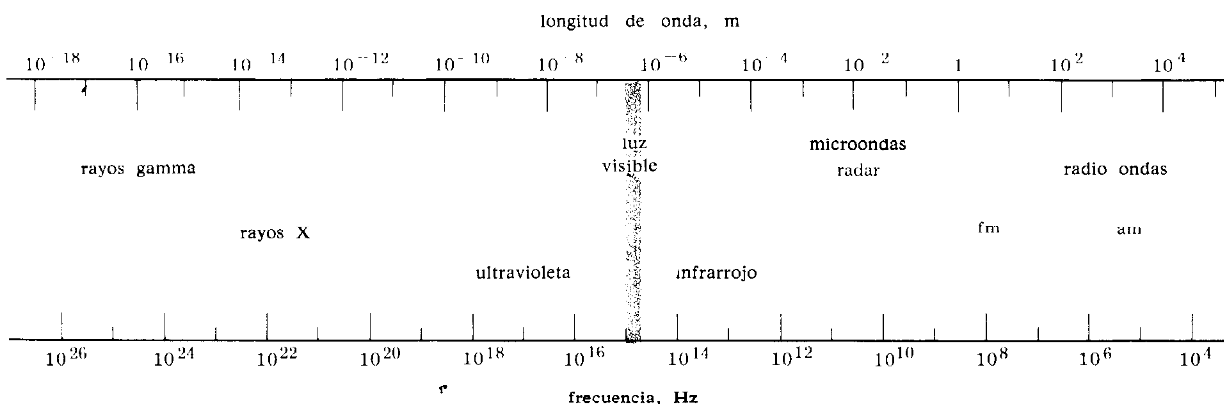
Velocidad de la luz

Además de la pregunta sobre la naturaleza de la luz existe la pregunta sobre su velocidad. Años atrás no todo el mundo creía que la luz tuviese una velocidad limitada. Alrededor del año 1600, Galileo intentó medir la velocidad de la luz con un tosco experimento, pero fracasó. En 1676, Ole Römer (1644-1710) obtuvo el primer valor finito de la velocidad de la luz basado en las discrepancias de los movimientos de los satélites de Júpiter que dependían de la distancia entre Júpiter y la Tierra. Sin embargo, no todos aceptaron su resultado.

Hasta mediados del siglo XIX no se obtuvieron medidas experimentales directas de la velocidad de la luz. La primera medición la llevó a cabo, en 1849, Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896), el cual utilizó la fracasada medición de Galileo, pero con una ingeniosa modificación. Galileo había colocado dos ayudantes, cada uno con una linterna, separados por una cierta distancia (Fig. 15.2*a*). El ayudante *A* destapaba su lámpara y el ayudante *B* tenía que destapar la suya cuando viese la luz de la lámpara del ayudante *A*. Galileo intentó medir el tiempo que pasaba desde que el ayudante *A* mostraba su linterna hasta que veía la luz de la lámpara del ayudante *B*. Aun estando los ayudantes *A* y *B* a una distancia de 5 millas, no obstante el tiempo es sólo 5×10^{-5} s, que es demasiado pequeño para que Galileo lo hubiera detectado.

Fizeau sustituyó al ayudante *B* por un espejo (Fig. 15.2*b*), de modo que la luz volviese instantáneamente al punto *A* sin el retraso producido por el tiempo en reaccionar del ayudante *B*. El ayudante *A* fue sustituido por una rueda dentada que daba vueltas delante de una fuente luminosa, de modo que cuando daba vueltas la rueda, automáticamente eran transmitidos pulsos de luz al espejo. Se aumentaba la

FIGURA 15.1
Radiación electromagnética entre 10^4 y 10^{26} Hz. Excepto en el caso de la luz visible, los límites entre los diferentes tipos de radiación no están definidos con precisión.



velocidad de rotación de la rueda hasta que un observador colocado detrás de la rueda *no* viese la luz reflejada. Esto sucede cuando el tiempo que tarda la luz para ir desde la rueda al espejo, y en sentido inverso, es igual que el tiempo que tarda la rueda en moverse desde un espacio al diente inmediato. Conociendo la distancia entre la rueda y el espejo y la velocidad de rotación de la rueda, Fizeau calculó la velocidad de la luz.

Desde que Fizeau hizo el primer experimento, la velocidad de la luz se ha medido repetidamente y con mayor precisión cada vez. La tabla 1.1 da los resultados de algunas de estas medidas. Para nuestros fines tomaremos como velocidad de la luz (en el vacío)

$$c = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

El símbolo c siempre se usa para la velocidad de la luz en el vacío.

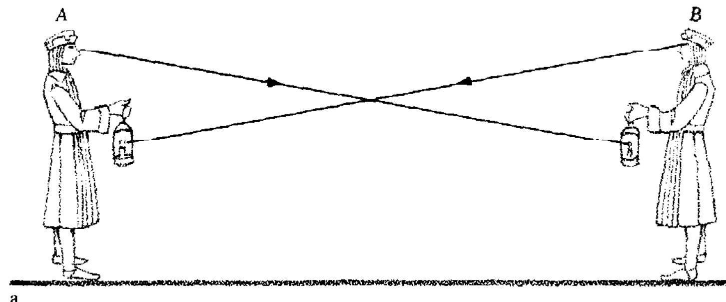
La velocidad de la luz en sustancias transparentes, como por ejemplo el agua y el vidrio, es siempre menor que la velocidad de la luz en el vacío (las mediciones de Fizeau y de otros experimentadores se llevaron a cabo en aire, como es lógico. La velocidad de la luz en el aire es sólo ligeramente inferior a la velocidad de la luz en el vacío, de modo que esta pequeña diferencia puede despreciarse en general).

Definición. El *índice de refracción* n de una sustancia es la razón de la velocidad de la luz c en el vacío a la velocidad de la luz v en la sustancia:

$$n = \frac{c}{v} \qquad 15.1$$

Por ejemplo, la velocidad de la luz en el agua es

$$c_w = 2{,}25 \times 10^8 \text{ m/s}$$



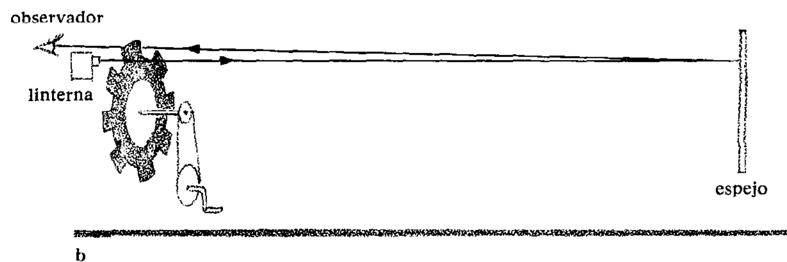


FIGURA 15.2
Mediciones de la velocidad de la luz. (*a*) Galileo intentó sin éxito medir el intervalo de tiempo comprendido entre el instante en que el ayudante *A* mostraba su linterna y el instante en el que éste vería por primera vez la linterna de *B*. (*b*) Fizeau sustituyó al ayudante *A* por una rueda dentada que daba vueltas frente a una linterna y al ayudante *B* por un espejo que reflejaba instantáneamente los pulsos de luz hacia la rueda.

De modo que el índice de refracción del agua es

$$n = \frac{3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2{,}25 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}33$$

Como la velocidad de la luz en una sustancia es siempre menor que c, el índice de refracción de toda sustancia es mayor que 1. Para una sustancia particular, el valor de n depende algo de la longitud de onda de la luz. La tabla 15.1 da el índice de refracción de algunas sustancias comunes a la longitud de onda de la luz amarilla, $\lambda = 5{,}89 \times 10^{-7}$ m = 589 nm.*

15.2. INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN

Interferencia

El principio de superposición (Apart. 13.3) dice que cuando dos o más ondas coexisten en el mismo punto, el desplazamiento del medio es la suma de los desplazamientos que produciría cada onda por separado. Esto tiene la sorprendente consecuencia de que dos ondas, que por separado producirían en un punto desplazamientos iguales y opuestos, superpuestas producen desplazamiento cero en ese punto. Esto ya se ha visto anteriormente en el caso de una onda estacionaria (Apartado 13.5), en donde dos ondas sinusoidales con la misma longitud de onda y amplitud pero que se desplazan en direcciones opuestas, siempre se anulan mutuamente en ciertos puntos llamados *nodos*.

Para demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz, Thomas Young desarrolló un experimento en el que dos haces de luz se anulan mutuamente en ciertos puntos. Su experimento se puede entender mejor considerando primeramente una serie de pequeñas ondas de agua que se mueven en dirección a una pantalla que tiene dos pequeños orificios (Fig. 15.3 *a*). Las crestas de las ondas se muestran como trazos gruesos y los valles, o mínimos, como líneas discontinuas a mitad de camino entre las crestas. Cada línea recibe el nombre de *frente de onda* porque todos los puntos de una línea determinada tienen el mismo desplazamiento. La longitud de onda λ es la distancia entre las líneas de trazo continuo.

Cuando la onda choca con la pantalla se produce una perturbación en cada orificio, de modo que cada uno de ellos actúa como una fuente puntual de ondas. O sea, que emanan de cada orificio ondas semicirculares. Dondequiera que la cresta de una onda procedente de un orificio se cruce con el valle de una onda del otro orificio, se forma una región de *interferencia destructiva* en la que los elementos del medio no oscilan, o sea, en la que su amplitud es cero. En la Fig. 15.3*a* se representan estas regiones por líneas de trazo discontinuo que salen de la pantalla. Entre estas líneas se forma una región de *interferencia constructiva*, en la que las crestas (y valles) de las dos ondas coinciden, de modo que los elementos del medio oscilan con grandes amplitudes. En la Fig. 15.3*a* están indicadas estas regiones por líneas de

TABLA 15.1. **Indice de refracción de algunas sustancias comunes.** Valores correspondientes a la luz amarilla.

Sustancia	Indice de refracción
Acetona a 20 °C	1,3584
Aire a TPN	1,0002926
Bálsamo del Canadá	1,530
Diamante	2,4168
Etanol a 20 °C	1,36008
Vidrio	
Cuarzo fundido	1,458
«Cuarzo sólido»	1,650
«Crounglass»	1,517
Cristal de cuarzo	1,553
Cloruro de sodio	1,544
Agua a 20°	1,33335

* 1 nm = 1 nanómetro = 10^{-9} m. Antigüamente se llamaba nanómetro a una milimicra (mμ), pero este término no se acepta ya.

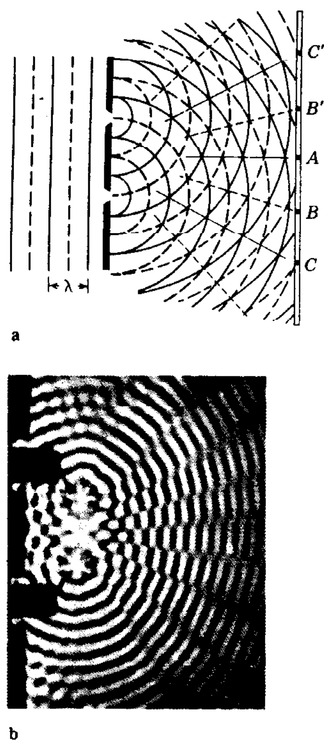


FIGURA 15.3
(*a*) Interferencia de ondas circulares que parten de dos orificios. Las líneas radiales indican regiones de interferencia destructiva. (*b*) Diagrama de interferencia de ondas circulares de agua que parten de dos puntos. *(Tomado de «PSSC Physics», 3.ª edición, copyright © 1971, Education Development Center, Inc., reimpreso con autorización de D. C. Heat and Co.)* (Esta obra está publicada en castellano por EDITORIAL REVERTÉ, S. A.)

trazo continuo que salen de la pantalla. Así, la interferencia de las ondas procedentes de los dos orificios produce regiones alternantes de oscilación cero y gran amplitud. Este diagrama de interferencia es idéntico al producido por ondas circulares que parten de dos puntos, tal como se muestra en la Fig. 15.3*b*.

Young demostró la naturaleza ondulatoria de la luz produciendo un diagrama de interferencia semejante con la luz. Hoy se puede hacer fácilmente esta demostración con el laser. Se coloca una pantalla con un par de rendijas estrechas enfrente de un haz de rayos laser y la luz que sale de las rendijas se la hace incidir sobre una pantalla de proyección (Fig. 15.4). El diagrama que se observa sobre la pantalla consiste en bandas alternadas brillantes y oscuras, llamadas *franjas*. La franja brillante central corresponde al punto A de la Fig. 15.3. Esta franja está a igual distancia de las dos rendijas, de modo que una cresta procedente de una rendija coincide siempre con una cresta procedente de la otra, dando como resultado una interferencia constructiva. A cada lado de la franja central hay franjas oscuras, que es donde los haces procedentes de las dos rendijas se anulan mutuamente. Los puntos en estas regiones corresponden a los puntos B y B' de la Figura 15.3. Están exactamente 1/2 longitud de onda más lejos de una que de la otra rendija, de modo que una cresta de una rendija siempre cae sobre un valle de la otra, produciéndose interferencia destructiva. En general aparece una franja oscura en un punto que está a una distancia $(n + 1/2)\lambda$ más lejos de una rendija que de la otra, en donde n es un número entero y λ la longitud de onda de la luz.

Lejos de la franja central y a cada lado de la franja oscura hay otras dos franjas brillantes. Estos puntos, que corresponden a los puntos C y C' de la Fig. 15.3, están 1 longitud de onda más lejos de una rendija que de la otra, de modo que otra vez una cresta de una rendija coincide siempre con una cresta de la otra rendija, originándose una interferencia constructiva. En general aparece una franja brillante en un punto que está a una distancia $n\lambda$ más lejos de una rendija que de la otra.

OBSERVACION. Para conseguir interferencia, porciones de la misma onda deben iluminar las dos rendijas. La *luz coherente*, como la producida por un laser, consiste en una sola onda larga continua. La interferencia de doble rendija se puede así poner fácilmente de manifiesto con luz laser, porque las dos rendijas son iluminadas por la misma onda intensa. La *luz incoherente*, como es el caso de la luz del Sol o de una bombilla, consiste en miles de millones de ondas cortas independientes. Para obtener interferencia con luz incoherente se debe utilizar una fuente luminosa muy estrecha, de modo que cada onda ilumine simultáneamente ambas rendijas. Como la fuente luminosa es estrecha, el diagrama que se produce es débil y debe observarse en la oscuridad. Una extensa fuente de luz incoherente no producirá un diagrama de interferencia visible porque las ondas independientes procedentes de puntos distintos de la fuente llegarán por separado en el mismo tiempo a cada rendija.

La Fig. 15.5 muestra las distancias desde dos rendijas a un punto P situado en una franja brillante. La distancia d entre las rendijas es normalmente muy pequeña si se la compara con la distancia D que hay desde las rendijas a la pantalla, de modo que las rectas SP y $S'P$ son casi paralelas y forman aproximadamente el mismo ángulo θ con la perpendicular a la pantalla. La recta ST es la perpendicular desde la

rendija S hasta la recta $S'P$. La distancia de T a P es aproximadamente igual a la distancia de S a P, de modo que la distancia l entre S' y T es la diferencia entre las distancias S y S' a P. Del triángulo rectángulo STS' obtenemos la relación

$$l = d \operatorname{sen} \theta$$

La condición para una franja brillante es $l = n\lambda$. Por lo tanto, las franjas brillantes ocurren a ángulos dados por

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{l}{d} = \frac{n\lambda}{d} \qquad 15.2$$

en donde n es un número entero.

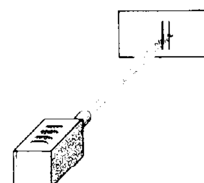


FIGURA 15.4
Un rayo laser que incide sobre un par de rendijas produce un diagrama de interferencia sobre una pantalla.

Para $n = 0$, la Ec. 15.2 da $\theta = 0°$, que es la franja central. La primera franja brillante a cada lado de la central corresponde a $n = 1$, la segunda franja brillante corresponde a $n = 2$ y así sucesivamente. La distancia x_n entre la franja central y la enésima es aproximadamente

$$x_n = D \operatorname{tg} \theta$$

Como θ es muy pequeño, tg θ es aproximadamente igual a sen θ (apéndice III). Entonces, usando la Ec. 15.2 para sen θ, tenemos

$$x_n = D \operatorname{sen} \theta = \frac{Dn\lambda}{d}$$

o también

$$\lambda = \frac{x_n d}{nD} \qquad 15.3$$

Ejemplo. Un laser de neón-helio forma un diagrama de franjas sobre una pantalla que está a 3,0 m de otra que contiene las dos rendijas y cuya separación es de 0,02 cm. La distancia entre franjas brillantes adyacentes es de 0,95 cm. ¿Cuál es la longitud de onda del laser? Según la Ec. 15.3 la longitud de onda de la luz es

$$\lambda = \frac{x_n d}{nD} = \frac{0{,}95 \text{ cm} \times 0{,}02 \text{ cm}}{1 \times 3{,}0 \times 10^2 \text{ cm}} = 6{,}3 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

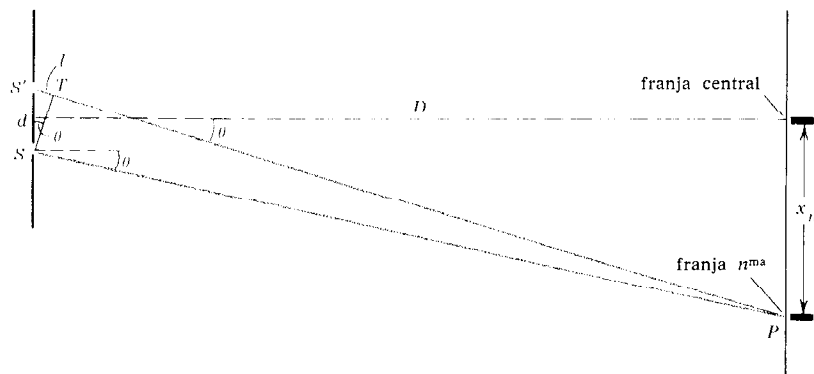


FIGURA 15.5
Distancias desde dos rendijas S y S' a un punto P sobre una pantalla. Hay interferencia destructiva cuando la diferencia l entre estas distancias es $(n + 1/2)\lambda$.

El experimento de la doble rendija proporciona una prueba convincente de la naturaleza ondulatoria de la luz porque el diagrama de franjas brillantes y oscuras que produce, solamente puede originarse si hay superposición, y la superposición es una propiedad sólo ondulatoria. El experimento también proporciona un método para medir la longitud de onda de una luz porque las posiciones x_n de las franjas brillantes dependen de la longitud de onda. La luz que contiene más de una longitud de onda se descompone en sus longitudes de onda componentes después de pasar por una rendija doble, porque las franjas para las diferentes longitudes de onda tienen diferentes posiciones en la pantalla. Así se mide la composición de frecuencias, o espectro, de la luz. La base de nuestro actual conocimiento de la estructura atómica (Apart. 21.1) es la *espectroscopia*, que es el estudio de los espectros de luz emitidos por diferentes átomos.

Definición. Un *espectrómetro* es un dispositivo para separar y medir las longitudes de onda de los componentes de una luz. En lugar de una doble rendija, un espectrómetro utiliza una *red de difracción*, que es un trozo de vidrio o plástico sobre el que se han grabado cuidadosamente miles de rendijas. El gran número de rendijas aumenta la intensidad de las franjas brillantes por encima de la que se obtiene con una doble rendija, si bien el espaciado del diagrama depende todavía, de acuerdo con la Ec. 15.3, de la distancia entre rendijas adyacentes.

El fenómeno de interferencia se utiliza también en *microscopia de contraste de fase*, una técnica que modifica la microscopia de luz ordinaria de tal manera que la luz que viene directamente de la fuente de iluminación interfiere con la luz secundaria procedente de la muestra. Esto produce interferencia destructiva que hace visible contra un fondo brillante incluso una muestra transparente, como es el caso de una célula sin teñir. En el Apart. 16.4 se darán más detalles.

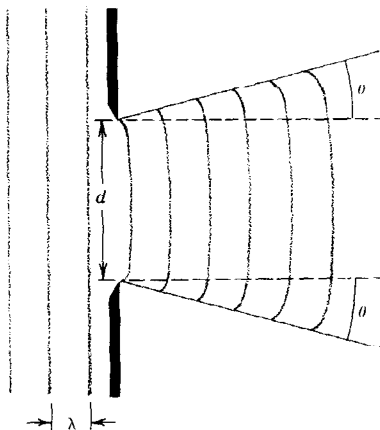


FIGURA 15.6
Difracción de una onda plana al pasar por una rendija. Cuando la rendija es mucho más ancha que la longitud de onda de la onda, el ángulo de difracción θ es pequeño.

Difracción

En la Fig. 15.3 se supone que de las estrechas rendijas salen ondas semicirculares cuando las ondas incidentes las alcanzan. Por su misma naturaleza esto es un interesante fenómeno ondulatorio. Ciertamente, si las rendijas son muy amplias no podemos esperar que las ondas incidentes cambien muchísimo al pasar. Sin embargo, los frentes de onda de una onda plana siempre se doblan ligeramente al pasar por una rendija, tal como se ve en la Fig. 15.6. Como consecuencia, la onda ya no viaja en una dirección sino que, por el contrario, tiene una divergencia angular θ. A este fenómeno se le llama *difracción*. Se puede demostrar que θ está relacionada con la longitud de onda λ y la anchura d de la rendija por la expresión

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{d} \qquad 15.4$$

Si d es muy grande comparada con λ, el ángulo θ es muy pequeño, y la onda incidente se ve poco afectada por la rendija. Por otro lado, si d es comparable con λ, el ángulo θ es grande y la onda se difunde desde la rendija en todas direcciones. Esta última condición se debe cumplir en las rendijas de un experimento de doble rendija, a fin de

que las ondas luminosas procedentes de las rendijas se solapen en la pantalla.

La longitud de onda de la luz es de unos 5×10^{-5} cm, que es pequeña en comparación con objetos de tamaño normal. Por lo tanto, los objetos ordinarios no difractan perceptiblemente la luz sino que ésta parece propagarse en línea recta sin sufrir desviación. Como contraste, las longitudes de onda del sonido son comparables a los objetos de tamaño normal, de modo que el sonido es altamente difractado. Por ejemplo, las longitudes de onda de la voz humana son grandes si se las compara con el tamaño de la boca y por eso el sonido se difracta en todas direcciones al salir de la boca. Si no sucediese así, tendríamos que estar justo enfrente del que habla para poder oírle. Las ondas ultrasónicas, que tienen longitudes de onda mucho más cortas que el sonido, viajan en línea recta sin mucha difracción, exactamente como la luz.

Un microscopio concentra idealmente la luz procedente de un punto del objeto en un punto de la imagen. Sin embargo, como la luz es difractada al pasar por la abertura de las lentes del objetivo, la imagen de un punto es un pequeño círculo. Dos puntos del objeto pueden separarse sólo si sus círculos imagen no se superponen. En la práctica esto quiere decir que un microscopio de luz ordinaria no puede separar estructuras más pequeñas que una longitud de onda de la luz.

Visión de los insectos

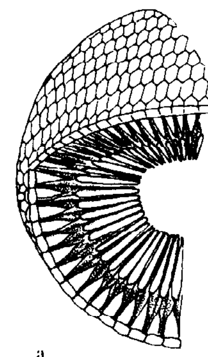
Parece ser que la difracción ha jugado un papel importante en la evolución del ojo de los insectos. El ojo compuesto de los insectos consiste en fibras transparentes llamadas *omatidios* que se hallan arracimadas en disposición hemisférica (Fig. 15.7). Cada omatidio sólo puede recibir luz incidente formando un ángulo menor que ϕ con su eje central (Fig. 15.8). Toda la luz incidente que cae dentro de este ángulo, entra en el omatidio, pasa a lo largo de la fibra y estimula los nervios de su base. No se puede distinguir la luz de objetos diferentes que entran por el mismo omatidio. O sea, que para que un insecto vea dos objetos, la luz de estos objetos debe entrar en dos omatidios diferentes. Esto exige que los dos objetos tengan una separación angular de ϕ por lo menos. Así, el ángulo ϕ del omatidio determina la discriminación del ojo del insecto.

Para lograr la discriminación máxima, el ángulo ϕ debería ser todo lo más pequeño posible. A partir de la Fig. 15.8 se ve que ϕ se puede disminuir, bien sea aumentando la longitud L, o disminuyendo la anchura d del omatidio. Pero si se aumenta L, el ojo ocupará más espacio en la cabeza del insecto. Por lo tanto, parece razonable que, por adaptaciones evolutivas, se haya producido el mínimo tamaño de d.

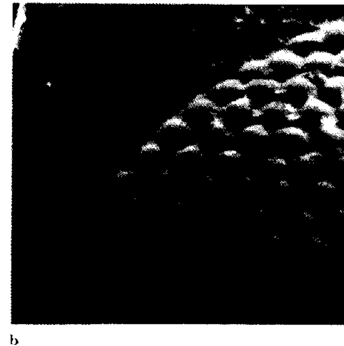
Los omatidios de la abeja tienen una anchura $d = 2 \times 10^{-3}$ cm. La luz que entra por esa abertura tan pequeña se difracta en un ángulo θ dado por la Ec. 15.4. Tomando $\lambda = 5 \times 10^{-5}$ cm, obtenemos

$$\text{sen}\,\theta = \frac{5 \times 10^{-5}\ \text{cm}}{2 \times 10^{-3}\ \text{cm}} = 2{,}5 \times 10^{-2}$$

Por la aproximación de pequeño ángulo (apéndice III, Ec. III.4), el ángulo de difracción θ resulta ser



a



b

FIGURA 15.7
Omatidios del ojo compuesto de un insecto. (*a*) Dibujo de una sección que muestra que cada omatidio está orientado en distinta dirección. (*b*) Fotomicrografía electrónica del ojo de una mosca. *(Cortesía de H. F. Howden, Carleton University, Ottawa, Canadá.)*

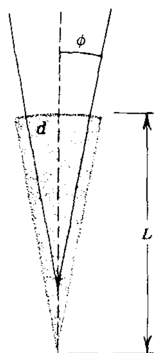


FIGURA 15.8
Un omatidio de longitud L y anchura d. Sólo puede penetrar hasta la base del omatidio la luz que forma un ángulo menor que ϕ con el eje central.

$$\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{0{,}0174} = 1{,}4^\circ$$

Esto quiere decir que la luz que forma un ángulo de menos de 1,4° con el eje central de un omatidio será difractada dentro de éste, cualquiera que sea el ángulo ϕ. De este modo, y debido a la difracción, no hay ninguna ventaja en hacer ϕ más pequeño que θ, y de hecho las medidas han dado como resultado que el ángulo de recepción en la abeja está entre 1 y 2°. La anchura d de los omatidios de la abeja es de tamaño óptimo, puesto que si fuera más pequeño, el ángulo de difracción θ sería mayor, y si fuera mayor, el ángulo de recepción ϕ sería mayor. El ojo del insecto ha alcanzado, gracias a la evolución, la discriminación máxima compatible con su tamaño.

15.3. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

En un medio homogéneo una onda plana se desplaza en línea recta con una velocidad v_1 que es característica del medio. Cuando la onda llega a la superficie que separa un medio del otro, parte de la onda es *reflejada* en esa superficie y vuelve al primer medio y parte de la onda pasa al segundo medio. La parte que entra en el segundo medio recibe el nombre de onda *refractada* (Fig. 15.9). La intensidad de la onda reflejada es rI_0, en donde I_0 es la intensidad de la onda incidente y r es la fracción de onda reflejada. Entonces la intensidad de la onda refractada es $I_0 - rI_0 = (1 - r)I_0$. El valor de r varía entre 0 y 1, según las circunstancias. Pueden ser exactamente 1,00, en cuyo caso no hay onda refractada y la onda incidente es reflejada en su totalidad. Sin embargo, r nunca es exactamente cero: siempre hay alguna reflexión en la superficie que separa dos medios.

La Fig. 15.9*a* muestra los frentes de onda y la dirección de propagación de las ondas incidente, reflejada y refractada. La luz se propaga en la dirección de las rectas, llamadas *rayos*, que son perpendiculares a los frentes de onda. Físicamente, un rayo no es más que un haz estrecho de luz, tal como se ve en la Fig. 15.9*b*. Esta figura muestra un haz de luz incidente, reflejado y refractado en la superficie de separación entre el aire y el vidrio. Son especialmente interesantes los ángulos que forman los rayos incidente, reflejado y refractado con la superficie de separación. Estos ángulos se miden ordinariamente con respecto a una línea (la *normal*) perpendicular a dicha superficie. Los ángulos de incidencia θ_1, de reflexión θ'_1 y de refracción θ_2 se muestran en la Fig. 15.9*a*. Obsérvese que éstos son también los ángulos entre los frentes de onda respectivos y la propia superficie de separación.

Leyes de la reflexión y la refracción

Considerando el comportamiento de los frentes de onda se pueden deducir las relaciones entre θ'_1 y θ_2 con el ángulo de incidencia θ_1. La Fig. 15.10 muestra con detalle un frente de onda de las ondas incidente y reflejada. Cuando el borde inferior A' del frente de onda incidente AA' llega a ponerse en contacto con la superficie de separación, el borde superior A todavía tiene que recorrer una distancia d para

alcanzar el punto B de la superficie. El borde A llegará a la superficie un tiempo $t = d/v_1$ más tarde, siendo v_1 la velocidad de la onda en el primer medio. En este tiempo, el frente de onda habrá sido reflejado a la posición BB', habiéndose reflejado B' desde A'. La recta $A'B'$ está en la dirección de propagación de la luz reflejada, de modo que es perpendicular al frente de onda BB'. Como las ondas incidente y reflejada se desplazan en el mismo medio, ambas tienen la velocidad v_1. Por lo tanto, la distancia d' entre A' y B' es

$$d' = v_1 t = v_1 \frac{d}{v_1} = d$$

Así, los triángulos rectángulos $A'AB$ y $BB'A'$ son congruentes, de modo que los ángulos α y β son iguales. Pero α es igual a θ_1 porque los lados del ángulo α son perpendiculares a los lados correspondientes del ángulo θ_1 (teorema 3, apéndice III). Del mismo modo, β es igual a θ'_1. Por lo tanto, tenemos

$$\alpha = \theta_1 \qquad \beta = \theta'_2$$
$$\alpha = \beta$$

de lo cual obtenemos

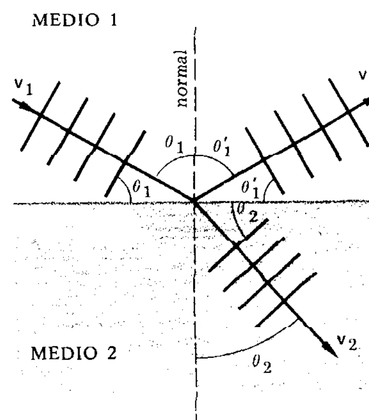
$$\theta_1 = \theta'_1 \qquad \text{ley de la reflexión} \qquad 15.5$$

Así, la *ley de la reflexión* establece que el ángulo de incidencia θ_1 es igual al ángulo de reflexión θ'_1. Esto es así porque las dos ondas se propagan con la misma velocidad en el mismo medio.

OBSERVACIÓN. El ángulo de incidencia es el mismo en todos los puntos de la superficie, sólo en una superficie muy lisa, como por ejemplo un espejo. Para una superficie lisa toda la luz incidente que viene de una dirección es reflejada en la misma dirección. A esto se le llama reflexión *especular* o *regular*. La mayoría de las superficies como, por ejemplo, el papel de este libro, no son lisas. La superficie, vista a través de muchos aumentos, se observa que consiste en millones de microsuperficies, cada una de ellas orientada en una dirección diferente (Fig. 15.11), de modo que el ángulo de incidencia de la luz que ilumina el papel en cualquier punto, depende de la orientación de la microsuperficie en ese punto. Por consiguiente, la luz que incide desde una única dirección, es reflejada en diferentes direcciones desde distintos puntos de la superficie. A esto se llama reflexión *difusa*. No está en contradicción con la ley de la reflexión porque esta ley es aún válida para cada microsuperficie.

La Fig. 15.12 muestra en todo su detalle un frente de onda de las ondas incidente y refractada. De nuevo, el borde inferior A' del frente de onda incidente AA' se está poniendo en contacto con la superficie, mientras que el borde superior A todavía tiene que recorrer una distancia d para alcanzar el punto C de la superficie. El borde A llegará a la superficie un tiempo $t = d/v_1$ más tarde. En este tiempo el frente de onda habrá sido refractado a la posición CC', procediendo C' de A'. La línea $A'C'$ está en la dirección de propagación de la luz refractada de modo que es perpendicular al frente de onda CC'. Como la onda refractada se desplaza en el segundo medio, en donde su velocidad es v_2, la distancia d' entre A' y C' es

$$d' = v_2 t = v_2 \frac{d}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} d \qquad 15.6$$



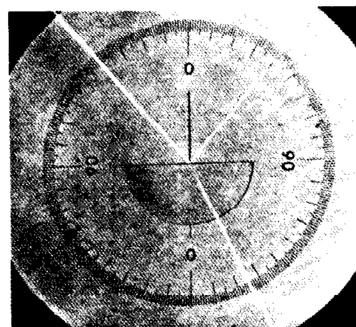


FIGURA 15.9
Reflexión y refracción de la luz en la superficie de separación entre dos medios. (*a*) Los ángulos de incidencia θ_1, reflexión θ'_1, y refracción θ_2 se miden con respecto al normal.
(*b*) Fotografía de un rayo de luz reflejado y refractado en la superficie aire-vidrio. El rayo refractado no es refractado de nuevo al volver a pasar al aire porque su ángulo de incidencia sobre la superficie curvada vidrio-aire es cero.
(Tomada de Física PSSC, 3.ª edición, Editorial Reverté, S. A., Barcelona.)

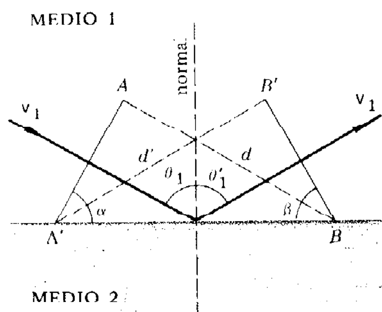


FIGURA 15.10
Un frente de onda reflejado por una superficie.

Por el teorema 3 del apendice III vemos de nuevo que α es igual a θ_1 y β es igual a θ_2, de modo que a partir de los triángulos rectángulos $A'AC$ y $CC'A'$ tenemos

$$\text{sen}\,\theta_1 = \text{sen}\,\alpha = \frac{d}{A'C}$$

y

$$\text{sen}\,\theta_2 = \text{sen}\,\beta = \frac{d'}{A'C}$$

o también

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{d}{d'}$$

Pero, de acuerdo con la Ec. 15.6,

$$\frac{d}{d'} = \frac{v_1}{v_2}$$

por lo tanto

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Ésta es una forma de la ley de la refracción.
Conviene volver a escribir esto en función del índice de refracción de los dos medios. De la Ec. 15.1 tenemos que

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \qquad \text{y} \qquad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

de modo que la ley de la refracción se puede escribir

$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

o también $$n_1 \text{sen}\,\theta_1 = n_2 \text{sen}\,\theta_2 \qquad \text{ley de la refracción} \qquad 15.7$$

A esto se le llama normalmente *ley de Snell.*

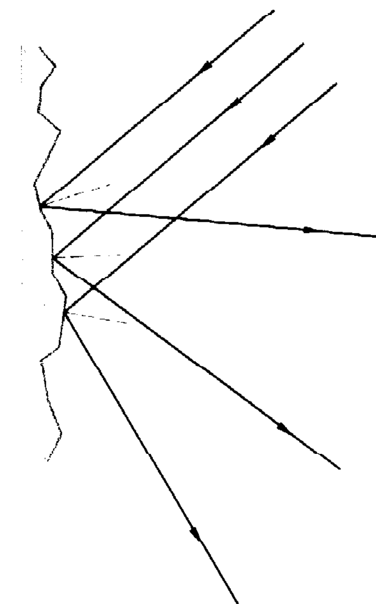


FIGURA 15.11
Vista ampliada de la luz reflejada por las microsuperficies de una superficie rugosa.

Ejemplos en los que interviene la ley de Snell

Ejemplo 1. Un haz de luz incide con un ángulo θ_1 sobre una cara de una lámina de vidrio de caras paralelas (Fig. 15.13). ¿Cuál es el ángulo ϕ_1 con el que emerge el haz por la otra cara del vidrio?
De acuerdo con la Ec. 15.7, el ángulo de refracción θ_2 de la luz en el vidrio viene dado por

$$\text{sen}\,\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\,\text{sen}\,\theta_1$$

Como las caras de la lámina de vidrio son paralelas, θ_2 es igual al ángulo ϕ_2, con el que la luz incide sobre la segunda superficie. Cuando la luz pasa de nuevo al aire, vuelve a ser refractada. Este ángulo de refracción ϕ_1 viene dado por

$$\operatorname{sen}\phi_1 = \frac{n_2}{n_1}\operatorname{sen}\phi_2 = \frac{n_2}{n_1}\operatorname{sen}\theta_2$$
$$= \frac{n_2}{n_1}\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_1$$

Por lo tanto, $\phi_1 = \theta_1$, lo cual quiere decir que la luz sale del vidrio paralela al rayo de luz incidente. O sea, una lámina de vidrio de caras paralelas no produce una desviación neta de un rayo de luz, aunque el rayo emergente está desplazado paralelamente al rayo incidente.

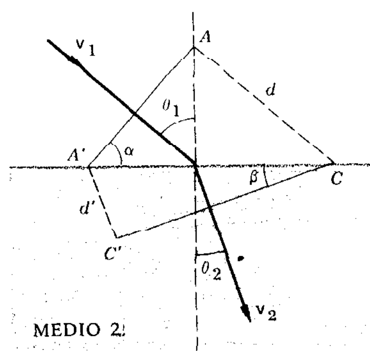


FIGURA 15.12
Un frente de onda refractado en la superficie de separación entre dos medios.

Ejemplo 2. Un haz de luz incide con un ángulo θ_1 de 40° sobre una cara de un prisma de vidrio con un *ángulo en el vértice A* de 60° e índice de refracción n_2 de 1,5 (Fig. 15.14). ¿Cuál es el *ángulo de desviación* θ_D entre los haces incidente y emergente?

Como las caras del prisma no son paralelas, el haz no emerge paralelo al haz incidente. Para hallar el ángulo de desviación debemos seguir el haz a través del prisma. Así el ángulo θ_2 con que se refracta el haz incidente en el prisma es

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{1,5}\operatorname{sen}40°$$
$$= 0,429$$

o sea

$$\theta_2 = 25,4°$$

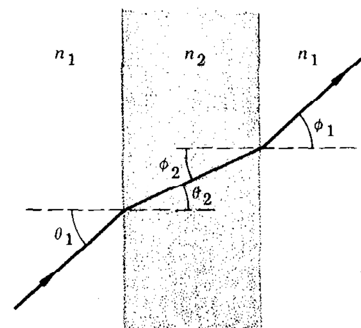


FIGURA 15.13
Un rayo de luz pasando a través de una lámina de vidrio de caras paralelas.

El ángulo de incidencia ϕ_2 de este rayo sobre la otra cara del prisma se halla por simple geometría. La suma de los ángulos interiores del triángulo *OST* es 180°:

$$A + \alpha + \beta = 180°$$

Pero $\alpha = 90° - \theta_2$, y $\beta = 90° - \phi_2$, de modo que

$$A + (90° - \theta_2) + (90° - \phi_2) = 180°$$

o también

$$\phi_2 = A - \theta_2$$

Así, en este ejemplo, $\phi_2 = 60° - 25,4° = 34,6°$. El ángulo de refracción ϕ_1 con el que el rayo sale otra vez al aire se halla utilizando una vez más la Ec. 15.7

$$\operatorname{sen}\phi_1 = \frac{n_2}{n_1}\operatorname{sen}\phi_2 = 1,5\operatorname{sen}34,6°$$
$$= 0,853$$

o sea

$$\phi_1 = 58,6°$$

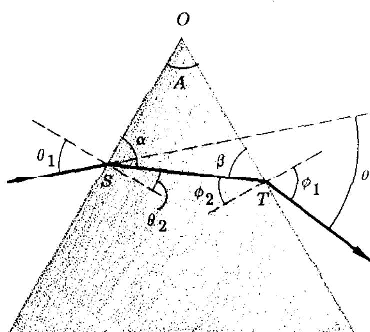


FIGURA 15.14
Un rayo de luz al pasar por dos caras de un prisma.

El *ángulo de desviación* θ_D, por simple geometría, se puede demostrar que es

$$\theta_D = (\theta_1 - \theta_2) + (\phi_1 - \phi_2)$$
$$= \theta_1 + \phi_1 - A$$

y en este ejemplo es $\theta_D = 40° + 58{,}6° - 60° = 38{,}6°$.

Este último ejemplo demuestra que el ángulo de desviación depende claramente del ángulo en el vértice A, del ángulo de incidencia θ_1 y del índice de refracción n_2 del vidrio. Como el índice de refracción del vidrio es ligeramente diferente para distintas longitudes de onda de la luz, el ángulo de desviación también depende de la longitud de onda. La luz blanca es una mezcla de luz de diferentes longitudes de onda, de modo que cuando se hace pasar un haz de luz blanca a través de un prisma, las diferentes longitudes de onda de que está compuesto son desviadas en diferentes ángulos. Como consecuencia, la luz es descompuesta en sus longitudes de onda componentes. El ojo siente estas diferentes longitudes de onda como colores distintos y, por lo tanto, la luz sale con su espectro de colores. Un arco iris se produce por refracción de la luz del Sol en las gotas de agua que hay en la atmósfera.

Reflexión total

Un rayo de luz es refractado hacia la normal cuando entra en un medio de índice de refracción más alto y es refractado apartándose de la normal cuando entra en un medio de índice de refracción más bajo. Este último caso es especialmente interesante. Supongamos, por ejemplo, que un rayo de luz que procede de un vidrio ($n_1 = 1{,}5$) incide sobre la superficie vidrio-aire con un ángulo $\theta_1 = 60°$. Según la ley de Snell, el ángulo de refracción θ_2 viene dado por

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1 = 1.5 \operatorname{sen} 60° = 1.3$$

Pero, no hay ningún ángulo con un seno de 1,3 y de hecho no sale luz al aire. Toda la luz que incide sobre la superficie vidrio-aire es reflejada y devuelta al vidrio. Este fenómeno, llamado *reflexión total,* ocurre siempre que el ángulo de incidencia θ_1 produce un valor de sen θ_2 que es mayor que 1. Así la condición para la reflexión total es

$$\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1 > 1$$

que sólo se puede satisfacer si $n_1 > n_2$. El ángulo más pequeño, o *crítico,* para que exista reflexión ocurre cuando

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \qquad 15.8$$

Por ejemplo, el seno del ángulo crítico en la superficie vidrio-aire es

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}667$$

de modo que el ángulo crítico es

$$\theta_1 = 42^\circ$$

El índice de refracción de una sustancia se puede determinar fácilmente midiendo el ángulo crítico de la sustancia y utilizando la ecuación 15.8 para calcular n_1. Los aparatos ópticos para medir el índice de refracción, llamados *refractómetros*, se usan para analizar la concentración de soluciones. Por ejemplo, una mezcla de agua y alcohol tiene un índice de refracción intermedio entre los valores para el agua pura y el alcohol puro. El porcentaje de alcohol en la mezcla se puede determinar midiendo con precisión el índice de refracción de la mezcla agua-alcohol. Para comprobar la mezcla anticongelante de los radiadores de los automóviles se emplean ahora en los garajes, sencillos instrumentos ópticos basados en el principio de la reflexión total.

Óptica de fibras en medicina

La reflexión total tiene una aplicación importante en el campo de la óptica de fibras. Una *fibra óptica* es un largo y estrecho filamento de vidrio o de plástico transparente. Como es estrecho, la luz que entra en la fibra por un extremo choca contra la pared interior de la fibra con un ángulo mayor que el crítico (Fig. 15.15). Como la luz es reflejada totalmente dentro de la fibra, camina a lo largo de la fibra haciendo cientos de reflexiones internas sin escapar. Incluso si la fibra está doblada de forma complicada, todavía pasará la luz desde un extremo al otro sin perderse lo más mínimo. Solamente será refractada la luz fuera de la fibra cuando ésta se halle tan doblada que la luz choque con una superficie interna, con un ángulo menor que el ángulo crítico.

Para examinar objetos, que de otro modo serían inaccesibles, se utilizan manojos de cientos de miles de fibras ópticas extremadamente delgadas (de un diámetro de unos 2×10^{-3} cm). Cada una de las fibras transmite luz desde una pequeña región del objeto y los miles de fibras en conjunto forman una imagen de todo el objeto. Así resulta que las fibras son semejantes a los omatidios del ojo compuesto de un insecto.

La óptica de fibras está teniendo hoy día una gran aplicación en medicina. Por ejemplo, el interior del estómago de un paciente se examina introduciendo dentro de él un paquete de fibras. Desde el exterior, se manda la luz a través de las fibras para iluminar el interior del estómago, y la luz reflejada vuelve a pasar por las fibras del paquete (Fig. 15.16). Así se puede detectar la presencia de lesiones en el interior del estómago sin necesidad de operar [Persyko (1969)].

Estos dispositivos de fibras se utilizan también para medir la concentración de oxígeno en la sangre dentro del corazón. Por una arteria se hace llegar al corazón un paquete de fibras de unos pocos milímetros de espesor. La luz enviada por un conjunto de fibras del paquete es dispersada por la sangre y vuelve al exterior por otro conjunto de fibras. No se forma ninguna imagen pero se determina la concentración de oxígeno mediante un análisis espectroscópico de la luz devuelta [Gamble (1965)].

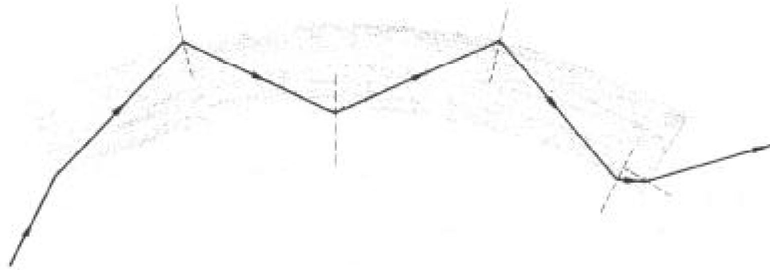


FIGURA 15.15
(*a*) Una fibra óptica. La luz que entra por un extremo de la fibra es reflejada internamente hasta que alcanza el otro extremo.

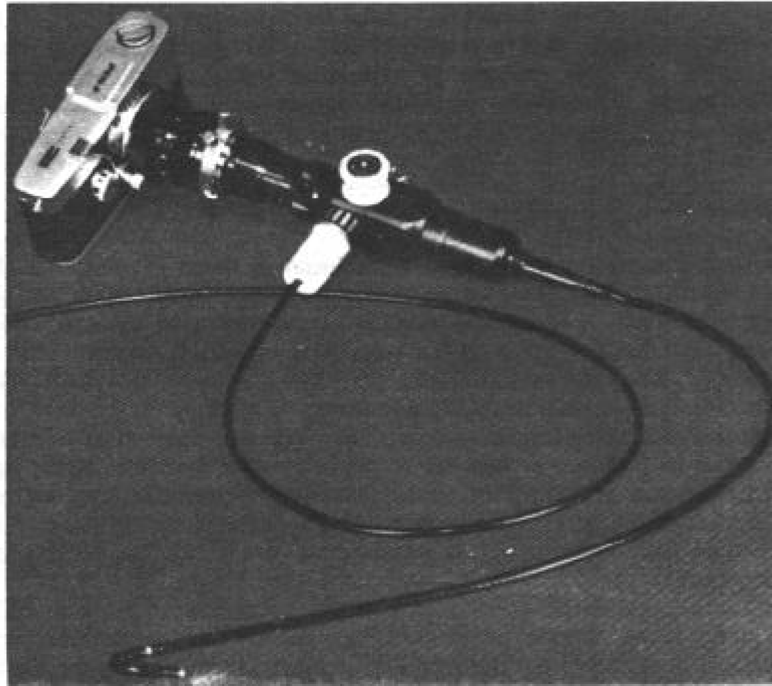


FIGURA 15.16
Gastroscopio de fibras acoplado a una cámara. El paquete de fibras de la derecha se introduce en el estómago que es iluminado por la luz que pasa desde el paquete de la izquierda a través de las fibras externas del paquete introducido. Entonces, la luz reflejada desde la pared del estómago pasa de nuevo a través de las fibras interiores del paquete y forma una imagen sobre la película de la cámara.
(American Optical Corporation, Fiber Optics Division)

15.4. COLOR

Un observador con visión normal para el color percibe que la luz de una sola longitud de onda tiene uno de los colores *espectrales.* La gama de estos colores va desde el púrpura azulado para la luz de una longitud de onda de 420 nm, hasta el rojo para la luz con una longitud de onda de 700 nm, pasando por el verde para la luz de una longitud de onda de 520 nm. Sin embargo, la mayor parte de la luz que percibimos, como, por ejemplo, la luz reflejada en un libro azul, está formada por más de una longitud de onda. El análisis espectral de esta luz mostraría que contiene todas las longitudes de onda, aunque habría probablemente mayor intensidad de luz procedente del extremo de longitud de onda más corta (azul) del espectro, que del extremo de longitud de onda más larga (rojo).

El color es un atributo psicológico de la luz y la relación entre estos atributos y los atributos físicos de la luz pertenece al dominio de la psicofísica. Sin embargo, a diferencia de otros sentidos, la visión del

color se puede reducir a leyes matemáticas exactas que fueron formuladas en 1853 por Hermann Grassmann (1809-1877). Estas leyes son la base de todo el proceso industrial del color.

La relación entre el color y la longitud de onda de la luz parece que es análoga a la relación que existe entre el tono y la longitud de onda (o frecuencia) del sonido. Hay diferencias muy importantes, sin embargo, debidas al modo cómo son detectadas estas ondas. Por ejemplo, el oído hace un análisis espectral de una onda sonora incidente. La onda produce vibración en el tímpano y éste transmite estas vibraciones por medio de una cadena mecánica compuesta de tres pequeños huesos (los *huesecillos auditivos*) hasta una estructura que hay en el oído interno llamada *caracol* (Fig. 15.17). Este órgano en forma de espiral está lleno de un fluido viscoso *(perilinfa)* y posee un tabique que lo divide en dos en toda su longitud. La Fig. 15.18 muestra una sección sagital del caracol del oído desenrollado. Las vibraciones transmitidas a la perilinfa a través de la *ventana oval* hacen que el tabique oscile. Como la parte más delgada del tabique está cerca de la entrada del caracol (extremo *basal*) y la más gruesa en el otro extremo *(apical)*, las ondas de baja frecuencia producen un desplazamiento máximo del tabique cerca del extremo apical y las ondas de alta frecuencia lo producen cerca del extremo basal. Los órganos sensoriales que hay dentro del tabique convierten los desplazamientos del tabique en impulsos nerviosos, de modo que las ondas de frecuencia diferente estimulan órganos sensoriales diferentes. El resultado es que, en efecto, el oído analiza un sonido complejo en sus componentes frecuenciales.

El ojo tiene mucha menos capacidad para discriminar entre composiciones luminosas de frecuencias diferentes que la que tiene el oído para discriminar entre sonidos compuestos de diferentes frecuencias. La luz que incide en el ojo se concentra en la retina, que es una area cubierta por dos clases de células sensibles a la luz: *bastoncillos* y *conos*. Los bastoncillos son muy sensibles a la intensidad de la luz pero no reaccionan discriminadamente a las diferentes longitudes de onda. Por otro lado, los conos contienen pigmentos que absorben preferentemente la luz de diferentes longitudes de onda. Sólo hay tres clases diferentes de pigmentos y cada célula cónica contiene una de

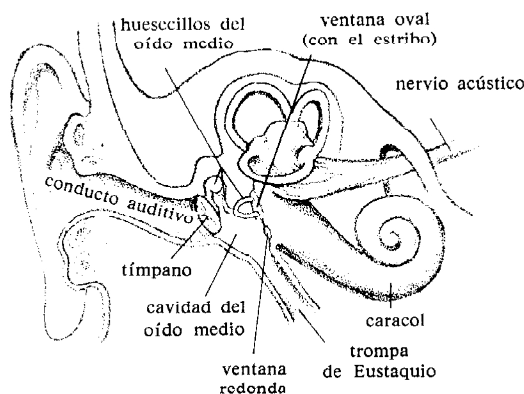


FIGURA 15.17
Anatomía del oído interno y externo.
(Según P. B. Denes y E. N. Pinson, "The Speech Chain" Copyright 1963, Bell Telephone Laboratories, Incorporated; con autorización.)

ellas. En consecuencia los conos sólo pueden hacer una no muy fina descomposición de la luz en tres partes.

Primera ley de Grassmann del color. *El ojo humano normal sólo percibe tres atributos de la luz, que suelen denominarse brillo, saturación y matiz.* Los fisiólogos dedujeron de este hecho psicológico que debía haber tres, y sólo tres, clases de pigmentos en los conos. Por medio de pruebas de comparación de colores llevadas a cabo con personas que tienen diferentes clases de ceguera para el color, se ha podido deducir el color de estos pigmentos. Pero sólo en las dos últimas décadas ha sido posible aislar estos pigmentos y verificar las deducciones llevadas a cabo.

Por medio de una simple demostración se pueden entender mejor los tres atributos del color. Un proyector, al que se ha colocado un filtro rojo, proyecta una mancha roja sobre una pantalla. El *matiz* es el atributo de la mancha que la distingue de una mancha azul o verde. El *brillo* de la mancha depende de su intensidad, que puede ser modificada variando la intensidad de la lámpara de proyección. El brillo es, pues, análogo a la sonoridad: es la sensación psicológica que corresponde al atributo físico de intensidad. Si con un segundo proyector sin filtro proyectamos una mancha blanca sobre la roja, el resultado será una mancha de color rosa. La mancha de color rosa se diferencia de la roja por la *saturación*. La saturación describe la fuerza o pureza del matiz. Si la intensidad de la luz blanca es muy pequeña comparada con la intensidad de la luz roja, la mancha tiene alta saturación. Al aumentar la cantidad relativa de luz blanca, disminuye la saturación de la mancha. La razón por la que algunas fotografías en color parecen más vivas que la propia realidad es porque sus colores están más saturados que los colores naturales. La fotografía reproduce correctamente los matices pero aumenta la saturación.

La palabra color se refiere en conjunto al matiz, brillo y saturación. O sea, que dos imágenes tienen el mismo color si tienen el mismo matiz, brillo y saturación y sólo en este caso. Ésta es una definición psicológica del color y no hace referencia a los atributos físicos de la luz.

Los atributos físicos de una luz se ponen de manifiesto, de modo conveniente, representando gráficamente la intensidad de cada una de las longitudes de onda que contiene. La Fig. 15.19 da un ejemplo de este gráfico llamado *espectro de la luz*. En esta figura cada punto representa la intensidad de la luz en un intervalo de longitud de onda de 10 nm. (Los puntos están unidos por una línea continua para mayor claridad.) Como cada longitud de onda del espectro es un atributo

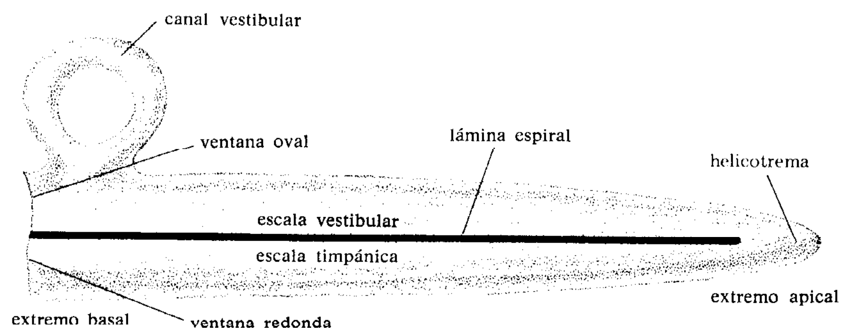


FIGURA 15.18
Vista longitudinal del caracol del oído desenrollado.
(Según P. B. Denel y E. N. Pinson, «The Speech Chain». Copyright 1963, Bell Telephone Laboratories, Incorporated; con autorización.)

físico diferente de la luz, hay mucha más variabilidad física en una luz que la que es detectada por el ojo. O sea, que luces con diferente espectro pueden ser percibidas por el ojo como si fueran del mismo color.

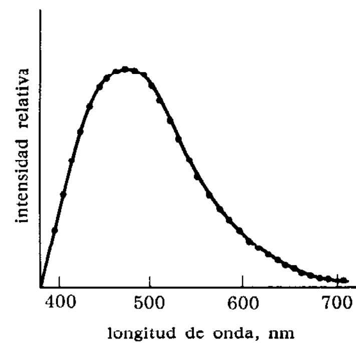


FIGURA 15.19
Espectro de una luz. Cada punto representa la intensidad de la luz en un intervalo de longitud de onda de 10 nm.

Como el color sólo tiene tres atributos, se puede igualar un color de muestra mezclando en cantidades apropiadas tres colores estándar o *primarios*. Las leyes por la que se rige esto se estudian convenientemente utilizando cuatro proyectores, cada uno con un control para variar la intensidad de su lámpara. Uno de los proyectores se utiliza para proyectar el color de muestra S y a los otros tres se les colocan unos filtros para que puedan proyectar los colores primarios. Se superponen los tres colores primarios en una mancha próxima a la del color de muestra (Fig. 15.20) y se varían las intensidades de los primarios hasta igualar el color de la mezcla al color de muestra. Si se logra igualar el color, el color de muestra se especifica únicamente por las intensidades X, Y, Z de los colores primarios necesarios para igualarlo. Estas intensidades, llamadas *valores del triestímulo*, dependen naturalmente de los tres colores utilizados como primarios.

La *cromaticidad* de una muestra de color viene especificada por sus *coordenadas de cromaticidad* (x, y, z), que se definen en función de sus valores de triestímulo por

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \qquad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \qquad z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

Estas coordenadas son las cantidades relativas de cada primario necesarias para igualar la muestra. Dos colores con los valores de triestímulo X, Y, Z y $2X$, $2Y$, $2Z$ tienen la misma cromaticidad. Como estos colores se diferencian sobre todo por el brillo, la cromaticidad corresponde principalmente al matiz y a la saturación.

La suma $x + y + z$ de las coordenadas de cromaticidad de un color, son siempre iguales a 1, de modo que, sólo se necesitan dos de estas coordenadas para especificar la cromaticidad de un color. En consecuencia, la cromaticidad de cada color, que puede ser reproducido con los tres colores primarios, se puede representar como un punto en un gráfico de y en función de x.

Por ejemplo, supongamos que se eligen como primarios los colores espectrales rojo (700 nm), verde (520 nm) y azul (420 nm). Enton-

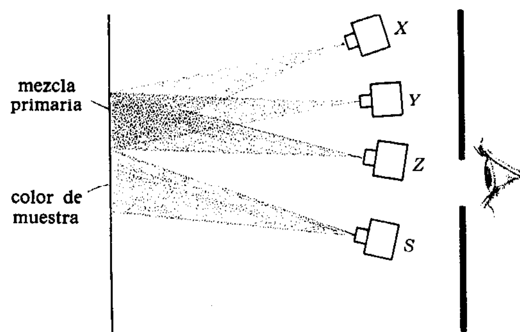


FIGURA 15.20
Experimento para igualar colores. El color de muestra es igualado variando las intensidades X, Y, Z de tres colores primarios proyectados sobre una misma mancha.

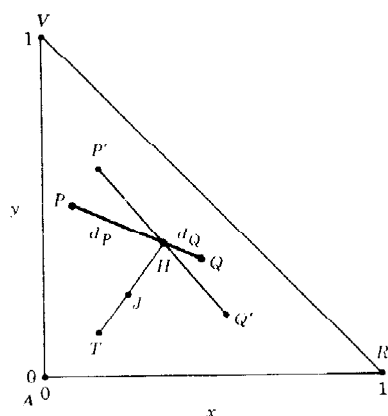


FIGURA 15.21
Diagrama de cromaticidad basado en tres primarios reales, rojo (700 nm), verde (520 nm), y azul (420 nm).

ces x, y, z son las fracciones de rojo, verde y azul necesarias para reproducir el color de muestra. La cromaticidad de cada color, que puede ser reproducido con una mezcla de estos colores, es un punto en el diagrama de cromaticidad que aparece en la Fig. 15.21. Los primarios son los vértices del triángulo. Por ejemplo, el verde (V) tiene las coordenadas ($x = 0$, $y = 1$) y, por lo tanto, el valor de z en este punto es cero porque $x + y + z = 1$. Las coordenadas del azul (A) son ($x = 0$, $y = 0$), porque el valor de z en este punto es 1.

Segunda ley de Grassmann del color. *Cualquier color, que se puede obtener mezclando dos colores específicos, está en la línea recta que une estos colores en un diagrama de cromaticidad.* Por ejemplo, todos los colores, que se obtienen mezclando los colores representados por los puntos P y Q de la Fig. 15.21, están en la línea PQ. Además, la razón d_P/d_Q de las distancias de un color H sobre la línea PQ desde P y Q, es igual a la razón f_Q/f_P de las fracciones de Q y P en la mezcla. O sea, que si H se obtiene mezclando 1/4 de P y 3/4 de Q, el punto que representa a H estará situado a un cuarto de la distancia de Q a P. Si el color H se mezcla con un tercer color T, el color resultante J estará en la línea HT. Así, todos los colores representados por puntos dentro del triángulo QPT se pueden obtener mezclando los colores Q, P, y T, lo mismo que todos los colores del diagrama de cromaticidad se pueden obtener mezclando los primarios R, A, y V.
Tal como se muestra en la Fig. 15.21, el color H también se puede obtener mezclando los colores P' y Q'. Este H, cuando se mezcla con T, produce los mismos colores que los que se obtuvieron al mezclar T con el H preparado a partir de P y Q. Este hecho no es evidente por sí mismo porque la luz procedente de los dos H puede tener composiciones espectrales diferentes.

Tercera ley de Grassmann del color. *Los mismos colores tienen los mismos efectos en las mezclas aunque sus composiciones espectrales sean diferentes.* Por lo tanto, el color puede ser tratado como una entidad matemática, ya que obedece a los axiomas de la suma, o sea, que colores iguales añadidos a colores iguales producen colores iguales. En el diagrama de cromaticidad solamente se representan aquellos colores que se pueden obtener con una mezcla de los primarios. Como no existe conjunto de tres primarios «reales» que reproduzca todos los colores, no es posible representar todos los colores por este procedimiento. Sin embargo, hay un sentido en el que se puede reproducir cualquier color. Cuando el color de muestra de la Fig. 15.20 no se puede reproducir por ninguno de los valores de las intensidades de los primarios, se mezcla uno de los primarios con la muestra, y se varían de nuevo las intensidades de los tres primarios, en un esfuerzo por igualar los dos colores. O sea, que si ningún valor de X, Y y Z reproduce la muestra S, se intenta reproducir, por ejemplo, $X + Y$ y $S + Z$. Esto se hace simplemente proyectando la luz del primario Z encima del color de muestra. Si se logra que sean iguales, los valores de triestímulo se designan por X, Y, $—Z$. En algunos casos puede que haya que añadir a S dos primarios, de modo que, por ejemplo, X se iguala a $S + Y + Z$. En este caso, los valores de triestímulo son X, $—Y$, $—Z$. El signo menos en un valor de triestímulo indica que

el correspondiente primario se añadió a la muestra en lugar de a los otros primarios. Con esta extensión de la noción de reproducción del color se ve que cada color puede ser reproducido combinando de manera apropiada otros tres colores. Incluso se puede decir que tres colores cualesquiera se pueden usar como primarios, con tal de que no estén en la misma línea recta de un diagrama de cromaticidad, o sea, que ninguno de ellos pueda ser reproducido mezclando los otros dos. La introducción de la mezcla negativa permite que cualquier color sea representado por un conjunto de valores de triestímulo. Sin embargo, los valores negativos impiden mostrar la cromaticidad en un sencillo diagrama bidimensional. En 1931, la Comisión Internacional de Iluminación (ICI) estableció un sistema que permite que cada color sea especificado con coordenadas de cromaticidad positivas. Conocido como sistema ICI,* éste asigna coordenadas de cromaticidad positivas a los colores del espectro. Como ningún conjunto de primarios reales puede reproducir todos los colores del espectro con coordenadas positivas, a veces se dice que las coordenadas ICI están basadas en primarios imaginarios. Quizá sea mas simple aceptar estas coordenadas como una representación arbitraria de los colores espectrales, ratificada por acuerdo internacional.

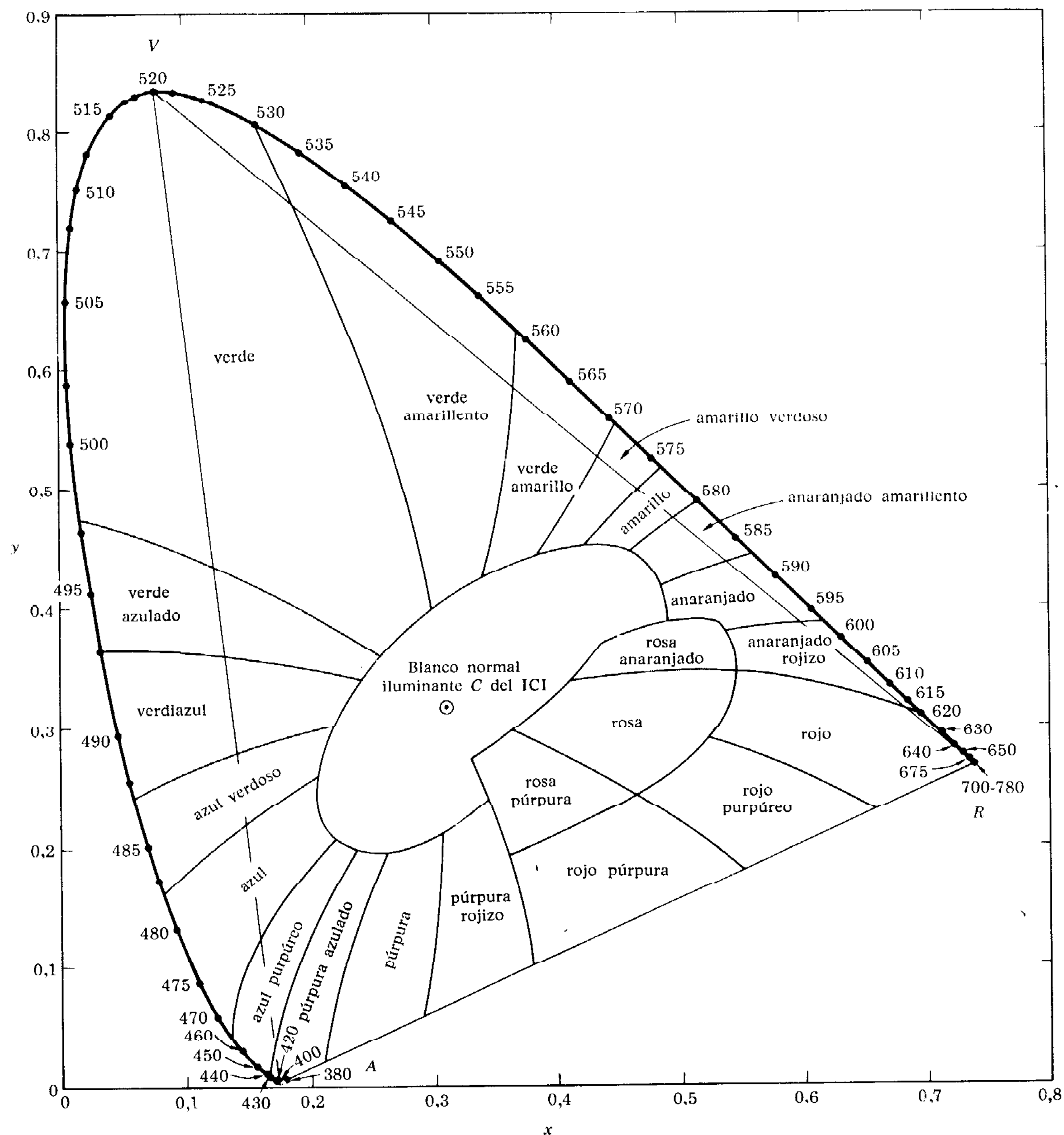
Cada color está representado por un punto en un gráfico de las coordenadas ICI x e y, tal como se muestra en la Fig. 15.21 y en el diagrama en color de la parte interior de la cubierta del libro. Los colores espectrales están sobre la curva y todos los demás colores están dentro de la región cerrada limitada por esta curva y por la línea recta que une sus extremos. Esto se desprende de las leyes de Grassmann y del hecho de que cada color sea una mezcla de colores del espectro, de modo que todas esas mezclas están en la región cerrada. Por ejemplo, todos los colores que se obtienen mezclando los colores del espectro de 420 y 520 nm están a lo largo de la recta AV que une los dos colores. Todos los colores que se pueden obtener mezclando los colores del espectro de 420, 520 y 700 nm están dentro del triángulo AVR. Éstos son los mismos colores representados por el diagrama cromático de la Fig. 15.21.

OBSERVACIÓN. En la Fig. 15.21, los puntos con las coordenadas ($x = 0$, $y = 0$), ($x = 0$, $y = 1$), y ($x = 1$, $y = 0$) corresponden a los primarios sobre los que está basado el diagrama. En la Fig. 15.22, estos mismos puntos están fuera de la región del color real, que es por lo que se dice que representan primarios imaginarios.

El punto C de la Fig. 15.22 es un blanco normal que asemeja la luz del día en un día nublado. La región a su alrededor incluye todos los demás blancos incluso los de lámparas incandescentes y fluorescentes. Los colores son *complementarios* si pueden mezclarse entre sí para dar blanco. Esto significa que deben estar en lados opuestos de la región neutra. Por ejemplo, C puede obtenerse mezclando colores de 470 y 573 nm. Todos los colores que se obtienen mezclando blanco con un color espectral están en la línea que une C con ese color. El color espectral tiene saturación máxima, y la saturación disminuye a lo largo de la línea en dirección a C. O sea, que la saturación aumenta cuando nos desplazamos radialmente desde C hacia la periferia del diagrama, mientras que el matiz varía al desplazarnos alre-

* En Europa se conoce como sistema CIE, siglas de Comission Internationale d'Éclairage.

FIGURA 15.22
Diagrama de cromaticidad ICI. Todos los colores están representados por puntos dentro de la región limitada por la curva y la línea recta que une sus extremos. Los colores representados por el diagrama de la Fig. 15.21 están dentro del triángulo *AVR* de este diagrama. Obsérvese que los puntos (0,0), (0,1) y (1,0), que representan los primarios sobre los que está basado el diagrama, están fuera de la región del color real. *(Tomado de D. B. Judd y G. Wyszecki, "Color in Business, Science and Industry". 2.ª ed. Copyright 1963, John Wiley & Sons, Inc., y usado con autorización.)*



dedor de la periferia. Como los púrpuras son los únicos colores que no se pueden obtener mezclando *C* con un color espectral, a veces se les llama colores no espectrales.

Todos los sistemas de reproducción del color, como la televisión en color, la fotografía en color y la impresión en color, utilizan tres primarios. Los colores primarios, usados en un sistema particular, se pueden representar por medio de tres puntos en un diagrama ICI, y la gama de colores que produce el sistema está dentro del triángulo que une estos puntos. A partir del diagrama ICI se ve que ningún conjunto de tres primarios reproducirá todos los colores.

El diagrama ICI se utiliza también para describir los diferentes tipos de ceguera para el color. La ceguera *dicromática* proviene de la ausencia de uno de los tres pigmentos de los conos. Por lo tanto hay tres clases diferentes de dicromatismo, a saber, *protanopía*, *deuteranopía* y *tritanopía*. Con deuteranopía no se distinguen el verde y el rojo. Esto se muestra en la Fig. 15.23*b*, donde todos los colores que están en la misma línea recta no pueden ser distinguidos por una persona con deuteranopía. Del mismo modo, una persona con protanopía no puede distinguir entre los colores de la misma línea de las de la Fig. 15.23*a* y uno con tritanopía no puede distinguir los colores situados en las mismas líneas de la Fig. 15.23*c*. Estas líneas se obtienen a partir de experimentos de mezcla de colores en los que una persona ciega para el color es la que juzga los resultados. Los colores de los pigmentos del ojo fueron deducidos de estos datos antes de que fueran medidos directamente.

15.5. POLARIZACIÓN

El sonido es una onda mecánica longitudinal (Apart. 14.1), o sea, en una onda sonora los elementos del medio vibran paralelamente a la dirección de propagación de la onda. También hay ondas transversales (Apart. 13.1), como las de una cuerda vibrante, en las que los elementos del medio vibran perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda. La pregunta, naturalmente, es la siguiente: ¿Es la luz una onda transversal o longitudinal?

Al principio puede parecer imposible responder a esta pregunta sin explorar más profundamente la naturaleza de una onda electromagnética. Sin embargo, hay experimentos simples que indican que la luz es una onda transversal. El experimento más fácil utiliza dos láminas Polaroid* idénticas, iguales que las utilizadas para polarizar las gafas de sol. Cada lámina es bastante transparente, y cuando se coloca una de ellas encima de otra, todavía siguen siendo transparentes. Sin embargo, al girar lentamente una lámina con respecto a la otra (figura 15.24), la región de superposición se oscurece hasta que se vuelve completamente oscura cuando una de las láminas ha girado 90° con respecto a la otra, o sea, que las dos láminas juntas son ahora opacas. Si se sigue girando una de las dos láminas, la región de contacto empieza a aclararse y cuando la lámina ha concluido otro giro de 90°, la región de contacto vuelve a ser otra vez transparente.

* Las láminas Polaroid son un invento patentado de Edwin H. Land (1909-?).

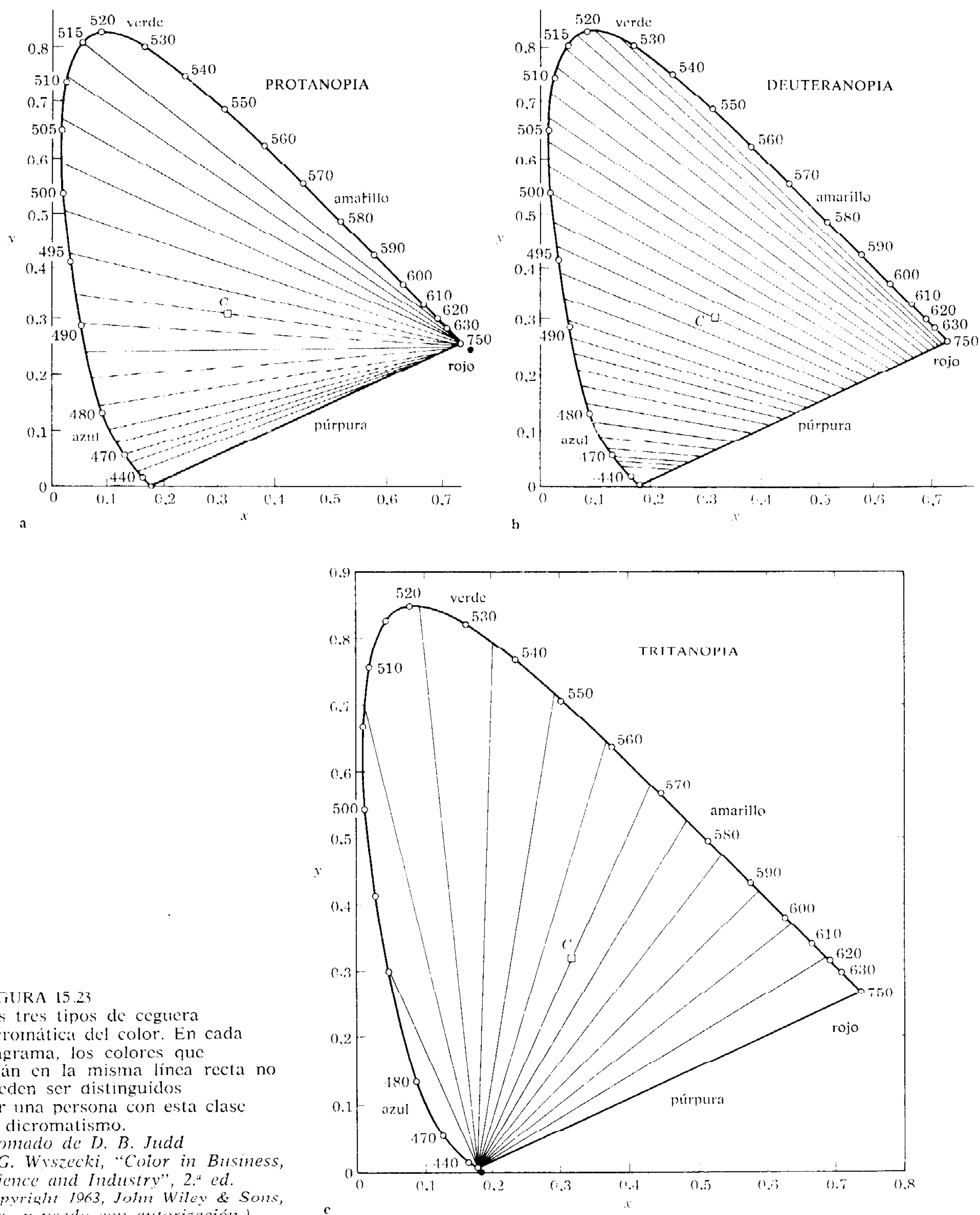


FIGURA 15.23
Los tres tipos de ceguera dicromática del color. En cada diagrama, los colores que están en la misma línea recta no pueden ser distinguidos por una persona con esta clase de dicromatismo.
(Tomado de D. B. Judd y G. Wyszecki, "Color in Business, Science and Industry", 2.ª ed. Copyright 1963, John Wiley & Sons, Inc., y usado con autorización.)

Siglos antes de que se inventasen las láminas Polaroid, fue observado un fenómeno semejante empleando ciertos cristales naturales como la calcita. De hecho, Newton pensó que este fenómeno era una evidencia contra la teoría ondulatoria de la luz, porque todo el mundo supuso entonces que si la luz era una onda, ésta tenía que ser longitudinal como el sonido. Sin embargo, nadie pudo explicar cómo al girar algo alrededor de un eje paralelo a la dirección del movimiento de la onda, podía afectar a la intensidad de una onda longitudinal. En 1817, fue Young el que sugirió por vez primera la explicación natural del fenómeno: la luz es una onda transversal.

Una onda longitudinal sólo puede vibrar en una dirección, mientras que una onda transversal puede vibrar en cualquier dirección que esté en un plano perpendicular a la dirección del movimiento. En un haz de luz *polarizada*, todos los trenes de ondas vibran en la misma dirección transversal, de modo que se puede representar el haz por una única amplitud **A**, tal como se ve en la Fig. 15.25 La amplitud de la luz polarizada se puede tratar como una magnitud vectorial porque está caracterizada por un módulo y por una dirección.

Existen materiales, como, por ejemplo, las láminas Polaroid, que transmiten luz polarizada, de acuerdo con el ángulo que forman la amplitud **A** de la luz y el *eje* de la lámina. Este eje es una dirección fija en la lámina, determinada por la disposición de las moléculas en ella. En la Fig. 15.25 se coloca una lámina de ese material (llamada *analizador*) enfrente de un haz de luz polarizada. Cuando **A** es paralela al eje de la lámina, es transmitida toda la luz pero cuando **A** es perpendicular al eje no se transmite nada de luz.

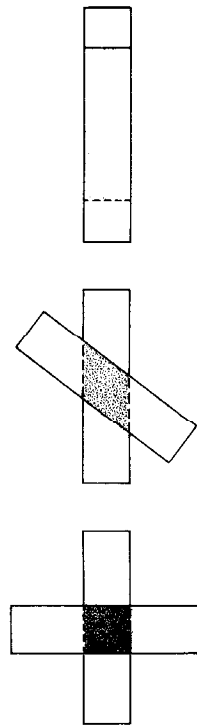


FIGURA 15.24
Una lámina Polaroid que gira con respecto a otra.

Cuando la amplitud **A** de la luz polarizada forma un ángulo θ con el eje de un analizador (Fig. 15.26), la amplitud **A'** de la luz transmitida a través del analizador es la componente de **A** paralela al eje, es decir, el módulo A' de la amplitud transmitida es

$$A' = A \cos \theta \qquad 15.9$$

y la dirección de **A'** es paralela al eje del analizador. Como en el sonido, la intensidad de la luz incidente sobre el analizador es proporcional a A^2 y la intensidad de la luz transmitida es

$$I' = I \cos^2 \theta \qquad 15.10$$

Por ejemplo cuando $\theta = 0°$ toda la luz es transmitida ($\cos^2 0° = 1^2 = 1$); cuando $\theta = 45°$, la mitad de la luz es transmitida ($\cos^2 45° = 0{,}707^2 = 0{,}5$); cuando $\theta = 90°$ no se transmite nada de luz ($\cos^2 90° = 0^2 = 0$). Obsérvese que la luz transmitida está polarizada en la dirección del eje del analizador y no en la dirección de polarización de la luz incidente. De este modo, el analizador cambia la dirección de polarización así como la intensidad de la luz transmitida.

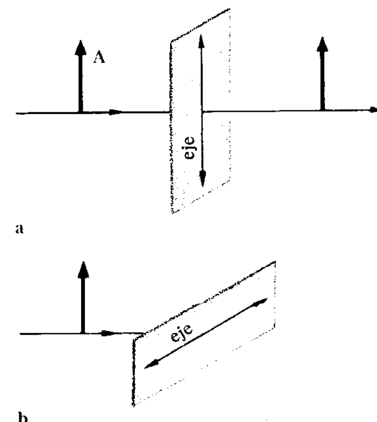


FIGURA 15.25
Luz polarizada de amplitud **A** que incide sobre una lámina Polaroid. (*a*) **A** es paralela al eje de la lámina, de modo que la luz es tranmitida. (*b*) **A** es perpendicular al eje de la lámina, de modo que la luz no se transmite.

La luz ordinaria (no polarizada) consta de miles de millones de trenes de ondas, vibrando cada uno de ellos en una dirección diferente. Esto aparece ilustrado en la Fig. 15.27, donde se ven las amplitudes de varios trenes de ondas. Cuando la luz no polarizada pasa por una lámina Polaroid (llamada *polarizador*), sólo se transmiten las componentes de las amplitudes paralelas al eje de la lámina. El resultado es un haz de luz polarizada, cuya amplitud **A** es paralela al eje del polarizador. Si la intensidad de la luz incidente no polarizada es I_0, la

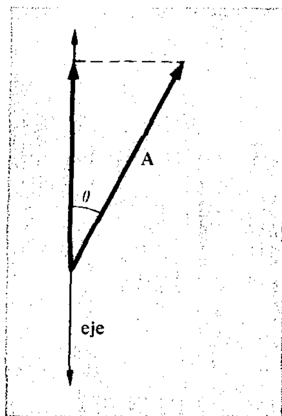


FIGURA 15.26
Amplitud **A** de un haz de luz polarizada de ángulo θ con el eje de una lámina Polaroid.

luz polarizada resultante tiene la intensidad $I = 1/2\ I_0$, puesto que, por término medio, sólo se transmiten la mitad de los trenes de ondas de la luz incidente.

Ejemplo. Sobre el sistema polarizador-analizador de la Fig. 15.27 incide luz no polarizada de intensidad I_0. Si el eje del analizador se orienta 35° hacia el del polarizador, ¿cuál es la intensidad I' de la luz transmitida por el analizador?

Sea I la intensidad de la luz polarizada que incide sobre el analizador. Según la Ec. 15.10 la intensidad I' de la luz transmitida es

$$I' = I \cos^2 \theta = I\ (\cos 35°)^2 = 0{,}671\ I$$

Pero $I = ½\ I_0$, donde I_0 es la intensidad de la luz no polarizada que incide sobre el polarizador, de modo que

$$I' = 0{,}3355\ I_0$$

La luz final posee una intensidad que es 0,3355 veces la de la luz incidente no polarizada, y aparece polarizada en la dirección del eje del analizador.

Luz parcialmente polarizada

La luz *parcialmente polarizada* es una mezcla de luz polarizada y no polarizada que puede variar desde 0 hasta 100 % de polarización. Los trenes de ondas de la luz parcialmente polarizada vibran en todas las direcciones, pero las amplitudes de estas vibraciones son máximas en una dirección, como se ve en la Fig. 15.28. La luz no polarizada se hace parcialmente polarizada cuando es reflejada en una superficie no metálica, siendo la dirección de polarización paralela a la superficie reflectante (Fig. 15.28).

Las lentes de las gafas Polaroid constan de láminas Polaroid orientadas con sus ejes verticales. Esta orientación es perpendicular a la dirección de polarización de la luz reflejada en una superficie horizontal. En consecuencia, estas gafas eliminan mucha de la luz espectral reflejada que es la que produce el deslumbramiento.

El cielo es azul por la luz del sol reflejada (o dicho con más precisión, dispersada) por las moléculas en la alta atmósfera. Como resultado, la luz del cielo está parcialmente polarizada y el módulo y la dirección de polarización en cualquier punto, dependen de su posición con respecto al Sol. La Fig. 15.29 es un mapa de la polarización de

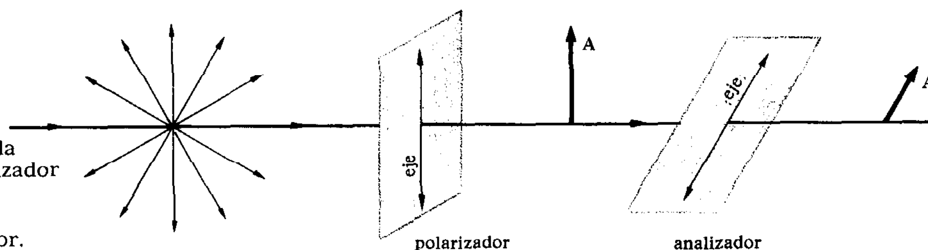


FIGURA 15.27
Un haz de luz no polarizada que incide sobre un polarizador y un analizador. El eje del analizador está orientado a 35° del eje del polarizador.

la luz del cielo cuando el Sol se halla en la posición indicada. Las líneas discontinuas separan regiones con diferentes porcentajes de polarización, y las flechas muestran la dirección de polarización en varios puntos. El porcentaje de polarización es cero cerca del Sol y alcanza un valor máximo del 70 % a ángulos de 90° con el Sol.

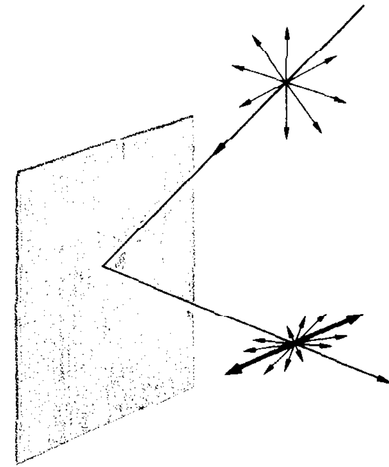


FIGURA 15.28
Luz no polarizada reflejada en una superficie. La luz reflejada está polarizada en una dirección paralela a la superficie.

Vuelo de las abejas

Karl von Frisch (1886-?) y sus colaboradores han demostrado, a través de una serie de brillantes experimentos hechos durante muchos años, que las abejas se mueven por referencia al Sol. Esto es extraordinario, ya que el Sol está continuamente moviéndose por el cielo durante el día. Por ejemplo, supongamos que una mañana una abeja, al ir desde su colmena a un lugar donde hay mucho néctar, encuentra su camino volando a 30° Oeste del Sol. Después, por la tarde, tiene que volar, digamos, a 40° Este del Sol para llegar al mismo sitio. Los experimentos han demostrado que las abejas hacen una compensación por el movimiento del Sol, incluso si se las mantiene en una habitación oscura en el intervalo comprendido entre su vuelo matutino y el de la tarde. Así, pues, las abejas no sólo miden los ángulos con respecto al Sol sino que también tienen un reloj interno con el que pueden hacer la compensación del movimiento del Sol.

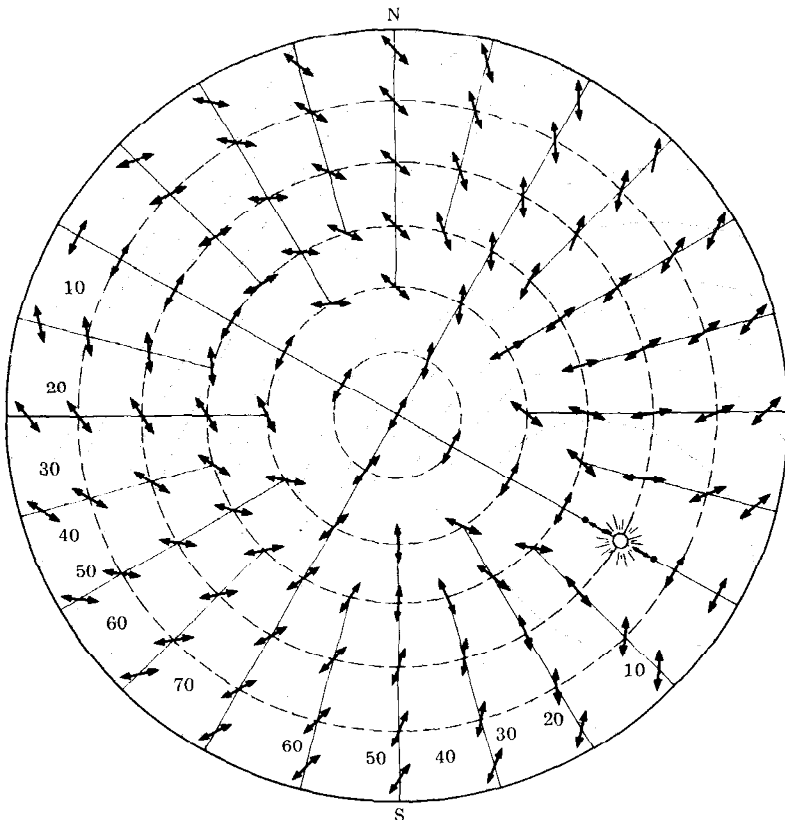


FIGURA 15.29
Polarización del cielo cuando el Sol se halla en la posición que se muestra. Las líneas discontinuas separan regiones con diferentes porcentajes de polarización.
(Tomado de K. von Frisch, "The Dance Language and Orientation of Bees". Copyright 1967, The Belknap Press of Harvard University Press, usado con autorización.)

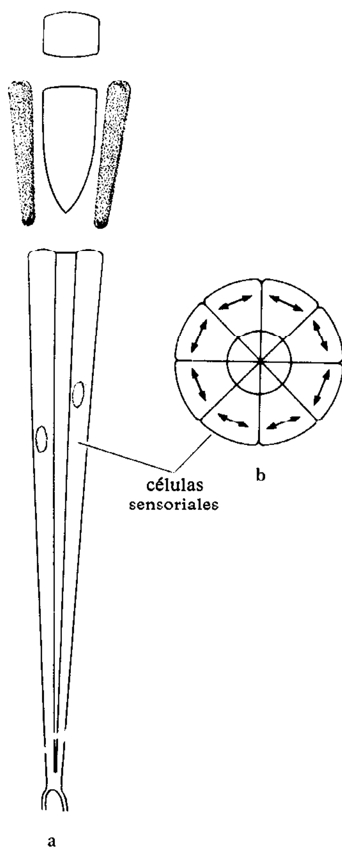


FIGURA 15.30
Omatidio del ojo de un insecto: (*a*) corte sagital; (*b*) corte transversal. Cada una de las ocho células sensibles a la luz detecta luz de diferente polarización, tal como se indicó.

Frisch descubrió también que las abejas pueden volar incluso cuando el Sol está cubierto por una nube, a condición de que se vea algo de cielo azul. Él determinó que las abejas detectan la polarización del cielo y de esto deducen la posición del Sol. Aunque parezca increíble, se ha demostrado con los experimentos más convincentes. Por ejemplo, cuando se cambia la polarización aparente del cielo colocando una lámina Polaroid sobre una colmena, las abejas se orientan de acuerdo con la polarización del cielo visto a través del polarizador.

Para entender el mecanismo que rige esto, hay que volver a observar el ojo de un insecto. La Fig. 15.30 muestra unos dibujos esquemáticos del omatidio de un ojo de insecto en un corte sagital y transversal. El cuerpo del omatidio consta de ocho células sensoriales dispuestas simétricamente alrededor del eje central. Algunos experimentos electrofisiológicos han demostrado que cada célula responde a una diferente dirección de polarización, tal como se indica en la Fig. 15.30*b*. Para ver lo que ve una abeja, Frisch construyó un analizador octogonal consistente en ocho triángulos de láminas Polaroid dispuestas tal como se observa en la Fig. 15.31. La Fig. 15.32 muestra lo diferentes que son las regiones del cielo cuando se miran a través de este analizador. Esta regiones del cielo, que al ojo humano parecen iguales, dan configuraciones muy diferentes al mirarlas a través del analizador en forma de estrella, porque la polarización de la luz del cielo es diferente en distintas regiones (Fig. 15.29).

En uno de los experimentos de Frisch se hizo que las abejas tuvieran que volar a un lugar donde había néctar colocado justo a poniente de la colmena. Se colocó la colmena de tal manera que la abeja sólo pudiera ver un trozo pequeño de cielo al oeste de la colmena. Al realizar el experimento, este trozo de cielo daba el diagrama de la Figura 15.33*a* cuando se miraba a través del analizador. Las abejas efectúan un pequeño vuelo de orientación antes de abandonar la colmena, del que un observador puede deducir la dirección que pretenden seguir. Al principio, las abejas del experimento se orientaron adecuadamente hacia poniente exacto, pero cuando se colocó una lámina Polaroid sobre la colmena para cambiar la polarización del cielo, tal como se ve desde la colmena, las abejas se orientaron 35° hacia el suroeste. Con una lámina Polaroid enfrente del analizador, el cielo que estaba hacia el oeste daba el diagrama que se observa en la Fig. 15.33*b*, el cual, según averiguó Frisch, era el mismo que el que daba el cielo a 34° Noroeste cuando se veía sin la lámina de polarización enfrente del analizador. Esto indica que las abejas que miraban hacia el oeste, a través de la lámina de polarización, creían que aquella dirección era 34° Noroeste, porque daba el diagrama de polarización propio de aquella dirección. Como el lugar donde estaba el néctar estaba al oeste, las abejas se volvieron a orientar 35° al sur de lo que ellas creyeron que era 34° Noroeste. La diferencia de 1° entra dentro de las imprecisiones experimentales tanto del hombre como de la abeja.

Así, aunque el hombre no ha conocido el fenómeno de la polarización hasta hace unos pocos cientos de años, las abejas y otros insectos lo han estado utilizando durante cientos de millones de años.

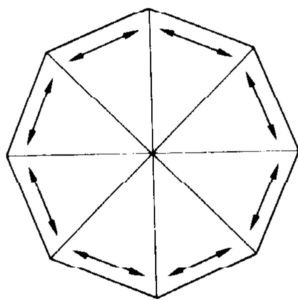


FIGURA 15.31
Analizador de Frisch en forma de estrella consistente en ocho láminas Polaroid de forma triangular, colocadas en forma de octógono.

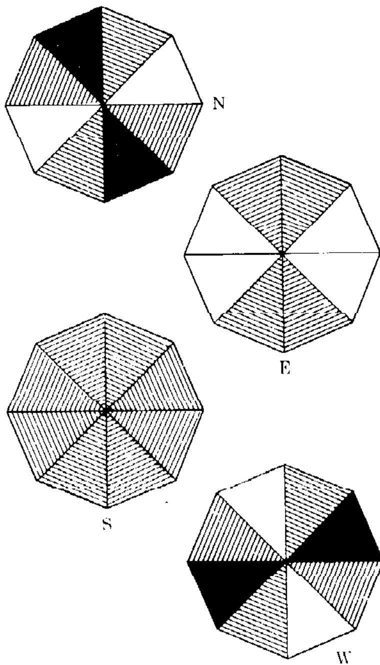


FIGURA 15.32
Diferentes regiones del firmamento vistas a través de un analizador de Frisch.
(Tomado de K. von Frisch, "The Dance Language and Orientation of Bees". Copyright 1967, The Belknap Press of Harvard University Press, usado con autorización.)

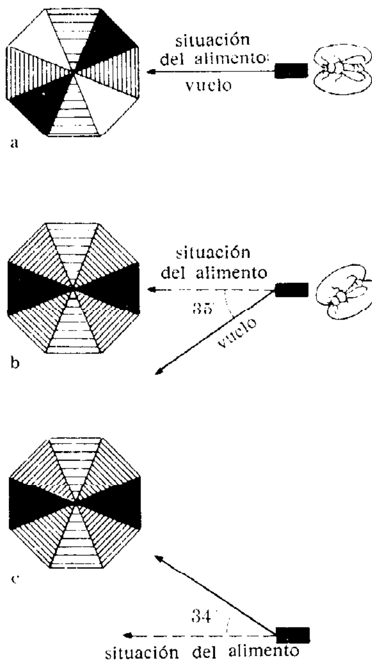


FIGURA 15.33
Experimento de Frisch para probar la capacidad de las abejas para volar según la polarización del cielo. Las abejas que estaban condicionadas para volar hacia el oeste, fueron colocadas en una colmena en la que sólo se veía una porción del cielo en el oeste.
(*a*) Porción del cielo al oeste tal como se veía a través del analizador de Frisch. Cuando la colmena no estaba cubierta, las abejas condicionadas se orientaron hacia el oeste.
(*b*) Porción del cielo al oeste tal como se veía a través del analizador y una lámina Polaroid colocada sobre la colmena. Cuando se cubría la colmena con la lámina Polaroid, las abejas se orientaban 35° sudoeste. (*c*) El cielo a 34° noroeste visto a través del analizador parece el mismo que el cielo del oeste visto a través del analizador y la lámina Polaroid al mismo tiempo. Como consecuencia, las abejas que miraban hacia el oeste a través de la lámina Polaroid se comportaban como si aquella dirección fuera 34° noroeste.
(Tomado de K. von Frisch, "The Dance Language and Orientation of Bees". Copyright 1697, The Belknap Press of Harvard University Press, y usado con autorización.)

PROBLEMAS

1. (*a*) Calcular la longitud de onda de las ondas de radio emitidas por una emisora FM que opera a 100 MHz. (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas emitidas por una estación AM que opera a 100 kHz?
   Resp. (*a*) 3,00 m; (*b*) 3,00 km.
2. ¿Cuál es la frecuencia de una onda electromagnética que tiene la misma longitud de onda que una onda ultrasónica de frecuencia 10^5 Hz?
3. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la luz en un diamante? (Ver tabla 15.1.) La velocidad de la luz en el topacio es $1,85 \times 10^8$ m/s. ¿Cuál es el índice de refracción del topacio?
   Resp. (*a*) $1,24 \times 10^8$ m/s; (*b*) 1,62.
4. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de la luz verde con una longitud de onda de 525 nm? (*b*) Cuando esta luz penetra en el vidrio ($n = 1,50$), su frecuencia no cambia, pero sí su velocidad y longitud de onda. ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el vidrio?
5. ¿Cuál es la longitud de onda en el agua de una luz roja cuya longitud de onda en el aire es 650 nm (ver Prob. 4)?
   Resp. 488 nm.
6. Usar un compás para hacer un dibujo con precisión igual que el de la Fig. 15.3. Colocar las rendijas a 2 cm de distancia y sea la longitud de onda de la onda incidente 1 cm. Hallar las posiciones de los nodos y vientres sobre una pantalla que está a 12 cm de las rendijas. Medir la distancia entre dos vientres y comparar con la Ec. 15.3. Explicar cualquier discrepancia.
7. La luz que incide sobre un par de rendijas produce un diagrama de interferencia sobre una pantalla colocada a 2,5 m de las rendijas. Si la separación entre las rendijas es de 0,015 cm y la distancia entre las franjas brillantes en el diagrama es de 0,76 cm, ¿cuál es la longitud de onda de la luz?
   Resp. $4,56 \times 10^{-5}$ cm.
8. La luz de un laser de neón-helio (630 nm) incide sobre un par de rendijas. En el diagrama de interferencia proyectado sobre una pantalla que se halla a 1,5 m de las rendijas, las franjas brillantes están separadas por 1,35 cm. ¿Cuál es la separación entre las rendijas?
9. La luz de una longitud de onda de 589 nm que incide sobre un par de rendijas, produce un diagrama de interferencia en el que la separación entre las franjas brillantes es de 0,53 cm. Una segunda luz produce un diagrama de interferencia con una separación de 0,64 cm entre las franjas. ¿Cuál es la longitud de onda de esta segunda luz?
   Resp. 711 nm.
10. La luz entra en el ojo por la *pupila*, que es una ventana transparente de unos 7 mm de diámetro. ¿Cuál es el ángulo de difracción θ que se produce cuando un haz paralelo de luz amarilla (589 nm) pasa a través de la pupila?

OBSERVACIÓN. A causa de la difracción, dos rayos que forman un ángulo entre sí menor que θ darán imágenes superpuestas en la retina que no pueden distinguirse. De este modo la difracción limita la discriminación del ojo humano al igual que en el ojo de los insectos.

11. Se colocan dos espejos en ángulo recto el uno con el otro, tal como se ve en la figura 15.34. Un rayo de luz que incide sobre el espejo horizontal formando un ángulo $\theta = 72°$ es reflejado hacia el espejo vertical. (*a*) ¿Cuál es su ángulo de incidencia sobre el espejo vertical? (*b*) Demostrar que después de ser reflejado por el espejo vertical el rayo emergente es paralelo al incidente.
    Resp. (*a*) 18°.

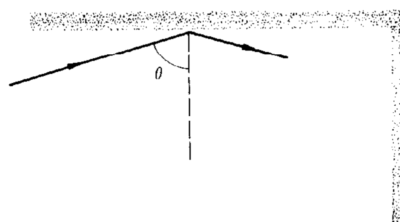


FIGURA 15.34. Problema 11.

OBSERVACIÓN. Durante el primer alunizaje se dejó en la superficie de la Luna un dispositivo de espejos como éste llamado *espejo angular*. A través de un telescopio instalado en la Tierra se envió un rayo laser a este espejo donde una vez reflejado se recogió de nuevo en el telescopio. Midiendo el intervalo de tiempo transcurrido desde el lanzamiento de este rayo y su regreso, se determina la distancia a la Luna con gran precisión.

12. Dos espejos, cada uno de 1,6 m de largo, se colocan uno frente al otro, tal como se ve

en la Fig. 15.35. La distancia entre los espejos es de 20 cm. Se hace incidir un rayo de luz sobre el extremo de uno de ellos con un ángulo de incidencia de 30°. ¿Cuántas veces es reflejado el rayo antes de alcanzar el otro extremo? (*Indicación:* Siga la pista del rayo por medio de un dibujo a escala de los espejos.)

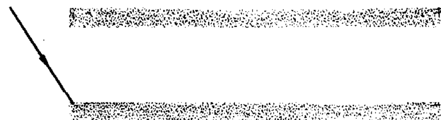


FIGURA 15.35. Problema 12.

13. Un haz de luz en el aire incide sobre el agua con un ángulo de 30°. ¿Cuál es el ángulo del haz dentro del agua?
Resp. 22°.
14. Un rayo de luz incide con un ángulo de 53° sobre un bloque de plástico diáfano. El ángulo de refracción del rayo es de 34°. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?
15. ¿Con qué ángulo debe incidir un rayo de luz sobre el etanol para que se refracte dentro del líquido a 25°?
Resp. 35,1°.
16. Representar gráficamente el ángulo de refracción en función del ángulo de incidencia de la luz que pasa del aire al vidrio ($n = 1{,}50$).
17. ¿Cuál es el ángulo crítico para que haya reflexión total entre el agua y el aire?
Resp. 48,5°.
18. Las leyes de la reflexión y la refracción son las mismas para el sonido que para la luz. El índice de refracción de un medio (para el sonido) se define como la razón de la velocidad del sonido en el aire (343 m/s) a la velocidad del sonido en el medio. (*a*) ¿Cuál es el índice de refracción (para el sonido) del agua? (Usar la tabla 14.1.) (*b*) ¿Cuál es el ángulo crítico para que haya reflexión total del sonido en el agua?

OBSERVACIÓN. Esto significa que el sonido debe incidir sobre el agua con un ángulo menor que 13,2° para que algo de él sea refractado dentro del agua. Ésta es una de las razones por las que se está tan tranquilo debajo del agua.

*19. La Fig. 15.36 muestra un rayo de luz que incide con un ángulo θ_1 sobre un extremo de una fibra óptica. Su ángulo de refracción es θ_2 y choca con la pared de la fibra con un ángulo ϕ_2. Si el índice de refracción de la fibra es 1,30 ¿cuál es el mayor ángulo de incidencia θ_1 que puede tener un rayo y todavía ser reflejado totalmente por la pared de la fibra?
Resp. 55,7°.
20. La fibra óptica de la Fig. 15.36 tiene 2 m de largo y un diámetro de 2×10^{-3} cm. Si un rayo de luz incide sobre un extremo de la fibra con un ángulo $\theta_1 = 40°$ ¿cuántas veces tiene que reflejarse antes de salir por el otro extremo? (El índice de refracción de la fibra es 1,30.)
21. En la práctica, las fibras ópticas tienen un revestimiento de vidrio ($n_3 = 1{,}512$) para proteger la superficie óptica de la fibra. Si la fibra de por sí tiene un índice de refracción $n = 1{,}700$ ¿cuál es el ángulo crítico para que tenga lugar la reflexión total de un rayo dentro de la fibra?
Resp. 62,7°.
22. Repetir los problemas 19 y 20 para la fibra revestida descrita en el Prob. 21.

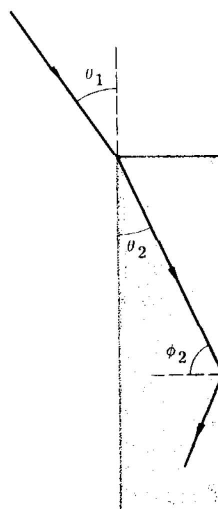


FIGURA 15.36. Problemas 19 a 22.

23. Un rayo de luz incide con un ángulo de 30° sobre un prisma con un ángulo en el vértice de 55° y un índice de refracción de 1,50. Calcular los ángulos que forma el rayo con los lados del prisma. Dibujar el prisma con un transportador y trazar el rayo a través de él. ¿Cuál es el ángulo de desviación?
Resp. 35,5°.
24. La Fig. 15.37 muestra dos placas de vidrio

($n_1 = 1{,}50$) separadas por una película de líquido (n_2). Demostrar que si el líquido es agua ($n_2 = 1{,}33$), un rayo de luz incidente sobre la superficie superior vidrio-líquido con un ángulo $\theta_1 = 64°$ se reflejará totalmente, pero si el líquido es alcohol ($n_2 = 1{,}36$), parte de la luz será refractada a través del líquido hacia la placa inferior de vidrio.

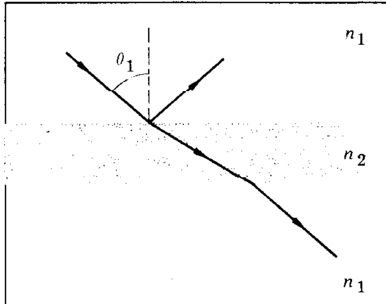


FIGURA 15.37. Problema 24.

25. (*a*) ¿Cuál es el color *P* con coordenadas de cromaticidad ICI ($x = 0{,}400$, $y = 0{,}200$)? (*b*) ¿Cuáles son las coordenadas del color que cuando se mezcla en proporciones iguales con *P* dan blanco normal (*C*)?
Resp. (*a*) rojo-púrpura; (*b*) ($x = 0{,}22$, $y = 0{,}43$).
26. ¿Qué proporciones se necesitan de colores espectrales con longitudes de onda de 480, 510 y 610 nm para producir blanco normal (*C*)?
27. ¿Qué proporciones se necesitan de colores espectrales con longitudes de onda de 485, 520 y 600 nm para producir el color verde cuyas coordenadas de cromaticidad son (0,25 y 0,40)?
Resp. 0,45, 0,23 y 0,32.
28. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del color espectral que es el complemento de 485 nm? (*b*) ¿Existe un color espectral que sea complemento de 520 nm?
29. La amplitud de un haz de luz polarizada forma un ángulo de 65° con el eje de una lámina Polaroid. ¿Qué fracción del haz se transmite a través de la lámina?
Resp. 0,179.
30. Los ejes de un polarizador y de un analizador están orientados a 30° el uno del otro. (*a*) Si luz no polarizada de intensidad I_0 incide sobre ellos, ¿cuál es la intensidad de la luz transmitida? (*b*) Luz polarizada de intensidad I_0 incide sobre este sistema analizador-polarizador. Si la amplitud de la luz forma un ángulo de 30° con el eje del polarizador, ¿cuál es la intensidad de la luz transmitida?
31. Los ejes de un polarizador y de un analizador están orientados entre sí en ángulo recto. Se coloca una tercera placa Polaroid entre ellos con su eje a 45° de los ejes del polarizador y del analizador. (*a*) Si sobre este sistema incide luz no polarizada de intensidad I_0, ¿cuál es la intensidad de la luz transmitida? (*b*) ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida cuando se quita la lámina Polaroid colocada en medio?
Resp. (*a*) 0,125 I_0; (*b*) cero.
32. Sobre un par de láminas Polaroid incide luz polarizada de intensidad I_0. Supongamos que θ_1 y θ_2 son los ángulos entre la amplitud de la luz y los ejes de la primera y segunda lámina respectivamente. Demostrar que la intensidad de la luz transmitida es

$$I = I_0 \cos^2 \theta_1 \cos^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

Capítulo 16 Optica

La óptica es la aplicación de lentes, espejos y prismas a instrumentos que controlan y manipulan la luz. También lleva consigo el diseño y fabricación tanto de las lentes como de los instrumentos en los que se utilizan éstas. En este capítulo no vamos a ver cómo se fabrican las lentes sino que presuponemos que existen lentes de ciertas características; lo que vamos a ver son los principios por los que se rigen estos instrumentos de acuerdo con estas características. Como muchos instrumentos ópticos de uso corriente, como el microscopio, el telescopio, la cámara fotográfica, el proyector y el ojo no son más que diferentes combinaciones de lentes, se pueden entender en función de una sola lente y de las reglas generales que determinan los efectos de las combinaciones de lentes.

16.1. LENTES

Una lente sencilla es un trozo circular y delgado de material transparente, normalmente de vidrio, cuyo espesor varía del centro al borde. Las dos superficies de una lente pueden ser planas, cóncavas o convexas, dando lugar a las cinco posibles formas de lentes que se muestran en la Fig. 16.1. Sin embargo, a pesar de estas diferencias en la forma, sólo existen dos tipos básicos de lentes: lentes *convergentes* (positivas) y *divergentes* (negativas). Las lentes convexas y plano-convexas (Figs. 16.1*a* y 16.1*b*) son siempre convergentes; las lentes cóncavas y plano-cóncavas (Figs. 16.1*c* y 16.1*d*) son siempre divergentes; una lente menisco (Fig. 16.1*e*) puede ser convergente o divergente dependiendo de la curvatura relativa de sus superficies cóncava y convexa.

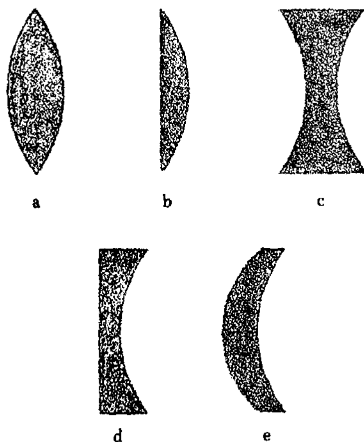


FIGURA 16.1
Las cinco posibles formas de lentes: (*a*) convexa, (*b*) plano-convexa, (*c*) cóncava, (*d*) plano-cóncava, (*e*) menisco.

Una lente se parece a un prisma en que desvía un rayo de luz que pasa a través de ella. Sin embargo, se diferencia de un prisma en que el ángulo de desviación del rayo depende del lugar por donde penetra el rayo en la lente. La Fig. 16.3 muestra varios rayos paralelos que inciden sobre una lente convexa. El rayo *aa'* que pasa por el centro de la lente no es desviado porque las superficies anterior y posterior de la lente son paralelas entre sí en los puntos por donde entra y sale el rayo. El rayo *bb'* es desviado como si pasase a través de un prisma de ángulo en el vértice *B*, siendo *B* el ángulo que forman entre sí la cara anterior y posterior de la lente en los puntos por donde entra y sale el rayo *bb'*. Del mismo modo, el rayo *cc'* es desviado como si pasase a través de un prisma de ángulo en el vértice *C*. A causa de la curvatura de la lente, el ángulo de desviación aumenta con la distancia al centro de la lente.

Una lente convexa, o *positiva*, está tallada de tal manera que todos los rayos paralelos que inciden sobre ella son desviados hacia el mismo punto, tal como se ve en la Fig. 16.3. La línea que pasa por el centro *C* de la lente, perpendicular al plano de la misma, recibe el nom-

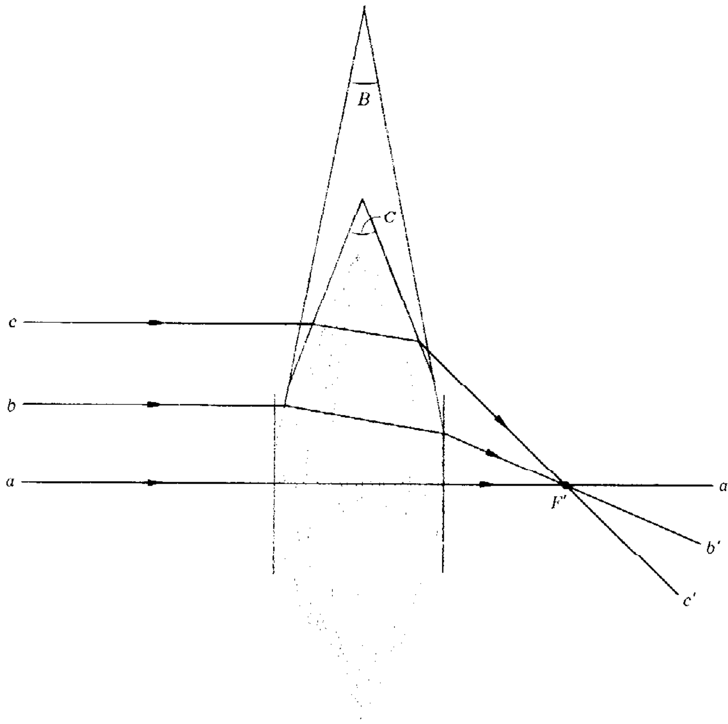


FIGURA 16.2
Rayos paralelos que inciden sobre una lente positiva. Cuanto más lejos está el rayo del centro de la lente, más se dobla el rayo.

bre de *eje* óptico. Todos los rayos incidentes que son paralelos al eje óptico son desviados de modo que pasan por el punto F' del eje óptico. Éste es el *punto focal* o *foco* de la lente.

Definición. La *distancia focal* f de una lente es la distancia desde el centro C de la lente al foco F'. Se trata de la característica principal de una lente.

Por ejemplo, los rayos de luz solar son casi paralelos por la distancia tan grande que separa al Sol de la Tierra. Por lo tanto, todos los rayos de sol incidentes sobre una lente se concentran en el foco. Si se coloca un trozo de papel a una distancia de la lente igual a su distancia focal, los rayos concentrados en el foco quemarán el papel.

La desviación de un rayo es la misma sea cual sea el lado de la lente sobre el que incide. Por lo tanto, los rayos paralelos que incidan sobre la lente de la Fig. 16.3 por la derecha, cortan al eje óptico en el punto F, que está a la misma distancia f a la izquierda de C, que lo está F' a la derecha. En consecuencia, una lente tiene dos focos, uno a cada lado, que se encuentran a la misma distancia f del centro de la lente.

Un rayo dado sigue el mismo camino a través de un sistema óptico, sin importar la dirección de su movimiento a través del sistema. Este principio de *reversibilidad* es importante para el análisis de los sistemas ópticos. Por ejemplo, supongamos que se coloca una fuente de luz en el foco F' de la lente de la Fig. 16.3. Como a partir de esta fuente los rayos divergen en todas direcciones, algunos de ellos pasarán a través de la lente hacia la izquierda. Por el principio de rever-

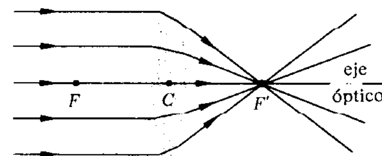


FIGURA 16.3
Los rayos paralelos al eje óptico de una lente positiva convergen en el foco F'.

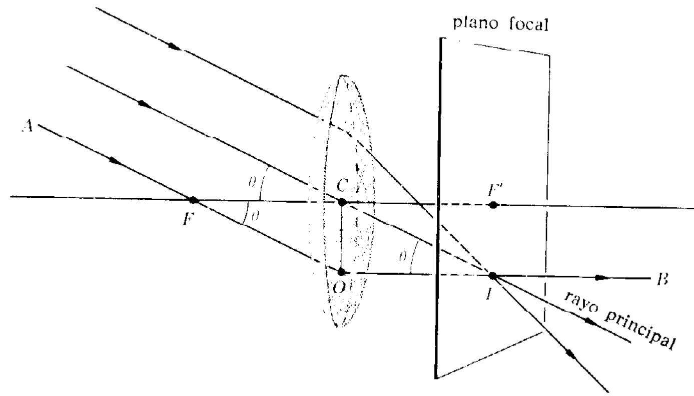


FIGURA 16.4
Rayos paralelos que inciden sobre una lente formando un ángulo θ con el eje óptico. Los rayos convergen en un punto I del plano focal.

sibilidad, estos rayos saldrán paralelos al eje óptico siguiendo los caminos mostrados en la Fig. 16.3 pero en sentido inverso. Aunque continuaremos poniendo flechas sobre los rayos para mayor claridad, hay que recordar que la luz puede viajar en ambas direcciones a lo largo de un rayo.

Como aplicación inmediata de la reversibilidad, consideraremos lo que le sucede a un haz de luz paralela que incide sobre una lente formando un ángulo θ con el eje óptico (Fig. 16.4). De todos los rayos incidentes, uno, llamado *rayo principal*, pasa por el centro de la lente sin desviarse. Otro rayo AO pasa por el foco delantero F de la lente. Sabemos que si un rayo BO paralelo al eje óptico incidiese sobre la lente por la derecha, seguiría el camino OA pasando por F. Por lo tanto, de acuerdo con la reversibilidad, el rayo AO sigue el camino OB hacia la derecha y corta al rayo principal en I. Si el ángulo θ es pequeño, todos los otros rayos incidentes paralelos a AO se cortan también en I. Los triángulos FCO y IOC de la Fig. 16.4 son triángulos rectángulos que tienen un lado común OC y el mismo ángulo θ en F e I. Por lo tanto, estos triángulos son congruentes, de modo que la distancia OI es igual a la distancia focal CF de la lente. Esto quiere decir que I y F' están en un plano, llamado *plano focal*, que es perpendicular al eje óptico en F'. Todos los rayos paralelos se concentran en este plano en un punto cuya posición depende del ángulo que forman los rayos con el eje óptico.

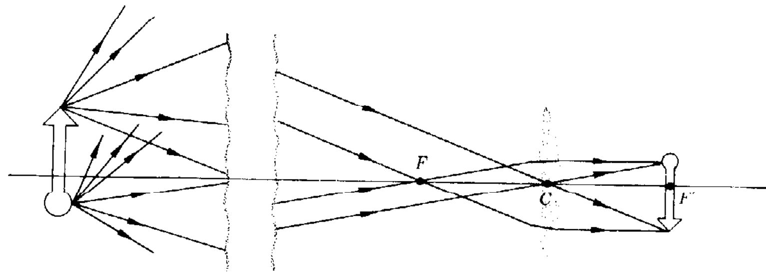


FIGURA 16.5
Imagen real de un objeto distante producida por una lente positiva. Los rayos que alcanzan la lente desde un solo punto de un objeto distante son casi paralelos y, por lo tanto, convergen en un solo punto.

16.2. IMAGENES REALES E INSTRUMENTOS DE UNA LENTE

Una lente positiva (convexa) produce en el plano focal una *imagen real* de un objeto distante, es decir, si se coloca una pantalla en el plano focal, se proyectará en la pantalla una imagen del objeto. Esto sucede porque toda la luz que llega a la lente desde un solo punto del objeto se concentra en un solo punto del plano focal.

Esto se ve con detalle en la Fig. 16.5 Con una iluminación normal, cada punto de un objeto refleja luz de una manera difusa en todas las direcciones. Sin embargo, si el objeto está muy lejos de la lente, todos los rayos que llegan a la lente desde un solo punto del objeto son casi paralelos entre sí y, por lo tanto, se concentran en un solo punto del plano focal. Como los rayos de diferentes puntos del objeto forman ángulos diferentes con el eje óptico, se concentran en puntos diferentes del plano focal. Así, si se coloca una pantalla en el plano focal, se proyecta en ella una imagen real invertida del objeto. A la imagen se le llama *real* para distinguirla de la *virtual* que se verá en el Apart. 16.3.

Una lente puede formar una imagen real de un objeto aun cuando el objeto no esté lejos de la lente. De hecho, si el objeto está a cualquier distancia s de la lente (llamada *distancia objeto*), hay una distancia s' (llamada *distancia imagen*) a la que se formará una imagen real con tal que se dé la condición de que s sea mayor que f. La distancia imagen s' se halla trazando desde un punto del objeto un par de rayos a través de la lente. Tomemos, por ejemplo, el punto B del objeto de la Fig. 16.6 Como los rayos de luz se reflejan en todas direcciones desde este punto, uno de estos rayos va hacia la lente, paralelo al eje óptico. En consecuencia es desviado por la lente de modo que pasa por el foco F'. Otro rayo procedente de B pasa por el centro C de la lente y no es desviado. La intersección de estos dos rayos determina el punto B' donde se localiza la imagen de B. La imagen de cualquier otro punto del objeto se obtiene de modo semejante. Así, mediante este sencillo procedimiento gráfico, se pueden determinar el tamaño h' y la posición s' de la imagen.

El trazado de rayos es útil para entender la función de un sistema de lentes, pero a menudo no es lo bastante preciso para calcular la distancia imagen. Por lo tanto, es necesario obtener una fórmula exacta

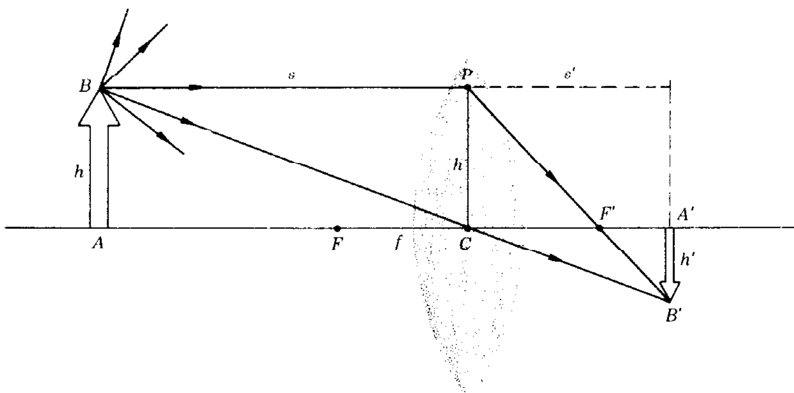


FIGURA 16.6
Imagen real de un objeto producida por una lente positiva. s es la distancia objeto y s' es la distancia imagen.

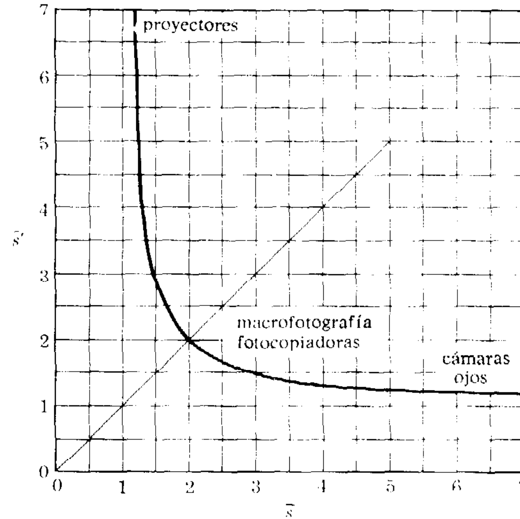


FIGURA 16.7
Gráfico de la distancia imagen reducida $\bar{s}'$ en función de la distancia objeto reducida $\bar{s}$. Varios instrumentos ópticos operan a diferentes valores de $\bar{s}'$ y $\bar{s}$.

1. La curva es simétrica con respecto a la línea recta trazada desde el origen a través del punto $\bar{s} = 2$, $\bar{s}' = 2$. Esto es una consecuencia del principio de reversibilidad que dice que si un objeto situado a una distancia s de una lente da su imagen a una distancia s', entonces un objeto que se halla a una distancia s' de la lente dará su imagen a una distancia s.
2. Cuanto más cerca de la lente se halle el objeto, más lejos estará la imagen.
3. Si $\bar{s} > 2$, entonces $\bar{s}' < 2$, y si $s < 2$, entonces $\bar{s}' > 2$. Esto quiere decir que s y s' no pueden al mismo tiempo ser menores que $2f$, como tampoco pueden ser mayores que $2f$.
4. No se puede formar una imagen real si la distancia objeto es menor que f, y, de acuerdo con la reversibilidad, nunca se forma una imagen real a una distancia menor que f.

Ahora podemos discutir unos cuantos instrumentos ópticos de una lente. Estos instrumentos difieren entre sí en los valores relativos de $\bar{s}$ y $\bar{s}'$ a que funcionan, tal como se indica en la Fig. 16.7.

El proyector

En un proyector (Fig. 16.8), el objeto, por ejemplo una diapositiva, se coloca cerca de la lente y la imagen se forma a gran distancia de la lente. De este modo el proyector opera en la región de pequeño $\bar{s}$ y gran $\bar{s}'$ de la Fig. 16.7.

Ejemplo 2. Un proyector de diapositivas con una lente de distancia focal $f = 15$ cm proyecta una imagen sobre una pantalla que está a una distancia $s' = 4$ m de la lente. ¿A qué distancia de la lente habría que colocar la diapositiva?
Con $f = 15$ cm y $s' = 400$ cm, la fórmula de las lentes da

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{15 \text{ cm}} - \frac{1}{400 \text{ cm}} = \frac{77}{1200} \text{ cm}^{-1}$$

por lo tanto $$s = \tfrac{1200}{77} \text{ cm} = 15{,}6 \text{ cm}$$

Se coloca la diapositiva a sólo una fracción de centímetro delante del foco de la lente.
Cuando se está enfocando un proyector, se ajusta la posición de la lente hasta que se halla a la distancia apropida s de la diapositiva. Un proyector con una lente de 15 cm de distancia focal puede formar una imagen a distancias que varían desde 244 cm en adelante cambiando la distancia entre la lente y la diapositiva de 16 a 15 cm.
El *aumento m* de una imagen es la razón del tamaño h' de la imagen al tamaño h del objeto:

$$m = \frac{h'}{h}$$

De acuerdo con la Ec. 16.1, esto es igual a

$$m = \frac{s'}{s} \qquad 16.4$$

Para un proyector, s es aproximadamente igual a la distancia focal f de la lente, de modo que el aumento es aproximadamente

$$m = \frac{s'}{f} \quad \text{proyector} \qquad 16.5$$

Ejemplo 3. ¿Cuál es el aumento de la imagen formada por el proyector en el ejemplo 2?
Según la Ec. 16.5 el aumento es

$$m = \frac{400 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 26{,}7$$

Así, si el objeto es una diapositiva de anchura $h = 35$ mm, la anchura h' de la imagen en la pantalla es

$$h' = mh = 26{,}7 \times 3{,}5 \text{ cm} = 93{,}3 \text{ cm}$$

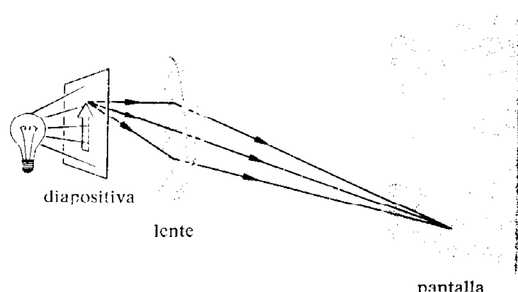


FIGURA 16.8
Proyector de diapositivas. La lente forma una imagen de la diapositiva en una pantalla distante.

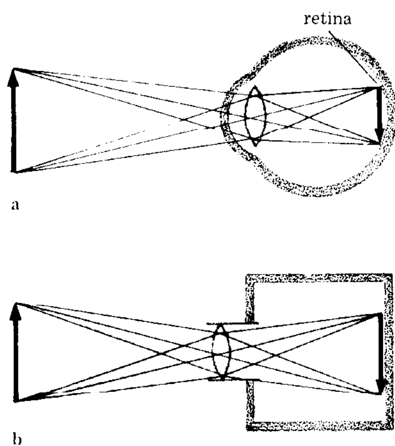


FIGURA 16.9
Un ojo y una cámara fotográfica. (*a*) La lente del ojo forma una imagen de un objeto distante en la retina. (*b*) La lente de la cámara forma una imagen de un objeto distante en la película.

El tamaño de la imagen se puede aumentar, o bien aumentando la distancia entre el proyector y la pantalla, o utilizando una lente de menor distancia focal.

La cámara fotográfica

Los ojos y las cámaras actúan en la región de $\bar{s}$ grande y pequeño $\bar{s}'$ de la Fig. 16.7. Todos los rayos que llegan al ojo desde un punto de un objeto distante son concentrados por la lente del ojo en un solo punto de la retina (Fig. 16.9*a*), de modo que se forma en ella una imagen real e invertida del objeto. La retina está recubierta de células sensibles a la luz que envían señales al cerebro como respuesta a la luz que incide sobre ellas. Dado que lo que el cerebro interpreta como una imagen son estas señales, una persona solamente «ve» la imagen que se ha formado en su retina.

De modo semejante, la lente de una cámara forma una imagen de un objeto distante en una placa sensible a la luz, colocada en la parte posterior de la cámara (Fig. 16.9*b*). La distancia focal de la lente de una cámara normal es de unos 50 mm, de modo que la película debe estar por lo menos a 50 mm detrás de la lente. La lente de una cámara barata de foco fijo está montada permanentemente a la distancia $s' = f$ de la película. Sólo los objetos distantes quedan enfocados en la película de una cámara de este estilo. Por ejemplo, un objeto a 4 m de distancia de la lente da su imagen a una distancia $s' = 50{,}6$ mm detrás de la lente, o sea a 0,6 mm detrás de la película. La imagen de la película estará enfocada aceptablemente en este caso, pero si la distancia objeto es menos de 4 m la imagen será muy borrosa.

La lente de una cámara más cara es móvil, de modo que para dar una imagen nítida en la película, se puede ajustar la distancia lente-película. Por ejemplo, la mayoría de las cámaras de 35 mm* pueden enfocar objetos que estén a una distancia de 0,8 m. Con una lente de 50 mm, esto exige una distancia imagen s' dada por

$$\frac{1}{80 \text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{5{,}0 \text{ cm}}$$

o sea

$$s' = 5{,}33 \text{ cm}$$

Así, para poder enfocar objetos a cualquier distancia desde 0,8 m en adelante, sólo hay que variar la distancia de la lente a la película entre 5,33 y 5,00 cm.

Como la distancia imagen s' en una cámara es siempre aproximadamente f, el aumento (Ec. 16.4) es aproximadamente

$$m = \frac{f}{s} \quad \text{cámara fotográfica} \qquad 16.6$$

y es siempre mucho menor que 1.

* Los 35 mm se refieren a la anchura de la película utilizada y no a la distancia focal de la lente. Sin embargo, la elección de la distancia focal depende del tamaño de la película, porque una cámara con formato grande de película requiere una lente de distancia focal mayor que una cámara con película más estrecha, si las dos cámaras han de fotografiar la misma escena.

Ejemplo 4. ¿Cuál es el tamaño de la imagen de un hombre de 6 pies de alto que está de pie a 20 m de una cámara fotográfica provista de una lente de 50 mm de distancia focal?
De acuerdo con la Ec. 16.6 el aumento es

$$m = \frac{f}{s} = \frac{5 \text{ cm}}{2000 \text{ cm}} = \frac{1}{400} = 0{,}0025$$

y, por tanto, la altura de su imagen en la película es

$$h' = hm = (6 \text{ ft})(0{,}0025) = 0{,}015 \text{ ft} = 0{,}46 \text{ cm}$$

El tamaño de la imagen se puede aumentar, o bien acercando la cámara al objeto, o utilizando una lente de distancia focal mayor.
Un teleobjetivo es una lente con una distancia focal mayor que 50 mm. Es de mucha utilidad en deportes y fotos de reportajes porque permite al fotógrafo tomar planos de cerca de hechos que suceden a distancia. También es muy útil en fotografía de animales salvajes, pues permite tomar primeros planos de animales muy asustadizos. Por ejemplo, el aumento con un teleobjetivo de 300 mm es (300 mm)/(50 mm) = 6 lente de 50 mm. Esto quiere decir que el tamaño de la imagen de un animal a 30 m de distancia tomada con una lente de 300 mm es el mismo que el de la tomada con una lente de 50 mm a 5 m de distancia.

OBSERVACIÓN. La colocación de un teleobjetivo es llamativa por su gran longitud ya que la lente se debe montar en un tubo de 1 distancia focal de largo por lo menos. Por ejemplo, una lente de 300 mm se coloca 300 mm por delante de la película, porque la distancia imagen de un objeto distante es 300 mm. Algunos teleobjetivos más modernos están montados en tubos relativamente cortos en los que la luz recorre la distancia apropiada desde la lente hasta la película reflejándose una y otra vez en espejos que hay dentro del tubo.

Un objetivo gran angular tiene una distancia focal menor que 50 mm y por lo tanto su aumento es menor que el de una lente normal. Su ventaja consiste en que para un tamaño de película dado se obtiene un *campo de visión* más amplio. El campo de visión se mide por el ángulo θ subtendido por la escena que se reproduce en la película. La Fig. 16.10 muestra los rayos principales que alcanzan los bordes extremos de la película para lentes de diferente distancia focal. Se ve claramente que cuanto más corta es la distancia focal de la lente más amplio es el campo de visión.

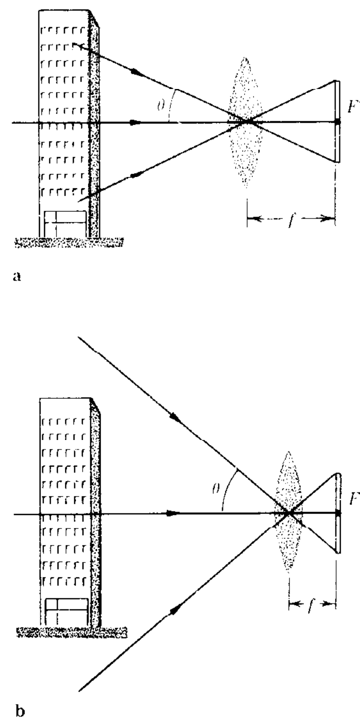


FIGURA 16.10
Campos de visión sobre película de un determinado tamaño producidos por lentes de diferentes distancias focales. La lente de larga distancia focal (*a*) tiene menor campo de visión que la lente de corta distancia focal (*b*).

Macrofotografía

Algunos aparatos ópticos actúan en la región intermedia de la figura 16.7, en donde $\bar{s}$ y $\bar{s}'$ son aproximadamente 2. En una fotocopiadora, por ejemplo, el objeto y la imagen están a una distancia igual a 2 distancias focales de la lente. Esto da un aumento de 1, de modo que la imagen es del mismo tamaño que el objeto. De modo análogo, en macrofotografía la cámara se coloca lo suficientemente cerca de un objeto pequeño, como por ejemplo un insecto, como para obtener en la película una imagen de tamaño real. Por supuesto que para enfocar un insecto que está a 10 cm delante de una lente de 50 mm, la lente

debe colocarse a 10 cm delante de la película. Como normalmente la lente de una cámara no se puede poner a esta distancia, hay que modificar la cámara para hacer macrofotografías. Una manera de hacerlo es montar la lente sobre un tubo telescópico para situarla a la distancia necesaria de la película.

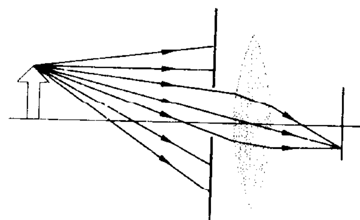


FIGURA 16.11
Una abertura frente a una lente. La abertura impide que parte de la luz alcance cada punto de la imagen, pero no impide por completo que la luz llegue a cualquier punto de la imagen.

Número F

Las lentes, además de por su distancia focal, se caracterizan por su diámetro o *abertura*. En las cámaras, la abertura se da en función del número F, que es la razón de la distancia focal f al diámetro d de la lente:

$$F = \frac{f}{d}$$

Por ejemplo, el diámetro de una lente de 50 mm con un número F de 2,8 es

$$d = \frac{f}{F} = \frac{50 \text{ mm}}{2{,}8} = 17{,}8 \text{ mm}$$

La abertura efectiva de una lente se puede ajustar ocultando parte de ella por medio de un diafragma variable (Fig. 16.11). El diafragma no corta la imagen formada por la lente porque los rayos principales no se ven afectados por él, pero en cambio hace que disminuya el brillo de la imagen. Esto es lo que muestra la Fig. 16.11. Los rayos procedentes de cada punto del objeto pasan por todos los puntos de la lente. Anulando parte de la lente se evita que algunos de estos rayos alcancen el punto imagen, pero todos los puntos imagen reciben algunos rayos.

El número F efectivo de una cámara aumenta al disminuir el diámetro del diafragma. Por ejemplo, con un número F de 16, el diafragma de una lente de 50 mm tiene un diámetro de sólo

$$d = \frac{50 \text{ mm}}{16} = 3{,}1 \text{ mm}$$

Cuanto más pequeño es el número F, mayor es la abertura y el brillo de la imagen. Los valores corrientes de los números F de una cámara son 2,8, 4, 5,6, 8, 11, 16 y 22. Esta secuencia peculiar se explica observando que la cantidad de luz que entra en la lente es proporcional al área de abertura y, por lo tanto, proporcional a d^2. Los cuadrados de los números F están aproximadamente en la relación 1:2:4:8 ..., de modo que un cambio de la abertura en un número F cambia el brillo de la imagen en un factor 2.

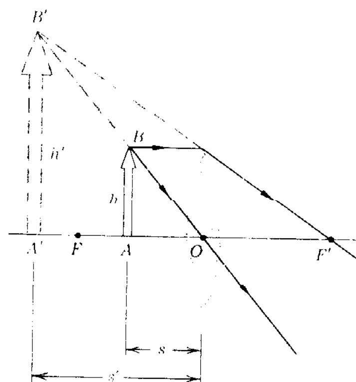


FIGURA 16.12
Imagen virtual formada por un objeto situado dentro del foco anterior de una lente positiva. Los rayos procedentes de un único punto B del objeto no convergen después de pasar por la lente, por lo tanto no se forma imagen real. Sin embargo, cuando los rayos se prolongan hacia atrás, parece que parten de un punto único B' de la imagen virtual.

16.3. IMAGENES VIRTUALES

Una lente positiva no forma una imagen real de un objeto cuando la distancia objeto s es menor que la distancia focal f. Esto se ve en la Fig. 16.12 en la que se trazan el rayo principal y el paralelo desde el punto B de un objeto que está colocado a una distancia menor que la distancia focal de la lente. Como todos los rayos, éstos divergen

los cuarenta años, ya no enfocan los objetos que se hallan a la distancia normal para leer (25 cm) y necesitan lentes correctivas. La finalidad de estas lentes es producir una imagen virtual de un objeto a una distancia s' a la que el ojo se pueda acomodar.

Ejemplo 2. ¿Cuál sería la distancia focal de las gafas que ha de llevar una persona que sólo puede enfocar objetos situados a 100 cm o más? La menor distancia a la que una persona puede enfocar un objeto se denomina *punto próximo*. Las gafas permiten a la persona mantener el objeto a la distancia normal de lectura ($s = 25$ cm) mientras está viendo una imagen virtual en el punto próximo ($s' = 100$ cm). De acuerdo con la Ec. 16.7 la distancia focal necesaria para esto es

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25 \text{ cm}} - \frac{1}{100 \text{ cm}} = \frac{3}{100 \text{ cm}}$$

o sea

$$f = 33{,}3 \text{ cm}$$

Con cristales de gafas de esta distancia focal, la persona puede leer un libro colocado a la distancia normal de lectura porque los rayos procedentes de un libro colocado a 25 cm de los ojos tienen la misma divergencia después de pasar a través de las gafas que los rayos que parten de un libro que está a 100 cm de los ojos.

OBSERVACIÓN. Adviértase que el aumento de la imagen es

$$m = \frac{s'}{s} = \frac{100 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 4$$

Así la imagen virtual es 4 veces el tamaño del objeto, de modo que, aun cuando la imagen está 4 veces más lejos, su tamaño aparente es el mismo.

En optometría una lente se especifica por $1/f$, más que por f. El recíproco de f recibe el nombre de *potencia* de la lente. Si f está expresado en metros, la unidad de $1/f$ es m^{-1}, a la cual se denomina *dioptría*. Así, pues, la potencia de la lente de distancia focal 33,3 cm del ejemplo anterior es

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}333 \text{ m}} = 3 \text{ m}^{-1} = 3 \text{ dioptrías}$$

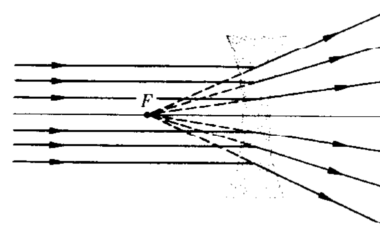


FIGURA 16.13
Los rayos paralelos al eje óptico divergen después de pasar por una lente negativa. Los rayos divergentes parece que parten del foco anterior de la lente.

Lentes negativas

Una lente positiva (convexa) siempre disminuye la divergencia de los rayos que pasan por ella. Si un objeto se halla a más de 1 distancia focal de una lente positiva, la divergencia de los rayos que llegan a la lente es lo suficientemente pequeña como para que la lente los convierta en rayos convergentes que dan lugar a una imagen real. Una lente negativa (cóncava) siempre aumenta la divergencia de los rayos que pasan por ella. La Fig. 16.13 muestra que los rayos paralelos que inciden sobre una lente negativa divergen después de pasar por ella.

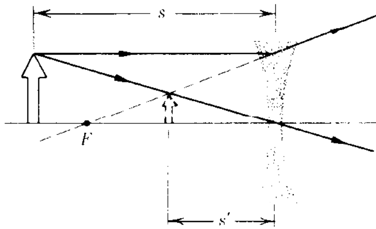


FIGURA 16.14
Imagen virtual de un objeto producida por una lente negativa. Después de pasar por una lente, todos los rayos que proceden de un punto del objeto parece que salen de un punto de la imagen.

Cuando estos rayos divergentes se prolongan hacia atrás se reúnen en un punto F sobre el eje óptico, que es el foco de la lente negativa. La distancia desde F al centro de la lente es la distancia focal y se toma como negativa.

Una lente negativa siempre forma una imagen virtual de un objeto a cualquier distancia s de la lente (Fig. 16.14). La distancia imagen s' viene dada por la Ec. 16.7 si se utiliza una distancia focal negativa. Las lentes negativas se utilizan para corregir la miopía, que es un defecto visual en el que el ojo no puede acomodarse a los objetos que se encuentran más allá de una distancia *d (punto remoto)*. Una lente negativa forma en su plano focal una imagen virtual de objetos muy distantes. Así pues, utilizando gafas de lentes negativas y cuya distancia focal es igual a *d*, se forma una imagen virtual de un objeto distante a una distancia a la que el ojo se puede acomodar.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la potencia (en dioptrías) de la lente necesaria para corregir la miopía de una persona con un punto remoto de 250 cm?

La lente se necesita para formar una imagen a $s' = 250$ cm cuando s es muy grande. Como en este caso $1/s$ es esencialmente cero, la distancia focal dada por la Ec. 16.7 es

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} - \frac{1}{250 \text{ cm}} = -\frac{1}{250 \text{ cm}}$$

o sea

$$f = -250 \text{ cm} = -2{,}50 \text{ m}$$

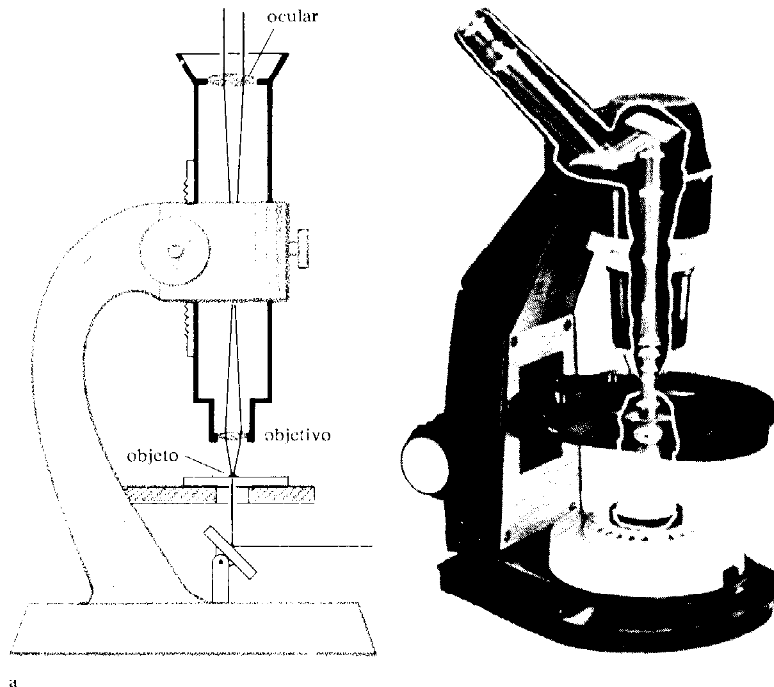


FIGURA 16.15
Microscopio. (*a*) Los componentes esenciales de un microscopio son dos lentes, el objetivo y el ocular, colocadas de tal manera que el objetivo forma una imagen real del objeto precisamente dentro del foco anterior del ocular.
(*b*) En un moderno microscopio, tanto el objetivo como el ocular están compuestos de varias lentes. Estos sistemas de lentes compuestas tienen mejores características ópticas que los de lente única, pero realizan la misma función. El microscopio que aparece aquí, tiene lentes adicionales de aproximación y espejos para dirigir la luz convenientemente.

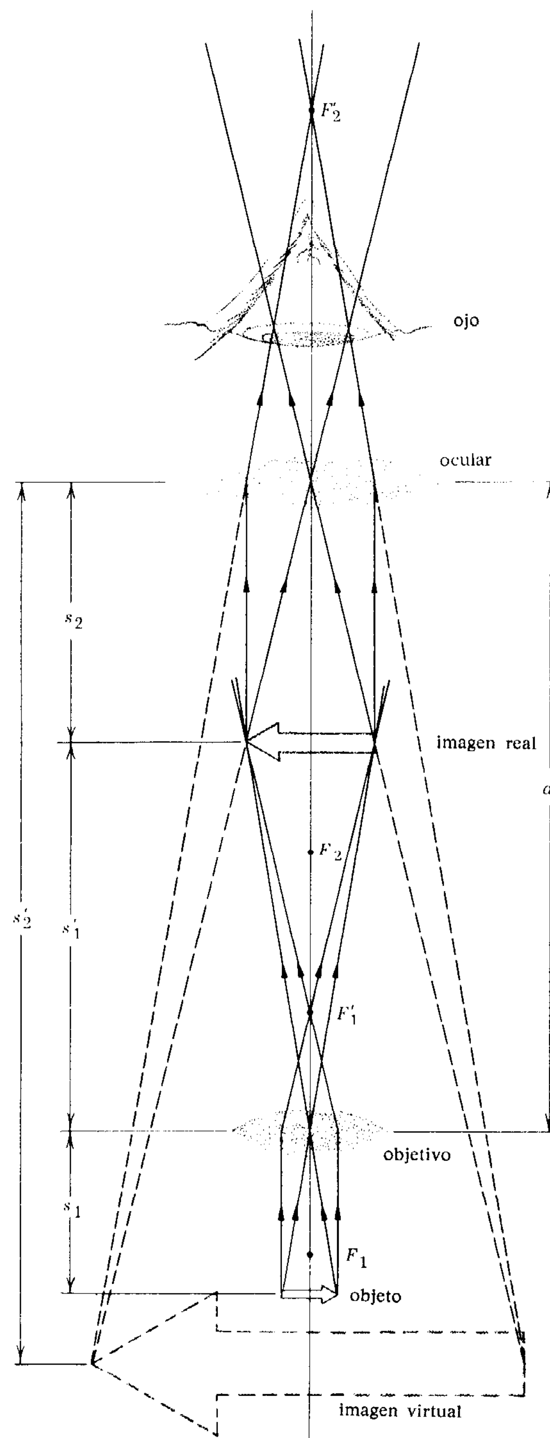


FIGURA 16.16
Óptica del microscopio.
El objetivo forma una imagen real del objeto por dentro del foco anterior F_2 del ocular. El ocular forma una imagen virtual de la imagen real que está localizada a 25 cm por debajo del ocular.

bles objetos transparentes. Fue inventado por Friederik Zernike (1888-1966) alrededor de 1930, y ello le valió el premio Nobel de Física en 1953. En el microscopio normal el objeto recibe luz desde abajo por una superficie uniformemente iluminada, la cual es concentrada por el objetivo en el plano imagen de la fuente luminosa, tal como se indica en la Fig. 16.17*a*. Parte de la luz procedente de la superficie iluminada es dispersada y reflejada por el objeto, lo que obliga a éste a actuar como una fuente luminosa secundaria. Esta luz del objeto es concentrada por el objetivo en el plano imagen del objeto situado por encima del plano imagen de la fuente luminosa. Cuando estos planos imagen se observan a través del ocular, el objeto se ve contra un fondo claro iluminado. Este método de iluminación se llama *iluminación de campo claro*. Si el objeto es transparente no será visible en fondo claro (Fig. 16.18*a*).

En el microscopio de contraste de fase se coloca exactamente encima de la superficie iluminada un diafragma en forma de anil' para que sólo sea un anillo de luz el que ilumine el objeto (Fig. 16.1*b*). La imagen de este anillo es también un anillo en el plano imagen de la fuente luminosa. Un *anillo de fase*, que es un delgado anillo de vidrio del tamaño de esta imagen, se monta en la posición de la imagen de la fuente luminosa, de modo que toda la luz que llega directamente de la fuente luminosa pase a través de él. Como la velocidad de la luz es más lenta en el vidrio que en el aire, el anillo de fase retarda esta luz de fondo en una fracción de longitud de onda comparada con la luz dispersada por el objeto, la mayor parte de la cual no pasa por el anillo. Por lo tanto, cuando la luz de fondo y la del objeto llegan al plano imagen del objeto, no están en fase por una fracción de longitud de onda y tiene lugar una interferencia destructiva. Esto hace que la imagen del objeto aparezca en marcado contraste contra su fondo (Fig. 16.18*b*).

La microscopia de contraste de fase es particularmente útil en el examen de organismos vivos, tales como las bacterias y protozoos, los cuales son demasiado transparentes para poder ser observados con nitidez con una iluminación de campo claro.

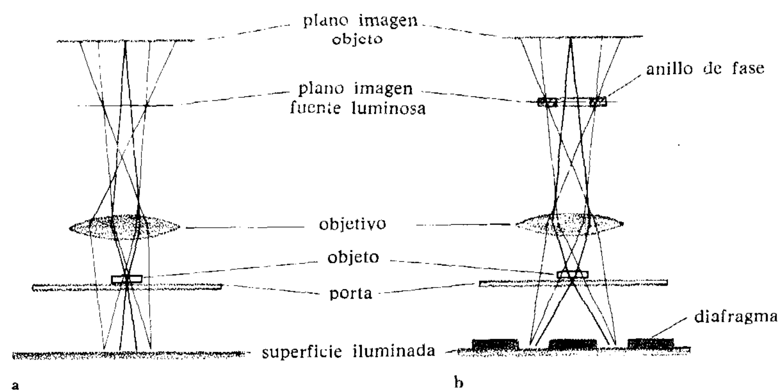


FIGURA 16.17
La luz procedente de la superficie iluminada, que es dispersada por el objeto (trazos gruesos) se concentra en el plano imagen del objeto, mientras que la luz que no es dispersada por el objeto (trazos finos) se concentra en el plano imagen de la fuente luminosa. (*a*) Microscopio normal; (*b*) microscopio de contraste de fase. El diafragma hace que toda la luz que no es dispersada por el objeto pase por el anillo de fase, lo que la retarda con respecto a la luz dispersada por el objeto.

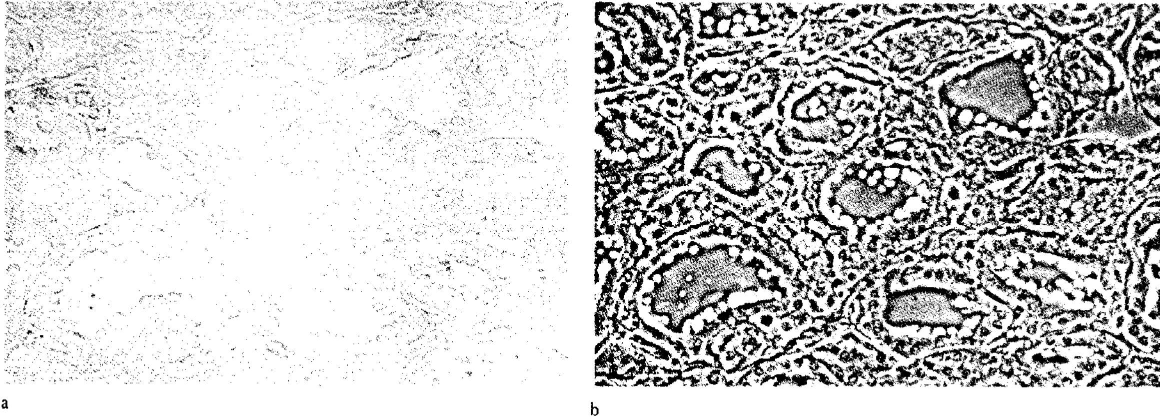


FIGURA 16.18
Glándula tiroides de un perro.
(*a*) Célula en iluminación de campo claro.
(*b*) Célula en contraste de fase.
(Carl Zeiss, Inc.)

Lentes compuestas

Si se colocan dos lentes una cerca de la otra actúan como una sola lente. La mayor parte de los instrumentos ópticos de calidad utilizan varias lentes juntas. En un microscopio, por ejemplo, el ocular y el objetivo están compuestos de dos o más lentes (Fig. 16.16*b*) a fin de eliminar las distorsiones (aberraciones) producidas por una sola lente. La Fig. 16.19 muestra rayos paralelos que inciden sobre dos lentes de distancias focales f_1 y f_2 que se hallan separadas por una distancia d que es menor que f_1. De este modo, los rayos llegan a la lente 2 antes de estar enfocados en el plano focal de la lente 1. Si no hubiese lente 2, los rayos que pasan a través del centro C_1 y del foco anterior F_1 de la lente 1, convergerían en el punto A del plano focal de la lente 1. El efecto de la lente 2 consiste en doblar más los rayos, de modo que converjan en un punto A' más próximo a la lente 1.

Para localizar A' hay que observar en primer lugar que el rayo que es paralelo al eje óptico entre las lentes 1 y 2, pasará por el foco F'_2 de la lente 2. En segundo lugar, en ausencia de la lente 2 hay un rayo que pasa por el punto C_2 y va a A. Pero este rayo no se ve afectado por la presencia de la lente 2 porque pasa por su centro. En consecuencia, la intersección de estos dos rayos en A' determina la posición del plano focal de este sistema de dos lentes.

Esta construcción gráfica muestra que la distancia focal f de las dos lentes juntas es menor que la de cualquiera de las dos lentes por

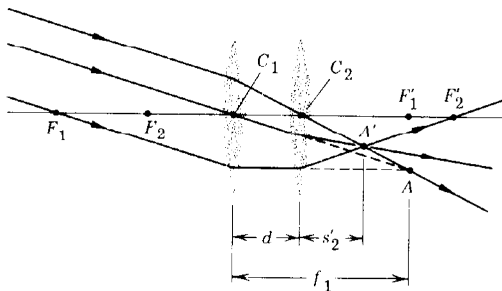


FIGURA 16.19
Rayos paralelos que inciden sobre dos lentes. La posición A' de la imagen formada por estas dos lentes juntas se puede hallar por el hecho de que la primera lente por separado hubiera formado una imagen en A.

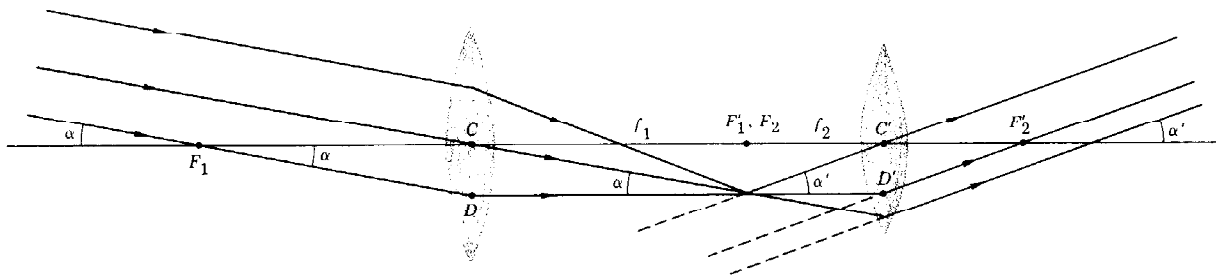


FIGURA 16.20
Óptica del telescopio. El objetivo forma una imagen real de un objeto distante en el foco anterior del ocular. Como los rayos que emergen del ocular son paralelos, parece que proceden de una imagen virtual distante. Sin embargo, como el ángulo α' es mayor que α, la distancia de la imagen es menor que la distancia del objeto.

La Fig. 16.20 muestra que los rayos que penetran en el sistema por encima del eje óptico salen por debajo del eje. Por lo tanto, un observador que mire a los rayos paralelos que salen del ocular verá una imagen invertida de un objeto distante. Si $f_2 < f_1$, el ángulo α' con el que emergen estos rayos es mayor que el ángulo α con el que inciden. Esto produce el efecto de ampliar la imagen vista a través del instrumento.

La relación α'/α de estos ángulos es aproximadamente igual a la razón $(\mathrm{tg}\ \alpha')/(\mathrm{tg}\ \alpha)$ de sus tangentes. Pero, de acuerdo con la Fig. 16.20, tenemos

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\overline{DC}}{f_1}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha' = \frac{\overline{D'C'}}{f_2} = \frac{\overline{DC}}{f_2}$$

En consecuencia, el aumento angular α del telescopio es

$$a = \frac{\mathrm{tg}\ \alpha'}{\mathrm{tg}\ \alpha} = \frac{\overline{DC}/f_2}{\overline{DC}/f_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

Para lograr un gran aumento hace falta un objetivo de distancia focal muy grande, que es por lo que los telescopios son tan largos.

OBSERVACIÓN. Se cree que el fabricante de lentes holandés Hans Lippershey fue el primero en combinar dos lentes en las configuraciones de microscopio y telescopio entre 1590 y 1608. Sin embargo, con la calidad de lentes que había entonces, el primitivo microscopio no era superior a la lupa. El microscopio no desbancó a la lupa hasta un siglo después cuando se pudieron obtener lentes de gran calidad. La historia del telescopio es más dramática.

Galileo estaba por casualidad en Venecia allá por el mes de mayo de 1609 cuando oyó rumores de un instrumento en perspectiva. El día que volvió a Padua, Galileo construyó su primer telescopio y pronto aprendió a construir instrumentos más perfectos de hasta 30 aumentos. Galileo fue el primer hombre que miró a las estrellas con un telescopio y a partir de aquel momento el mundo cambió radicalmente. Vio las montañas de la Luna, las manchas del Sol y los satélites alrededor de Júpiter. Estas observaciones contradecían la vieja idea de Aristóteles de que los astros estaban compuestos de materia incorruptible, diferente en sustancia de la materia de la Tierra. Como consecuencia, la autoridad de Aristóteles se puso en entredicho y los hombres empezaron a abrir sus mentes a ideas nuevas.

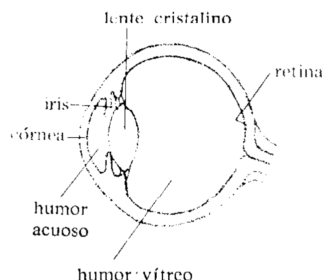


FIGURA 16.21
Anatomía del ojo humano.

16.5. EL OJO HUMANO

El ojo humano dispone de dos elementos para enfocar, la córnea y la lente del cristalino (Fig. 16.21).Sin embargo, para los propósitos del trazado de rayos, la luz que pasa a través del ojo se comporta como si fuese refractada en un plano único, llamado *plano principal*, orientado perpendicularmente al eje óptico. El punto donde el plano principal corta al eje óptico se denomina *punto principal* P del sistema óptico. El plano principal tiene todas las propiedades de una lente con dos excepciones:

1. Como el ojo está lleno de un fluido (humor vítreo) en lugar de aire, los puntos focales anterior y posterior no están a la misma distancia del plano principal.
2. El punto a través del cual pasa un rayo sin desviarse por el sistema óptico no es el punto principal P sino un segundo punto llamado el *punto nodal* N. Un rayo principal es un rayo que pasa por N sin desviarse.

La Fig. 16.22 muestra las posiciones de los puntos focal, principal y nodal del ojo humano cuando está relajado (acomodado a visión remota). El punto principal está 2,3 cm delante de la retina, y el punto nodal se encuentra 0,6 cm detrás del punto principal. Los puntos focales anterior y posterior distan del punto principal 1,7 y 2,3 cm, respectivamente. Obsérvese que los rayos 1 y 2 se refractan en el plano principal del mismo modo que lo harían en una lente única pero en la que el rayo principal (no desviado) pasa por el punto nodal N en lugar de por el punto principal P.

OBSERVACIÓN. Una cámara se ajusta para enfocar objetos a diferentes distancias variando la distancia s' entre la lente y la película. En el ojo, la distancia entre la retina y la lente es fija. Para enfocar objetos a diferentes distancias se varía la distancia focal de la lente del cristalino. Esto se logra por medio de unos músculos unidos a la lente que controlan su forma. Cuando el ojo se acomoda para objetos cercanos, los focos, puntos principales y punto nodal del sistema óptico del ojo, son diferentes de los del ojo relajado.

La posición del punto nodal determina el aumento del ojo y por tanto el tamaño de la imagen en la retina. En la Fig. 16.22 se ve que los triángulos NAB y $NA'B'$ son semejantes, por lo que la razón del tamaño de la imagen a la del objeto es

$$\frac{h'}{h} = \frac{\overline{A'N}}{\overline{AN}} = \frac{s' - 0{,}6\ \text{cm}}{s + 0{,}6\ \text{cm}}$$

El ojo relajado se ajusta para enfocar objetos distantes en la retina que está a una distancia $s' = 2{,}30$ cm del plano principal. Así, el aumento viene dado por

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{1{,}70\ \text{cm}}{s} \qquad 16.12$$

en el que el término 0,6 cm del denominador se ha suprimido porque es muy pequeño comparado con s.

Ejemplo. Una mujer está mirando a un hombre de 1,8 m de estatura que se halla a 5 m de distancia. ¿Cuál es el tamaño de su imagen en la retina de la mujer?
Según la Ec. 16.12 tenemos

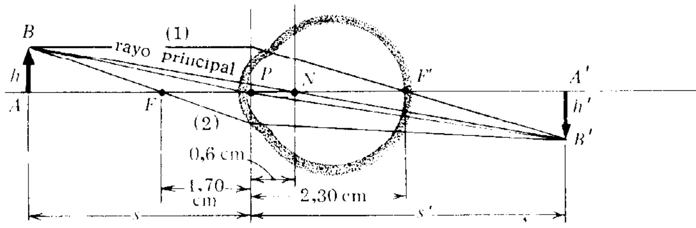


FIGURA 16.22
Diagrama a escala de los focos, puntos principales y puntos nodales del ojo humano relajado.

$$m = \frac{1{,}70 \text{ cm}}{500 \text{ cm}} = 0{,}0034$$

y por tanto $h' = mh = (0{,}0034)(1{,}8 \text{ m}) = 0{,}00612 \text{ m} = 6{,}12 \text{ mm}$.

16.6 ABERRACIONES

Lentes esféricas

Las superficies de la mayoría de las lentes son esféricas, lo que significa que cada superficie de la lente es una sección de una esfera, como se muestra en la Fig. 16.23. El *radio de curvatura r* de una superficie esférica es el radio de la esfera de la que la superficie es una sección; el radio es positivo si la superficie es convexa (Fig. 16.23*a*) y negativo si la superficie es cóncava (Fig. 16.23*b*). Por ejemplo, el radio de curvatura de la superficie izquierda de la Fig. 16.23*a* es r_1, y el radio de curvatura de la superficie izquierda de la Fig. 16.23*b* es $-r_2$.
Las dos superficies de una lente pueden tener radios de curvatura diferentes, pero consideraremos el caso particular de una lente simétrica en la cual ambas superficies tienen el mismo radio de curvatura. La distancia focal f de una lente simétrica con radio de curvatura r es

$$f = \frac{r}{2(n-1)} \tag{16.13}$$

donde n es el índice de refracción del vidrio. Esta ecuación recibe el nombre de *fórmula de las lentes esféricas*. Se aplica tanto a lentes simétricas convexas (positivas) como cóncavas (negativas).

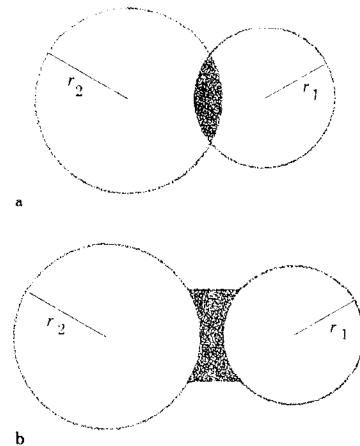


FIGURA 16.23
Las superficies de una lente esférica son secciones de esfera: (*a*) lente convexa; (*b*) lente cóncava.

Ejemplo. ¿Cuál es el radio de curvatura de una lente simétrica de 50 mm de distancia focal, construida en vidrio de índice de refracción 1,55?
Según la Ec. 16.13 el radio de curvatura es

$$r = 2(n-1)f = (2)(0{,}55)(5{,}0 \text{ cm}) = 5{,}5 \text{ cm}$$

Pueden construirse lentes con superficies que son esféricas dentro de un error no superior a una fracción de longitud de onda de la luz. En efecto, debido a que pueden fabricarse con facilidad lentes esféricas casi perfectas, éstas se utilizan en casi todos los instrumentos ópticos. Sin embargo, incluso una lente esférica perfecta no es una lente ideal;

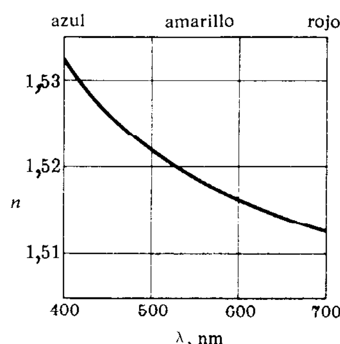


FIGURA 16.24
Variación del índice de refracción n del vidrio crown con longitud de onda λ.

es decir, no forma una imagen netamente enfocada, sin deformación. Cualquier separación del comportamiento ideal se denomina *aberración*. Hay siete aberraciones distintas de una lente esférica, dos cromáticas y cinco monocromáticas. Discutiremos brevemente estas aberraciones y daremos alguna indicación de cómo se corrigen en la práctica.

Aberraciones cromáticas

Las aberraciones cromáticas son fallos de una lente para enfocar luz de color diferente en el mismo punto. Esto tiene su origen en la variación del índice de refracción n con la longitud de onda λ, fenómeno que recibe el nombre de *dispersión*. La Fig. 16.24 muestra la variación de n con λ para el vidrio crown. En general n disminuye al crecer λ; es decir, n es menor para la luz roja que para la azul.

Como la distancia focal f de una lente varía inversamente con n (Ec. 16.13), f aumenta al aumentar λ; o sea, f es mayor para la luz roja que para la azul. Así, cuando una lente enfoca la luz blanca procedente de un punto, los componentes de la luz de diferente longitud de onda son enfocados, como muestra la Fig. 16.25, en puntos diferentes. Como resultado de esto la imagen de un punto del eje no es un punto sino un círculo coloreado.

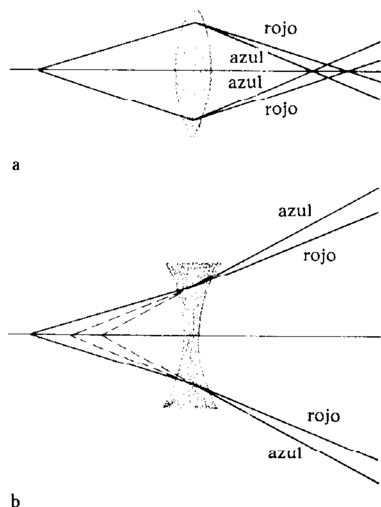


FIGURA 16.25
Aberración cromática: una lente positiva enfoca la luz roja en un punto diferente de la luz azul, de modo que la imagen de un punto es un círculo coloreado; (*b*) una lente negativa refracta la luz en la dirección opuesta.

OBSERVACIÓN. La variación de la distancia focal con la longitud de onda se llama *aberración longitudinal* para distinguirla de la *aberración lateral*, que es una variación similar del aumento con la longitud de onda. Sin embargo, estos dos tipos de aberración cromática están tan estrechamente asociados que no nos preocuparemos por la distinción. Habitualmente se corrigen al mismo tiempo.

La aberración cromática se corrige por medio de un *doblete*, que es un par de lentes que actúan como una sola lente. La Fig. 16.25 muestra cómo los rayos coloreados son refractados de manera distinta por una lente positiva y una negativa, de modo que un doblete que consista en dos lentes opuestas puede eliminar por completo la aberración cromática (Fig. 16.26).

Por otra parte, se pueden construir lentes simples *acromáticas*, libres de aberraciones cromáticas, uniendo una lente cóncava y una convexa para formar una lente menisco (Fig. 16.27). Si las dos lentes componentes tuviesen distancias focales iguales y opuestas, la distancia focal de la combinación sería infinita (potencia cero), de acuerdo con la Ec. 16.11. Para conseguir distancias focales diferentes para las lentes componentes, éstas se construyen con vidrios diferentes, normalmente vidrios crown y flint, que poseen distinto índice de refracción.

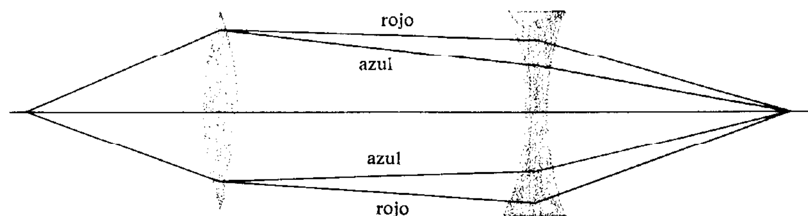


FIGURA 16.26
La aberración cromática se consigue por medio de un doblete que consta de una lente positiva y una negativa.

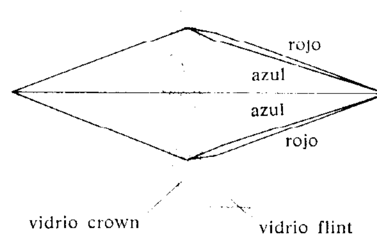
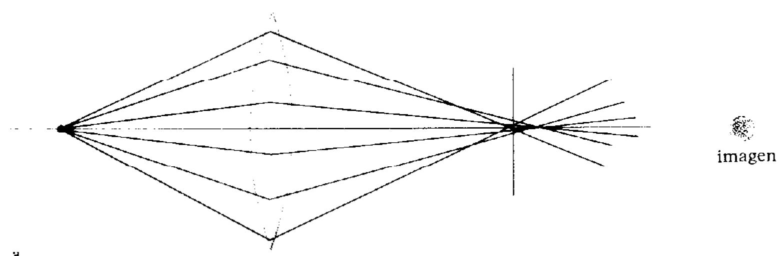
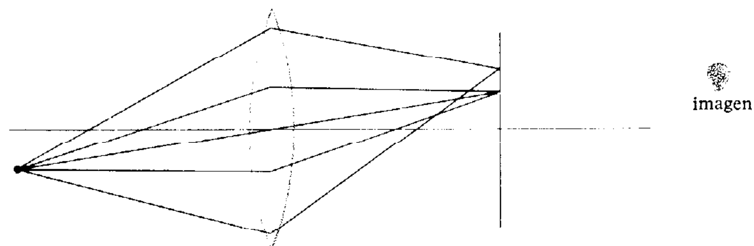
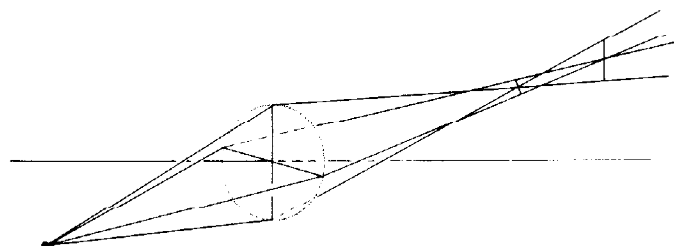
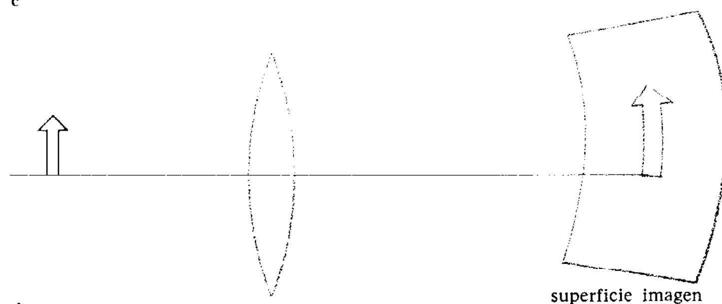


FIGURA 16.27
Una lente acromática consiste en dos lentes unidas, una positiva y otra negativa de distintos índices de refracción.









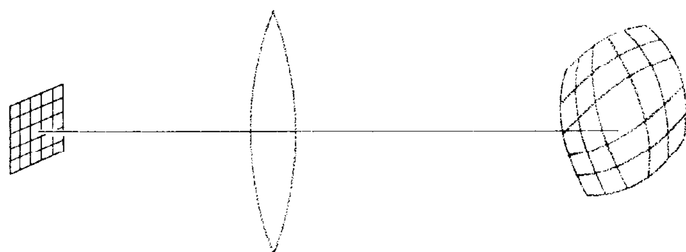


FIGURA 16.28
Las cinco aberraciones monocromáticas: (*a*) aberración esférica; (*b*) coma; (*c*) astigmatismo; (*d*) curvatura de campo; (*e*) distorsión.

Aberraciones monocromáticas

Existen cinco aberraciones monocromáticas que provienen no de la dispersión del vidrio sino del fracaso de una lente esférica para formar una imagen ideal.

La *aberración esférica* es el fracaso de una lente para enfocar en un punto el rayo procedente de un punto situado sobre el eje. En general los rayos más divergentes son enfocados más cerca de la lente que los rayos menos divergentes. En consecuencia, la imagen del punto en el plano imagen es un pequeño círculo (Fig. 16.28*a*).

La aberración esférica puede reducirse, aunque no eliminarse del todo, construyendo desiguales los radios de curvatura de las dos superficies de una lente. La aberración se puede eliminar completamente utilizando un doblete compuesto de lentes de signo opuesto.

El fracaso de una lente para enfocar en un punto rayos procedentes de un punto próximo al eje recibe el nombre de *coma*. En un sistema de lentes que ha sido corregido de aberración esférica pero no de coma, los rayos se concentran en puntos diferentes del plano imagen (Fig. 16.28*b*).

El *astigmatismo* es el fracaso de una lente para enfocar en un punto rayos procedentes de un punto alejado del eje. En su lugar el punto es enfocado en dos segmentos perpendiculares separados por una pequeña distancia (Fig. 16.28*c*). El astigmatismo puede reducirse espaciando debidamente las lentes de un doblete.

OBSERVACIÓN. El término *astigmatismo* se emplea también en optometría para describir un defecto del ojo en el que la córnea no es esférica. En óptica el astigmatismo se refiere a una aberración que se da incluso en lentes perfectamente esféricas. No se han de confundir los dos usos de esta palabra.

El fallo a presentar una superficie imagen plana se llama *curvatura de campo*. Incluso cuando un sistema óptico ha sido corregido de aberración esférica, coma y astigmatismo, los puntos situados fuera del eje no son enfocados en el mismo plano que los puntos situados en el eje (Fig. 16.28*d*). Esta aberración es particularmente importante en fotografía, donde se necesita que la superficie imagen coincida con el plano de la película. Por otro lado, la retina del ojo ha sido curvada por la evolución a fin de compensar esta aberración.

La *distorsión* es la variación del aumento de la imagen con la distancia al eje óptico. Así, la imagen de un retículo rectangular, aunque sea perfecta en enfoque, aparece deformada (Fig. 16.28*e*).

Los sistemas ópticos no pueden ser corregidos completamente de todas estas siete aberraciones. Cada sistema es diseñado de manera especial para reducir aquellas aberraciones que son más molestas para sus propósitos. Por ejemplo, la Fig. 16.29 muestra un sistema de lentes de alta calidad para cámara fotográfica consistente en una lente plano-convexa, una plano-cóncava y otra acromática combinadas para eliminar la aberración cromática y la esférica, así como el astigmatismo y la curvatura de campo.

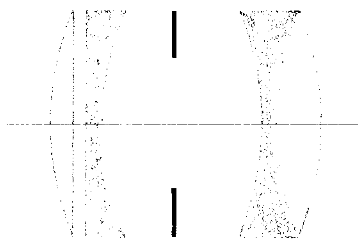


FIGURA 16.29
Lentes en un sistema de alta calidad para cámara fotográfica.

PROBLEMAS

1. Un objeto se halla a 21 cm delante de una lente de distancia focal 14 cm. (*a*) Hallar la distancia imagen s' a partir de la fórmula de las lentes, la curva de la Fig. 16.7 y por construcción gráfica. (*b*) ¿Cuál es el aumento de la imagen?
Resp. (*a*) 42 cm; (*b*) 2.
2. Supongamos una lente positiva de 12 cm de distancia focal. Hacer una tabla de los valores de la distancia imagen s' para los siguientes valores de la distancia objeto s: 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48 y 60 cm. Convertir estos valores de s y s' en distancias reducidas $\bar{s}$ y $\bar{s'}$, y llevarlos a la curva de la figura 16.7.
3. Un proyector de diapositivas con una lente de distancia focal 10 cm proyecta una imagen sobre una pantalla que se encuentra a 2,5 m de la lente. (*a*) ¿Cuál es la distancia s entre la diapositiva y la lente? (*b*) ¿Cuál es el aumento de la imagen? (*c*) ¿Cuál es la anchura de la imagen de una diapositiva de 35 mm?
Resp. (*a*) 10,4 cm; (*b*) 25; (*c*) 87,5 cm.
4. Un proyector de diapositivas se halla a 12 m de una pantalla de 1,5 m de ancha. ¿Qué distancia focal ha de tener la lente para que la imagen de una diapositiva de 35 mm llene la pantalla?
5. La distancia entre la lente de un proyector y la diapositiva se puede variar desde 20 a 30 cm. Si la distancia focal de la lente es 21 cm, ¿cuál es la menor distancia (entre la lente y la pantalla) a la que se puede enfocar una imagen?
Resp. 70 cm.
6. Un proyector con una lente de distancia focal 20 cm proyecta la imagen de una diapositiva de 35 mm en una pantalla de 0,8 m de ancha. ¿A qué distancia de la lente debería estar la pantalla para que la imagen la llene justamente?
7. Una cámara con una lente de distancia focal 50 mm toma una fotografía de un niño que tiene 1,2 m de altura y que se halla de pie a 3,0 m de distancia. (*a*) ¿Qué distancia s' debe haber entre la película y la lente para lograr una fotografía bien enfocada? (*b*) ¿Cuál es el aumento de la imagen? (*c*) ¿Cuál es la altura de la imagen del niño en la fotografía?
Resp. (*a*) 5,08 cm; (*b*) 0,0167; (*c*) 20,0 mm.
8. Una cámara con una lente de 50 mm saca una fotografía de un árbol de 25 m de altura. ¿A qué distancia tiene que estar la cámara del árbol para que su imagen en la película tenga 25 mm de altura?
9. Una cámara provista de un teleobjetivo de 450 mm de distancia focal obtiene una fotografía de un objeto que se halla a 60 m de distancia. ¿A qué distancia del objeto tendría que estar una cámara provista de una lente de 50 mm para lograr una imagen del mismo tamaño?
Resp. 6,67 m.
10. Un naturalista quiere fotografiar a un rinoceronte desde 75 m de distancia. El animal tiene 4,0 m de largo y su imagen en la película ha de ser de 1,2 cm de larga. (*a*) ¿Qué distancia focal habría de tener la lente? (*b*) ¿Cuál sería el tamaño de la imagen si se utilizase una lente normal de 50 mm?
11. Una cámara con objetivo gran angular de 35 mm de distancia focal saca una foto de un objeto que se halla a 12 m de distancia. ¿A qué distancia hubiera tenido que estar una cámara provista de una lente de 50 mm para obtener una imagen del mismo tamaño?
Resp. 17,1 m.
12. Un fotógrafo quiere tomar una foto de un edificio de 15 m de altura desde una distancia de 20 m. ¿Qué distancia focal habría de tener la lente para obtener una imagen de 20 mm de altura?
13. Para hacer fotos de muy cerca (macrofotografía) se utiliza una lente de 40 mm de distancia focal. (*a*) Si la lente puede estar como mucho a 5,20 cm de la película, ¿cuál es la distancia más pequeña (desde la lente) a la que se puede enfocar un objeto? (*b*) ¿Cuál es el aumento en este caso? (*c*) Si la lente no puede estar a menos de 5,0 cm de la película, ¿cuál es la distancia más lejana (desde la lente) a la que se puede enfocar un objeto?
Resp. (*a*) 17,3 cm; (*b*) 0,30; (*c*) 20,0 cm.
14. Para obtener una foto en macrofotografía se utiliza una lente de 30 mm de distancia focal. La imagen en la película va a ser dos veces el tamaño del objeto ($m = 2$). Hallar las distancias objeto e imagen.
15. A una cámara se le adapta un teleobjetivo de 125 mm. La distancia entre la película y esta lente puede variar desde 125 a 130 mm. ¿Cuál es la mínima distancia a la que puede estar un objeto de la cámara y

todavía quedar enfocado en la película?
Resp. 3,25 m.

16. Una cámara con una lente de 50 mm puede enfocar a un objeto a cualquier distancia superior a 1,2 m. Hallar las distancias mínima y máxima de la lente con respecto a la película.
17. Una lente de cámara fotográfica cara, de 50 mm de distancia focal, tiene un número F de 1,7. ¿Cuál es el diámetro de esta lente?
Resp. 29,4 mm.
18. La lente de un ojo relajado tiene una distancia focal efectiva de 17 mm. El diámetro de la abertura pupilar varía desde 1,5 a 8 mm, según la intensidad de la luz que penetra en el ojo. ¿Cuáles son los correspondientes números F del ojo?

OBSERVACIÓN. El número F es una medida de la capacidad de captación de luz de una lente; cuanto menor sea el número F mayor será la capacidad de captación de luz. El ojo humano tiene más o menos la misma capacidad de captación que una máquina fotográfica de precio medio.

19. Un objeto se halla 4 cm delante de una lente de 6 cm de distancia focal. (*a*) Localizar la posición de la imagen virtual. (*b*) ¿Cuál es el aumento de la imagen?
Resp. (*a*) 12 cm delante de la lente; (*b*) 3.
20. Utilizar la Ec. 16.7 para hacer un gráfico de la distancia imagen virtual reducida $\bar{s}'$ en función de la distancia objeto reducida $\bar{s}$ para los valores de $\bar{s}$ menores que 1.
21. (*a*) ¿Cuál es la distancia focal de una lupa con un aumento de 10? (*b*) ¿A qué distancia tiene que estar el objeto de la lupa para obtener este aumento?
Resp. (*a*) 2,78 cm; (*b*) 2,50 cm.
22. ¿Cuál es el aumento de una lente que tiene una potencia de 15 dioptrías?
23. (*a*) ¿Qué distancia focal han de tener las gafas para leer de una persona cuyo punto próximo es 150 cm? (*b*) ¿Cuál es la potencia (en dioptrías) de esta lente?
Resp. (*a*) 30 cm; (*b*) 3,33 dioptrías.
24. La potencia de unas gafas para leer que utiliza una persona que ve bien de lejos es de 2,5 dioptrías. ¿A qué distancia debe colocar un libro para leer sin gafas?
25. Hallar la imagen virtual de un objeto que se encuentra 6 cm delante de una lente cuya distancia focal es —3 cm, (*a*) trazando rayos y después (*b*) utilizando la Ec. 16.7. (*c*) ¿Cuál es el aumento de la imagen?
Resp. (*a*) 2 cm; (*b*) 2 cm; (*c*) 0,33.
26. Trazar una curva de $\bar{s}'$ en función de $\bar{s}$ para una lente negativa. Compararla con la figura 16.7.
27. Una persona que ve bien de cerca utiliza gafas con lentes negativas de distancia focal —2 m. (*a*) Cuando mira a un objeto situado a 6 m de distancia, ¿dónde está la imagen virtual producida por las gafas? (*b*) Localizar la imagen gráficamente.
Resp. (*a*) 1,5 m.

* 28. Un hombre a la edad de 40 años necesita gafas con lentes de dos dioptrías para leer un libro a 25 cm. A los 45 observa que mientras lleva estas gafas debe mantener un libro a 40 cm de los ojos. ¿Qué potencia han de tener las gafas que necesita a los 45 años para leer un libro a 25 cm?

* 29. Un microscopio tiene un objetivo de distancia focal 0,3 cm y un ocular de distancia focal 2.0 cm. (*a*) ¿Dónde debe estar la imagen formada por el objetivo para que el ocular produzca una imagen virtual 25 cm delante del ocular? (*b*) Si las lentes tienen 20 cm de separación ¿qué distancia separa al objetivo del objeto que está sobre la platina? (*c*) ¿Cuál es el aumento total del microscopio? (*d*) ¿A qué distancia tendría que estar el objeto de una sola lente que diese el mismo aumento?
Resp. (*a*) 1,85 cm enfrente del ocular; (*b*) 0,305 cm; (*c*) 804; (*d*) 0,031 cm.

* 30. Un microscopio de disección está diseñado para que exista una gran distancia entre el objeto y el objetivo. Supongamos que la distancia focal del objetivo de un microscopio de disección es 5,0 cm, la distancia focal del ocular es 4,0 cm y la distancia que separa estas lentes es 17,0 cm. (*a*) ¿Cuál es la distancia entre el objeto y el objetivo? (*b*) ¿Cuál es el aumento total? Obsérvese que en esta ocasión no se puede utilizar la Ec. 16.10.

* 31. Se coloca un objeto a 12 cm frente a una lente de 5 cm de distancia focal. Se coloca otra lente de 4 cm de distancia focal a 2 cm detrás de la primera lente. Hallar la imagen producida por este sistema de dos lentes trazando rayos. (*Sugerencia:* Hallar primero la imagen producida por la lente anterior sola y usarla para hallar la imagen formada por la segunda lente.)
Resp. 2,5 cm detrás de la lente de 4 cm.

32. Una lente de 500 mm de distancia focal se monta delante de una lente de fotografiar de 50 mm. (*a*) ¿Cuál es la distancia focal de

la combinación, suponiendo que la distancia entre las lentes es cero? (*b*) Si la distancia entre la lente y la película se puede variar desde 5,00 hasta 5,22 cm, ¿cuáles son las distancias objeto más próxima y más lejana a las que la cámara puede enfocar con este dispositivo?

33. Para construir un pequeño telescopio se utilizan una lente de 3 cm de distancia focal y otra de 30 cm. (*a*) ¿Qué lente debería ser el objetivo? (*b*) ¿Cuál es el aumento del telescopio? (*c*) ¿Qué distancia separa a las dos lentes en el telescopio?
Resp. (*b*) 10; (*c*) 33 cm.

*34. Un anteojo terrestre consta de un objetivo de distancia focal f_1 y un ocular de distancia focal $-f_2$ (lente negativa) separados por una distancia $d = f_1 - f_2$. Trazar rayos paralelos a través de ese sistema de lentes cuando $f_1 = 10$ cm y $f_2 = -2$ cm. Demostrar que el aumento es f_1/f_2 y que la imagen virtual aparece derecha.

OBSERVACIÓN. Éste es el sistema de lentes utilizado en los binoculares y catalejos porque da una imagen derecha y exige menor distancia de separación entre el objetivo y el ocular que en el telescopio astronómico.

35. ¿Cuál es el tamaño de la imagen en la retina de un edificio de 20 m de alto situado a 50 m?
Resp. 0,68 cm.

36. ¿A qué distancia se halla un árbol de 25 m de alto si su imagen en la retina es de 1,0 cm?

37. Localizar mediante construcción gráfica la imagen de un objeto situado a 10 cm por delante del plano principal del ojo relajado de la Fig. 16.22.
Resp. 0,47 cm detrás de la retina.

*38. Demostrar que la relación entre las distancias objeto e imagen del ojo viene dada por la Ec. 16.3 con $\bar{s} = s/f$ y $\bar{s}' = s'/f'$. Aquí f y f' son las distancias focales anterior y posterior, respectivamente, y s y s' son las distancias objeto e imagen medidas desde el plano principal.

*39. Considérese un ojo en el que el foco anterior está a 3 cm del plano principal y el posterior a 4 cm de dicho plano. Localizar gráficamente la posición del punto nodal. (*Sugerencia:* El rayo principal debe cortar al punto imagen determinado por los rayos que pasan por los focos.)
Resp. 1 cm detrás del plano principal.

*40. La razón f'/f de las distancias focales anterior y posterior del ojo es siempre 1,35, el índice de refracción del humor vítreo. Localizar las posiciones de los focos y del punto nodal cuando el ojo está enfocado sobre un objeto a 25 cm delante del plano principal. Suponer que el plano principal está a 2,3 cm delante de la retina. (Ver probs. 38 y 39.)

41. ¿Cuál es la distancia focal de una lente simétrica positiva con un índice de refracción de 1,62 y un radio de curvatura de 20 cm?
Resp. 16,1 cm.

*42. Demostrar que el número *F* mínimo posible de una lente simétrica es $(1/4\ (n-1)$. (*Sugerencia:* ¿Cuál es el diámetro máximo de una lente simétrica de distancia focal f?)

43. Una lente acromática está compuesta de una lente simétrica positiva de vidrio flint ($n = 1,65$) y una lente simétrica negativa de vidrio crown ($n = 1,52$). Si ambas lentes tienen un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es la distancia focal de la combinación?
Resp. 38,3 cm.

BIBLIOGRAFÍA

BUTTERFIELD, Herbert: «The Origins of Modern Science, 1300-1800», ed. rev., Free Press, New York, 1965. En el capítulo 4 se habla de la importancia de los descubrimientos de Galileo acerca del telescopio en el conflicto histórico entre los sistemas de Copérnico y Tolomeo.

GUYTON, Arthur C.: «Textbook of Medical Physiology», 4.ª ed. W. B. Saunders Company, Filadelfia, 1971. El capítulo 52 contiene una breve discusión de la óptica de la visión humana.

OGLE, Kenneth Neil: «Optics: An Introduction for Ophthalmologists», Charles C. Thomas, Springfield, Ill., 1968. Tratado completo de la óptica de las lentes delgadas y gruesas. También se describe detalladamente la óptica de la visión humana.

Parte 5: Electricidad y Magnetismo

Capítulo 17 Electricidad

La electricidad es una fuerza fundamental de la naturaleza, análoga a la gravedad. Pero mientras que la fuerza de la gravedad entre dos objetos depende de su masa, la fuerza eléctrica entre dos objetos depende de su *carga.* La carga es una propiedad básica de las partículas elementales (electrones, protones y neutrones) que componen toda la materia ordinaria. De hecho, lo que mantiene al átomo unido es la fuerza eléctrica entre los protones y electrones del átomo.

La utilización práctica de la electricidad es posible porque somos capaces de producir y controlar un flujo constante de partículas cargadas. En este capítulo discutimos los principios de la electricidad que se necesitan para entender algunos aparatos, como por ejemplo los tubos de rayos X y de rayos catódicos, los cuales utilizan un flujo de electrones a gran velocidad dentro de un recipiente al que se le ha hecho el vacío. En los capítulos siguientes hablamos de algunos aparatos que utilizan el flujo de electrones en un hilo conductor.

17.1. LAS FUERZAS FUNDAMENTALES

Todas las fuerzas de las que se ha hablado en este libro, como la de rozamiento, empuje y tensión superficial, son los efectos observables de las fuerzas entre los átomos de los objetos que intervienen. Estas fuerzas observables no se consideran que son fundamentales porque en principio se pueden analizar en función de fuerzas atómicas.* Incluso las fuerzas entre átomos no son fundamentales porque aún se pueden analizar en función de las fuerzas existentes entre las partículas que componen los átomos.

Hay tres clases de partículas dentro de un átomo: ***protones, neutrones*** y ***electrones.*** Los protones y los neutrones están fuertemente unidos entre sí para formar el denso ***núcleo*** central del átomo. El núcleo contiene más del 99,95 % de la masa del átomo, pero ocupa solamente una pequeña fracción del volumen del átomo. Los electrones, que pululan en órbitas alrededor del núcleo, contienen el 0,05 % restante de la masa y ocupan la mayor parte del volumen. La Fig. 17.1 muestra un diagrama esquemático de un átomo de carbono.** En la parte VI se dan los detalles de la estructura de los átomos y núcleos.

Como los protones, neutrones y electrones no están compuestos de partículas aún más pequeñas, se les llama partículas ***elementales*** y las fuerzas que existen entre ellos son las fuerzas fundamentales de

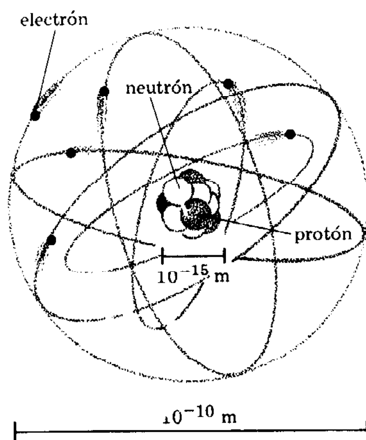


FIGURA 17.1
Diagrama esquemático de un átomo de carbono. Seis electrones dan vueltas alrededor de un núcleo compuesto de seis protones y seis neutrones.

* En el Apart. 9.2. se da un somero análisis de la tensión superficial en función de las fuerzas atómicas.

** Si se hiciese un dibujo a escala del átomo con el núcleo del tamaño que aparece en la Fig. 17.1, las órbitas de los electrones exteriores serían del tamaño de un estadio de fútbol.

la naturaleza. Toda la materia ordinaria está compuesta de estas partículas elementales y por lo tanto todas las fuerzas se pueden entender, en última instancia, en función de las fuerzas fundamentales que existen entre ellas. En la actualidad se conocen cuatro fuerzas fundamentales:

1. Fuerza gravitacional (gravedad).
2. Fuerza electromagnética (electricidad y magnetismo).
3. Fuerza nuclear.
4. Fuerza débil.

En cierto sentido, la fuerza gravitacional es la fuerza fundamental más débil porque el módulo de la fuerza gravitatoria entre dos partículas elementales es mucho más pequeño que el módulo de cualquier otra fuerza fundamental. La fuerza de la gravedad entre partículas elementales es de hecho tan débil que no tiene efecto medible sobre el comportamiento de estas partículas dentro del átomo. Sólo un objeto de tamaño descomunal tiene masa suficiente para ejercer una fuerza gravitatoria importante sobre un átomo. Como esta fuerza es atractiva, un objeto así atrae a los átomos que se hallan en el espacio que le rodea. La acumulación de estos átomos aumenta la masa del objeto, de modo que también aumenta la fuerza gravitacional que puede ejercer. Como consecuencia, el objeto todavía atrae más átomos lo cual hace que su masa aumente aún más. Así es cómo inmensos conglomerados de materia, tales como las estrellas y galaxias de estrellas, se forma a partir del polvo y de los átomos esparcidos por el espacio. La gravedad es con mucho la fuerza más importante que controla la estructura de los cuerpos celestes.

La fuerza electromagnética es la fuerza principal que determina la estructura de los átomos. Los electrones se mantienen en órbita alrededor del núcleo por atracción eléctrica, del mismo modo que los planetas se mantienen en órbita alrededor del Sol por la atracción gravitatoria. También los electrones ejercen entre sí fuerzas eléctricas y la fuerza ejercida entre dos átomos próximos es precisamente la fuerza eléctrica entre sus electrones y el núcleo. Todas las fuerzas que hemos discutido hasta ahora en este libro, si exceptuamos la fuerza de gravedad, son el resultado de esta fuerza eléctrica. Así, todas las fuerzas de la vida cotidiana, con excepción de la gravedad, son de origen electromagnético.

Los protones y neutrones del núcleo se mantienen juntos por la fuerza nuclear. Esta fuerza es muy grande cuando las partículas están muy próximas unas de otras, pero disminuye rápidamente con la distancia. Por ejemplo, la fuerza nuclear entre dos neutrones es esencialmente cero cuando tienen una separación de más de 10^{-14} m. Esto quiere decir que la fuerza nuclear no se extiende más allá de los electrones exteriores del átomo que están a 10^{-10} m del núcleo. De este modo, aunque la fuerza nuclear es esencial para mantener unido el núcleo, no juega un papel directo en la interacción de los átomos entre sí.

La fuerza débil es también una fuerza de corto alcance limitada enteramente al núcleo. Es la responsable de algunas formas de radiactividad, que es la transformación espontánea del núcleo de una clase de átomo en el núcleo de otra (Apart. 22.2).

La fuerza electromagnética es por lo tanto la fuerza principal que gobierna la física y la química de la materia ordinaria. Tiene también gran importancia práctica, puesto que toda nuestra civilización industrial está basada en la producción de energía eléctrica y su utilización en motores, alumbrado y calefacción.

17.2. LEY DE COULOMB

Aun cuando las fuerzas eléctricas y de gravitación son fundamentalmente distintas la una de la otra, tienen muchas propiedades similares. Por lo tanto, para entender la electricidad conviene revisar brevemente algunas de las propiedades de la gravedad discutidas en el apartado 5.3.

La gravedad es una fuerza atractiva que existe entre dos objetos con masas m_1 y m_2. Esto quiere decir que la fuerza $\mathbf{F}_1$ ejercida por m_2 sobre m_1 está dirigida hacia m_2 (Fig. 17.2). Por la tercera ley de Newton (propiedad 3, Apart. 2.1), la reacción a $\mathbf{F}_1$ es la fuerza $\mathbf{F}_2$ ejercida por m_1 sobre m_2. La fuerza $\mathbf{F}_2$ tiene el mismo módulo que $\mathbf{F}_1$ pero sentido opuesto, por lo tanto está dirigida hacia m_1, tal como se aprecia en la Fig. 17.2.

La gravedad es una fuerza que actúa a distancia; o sea, dos objetos ejercen una atracción mutua el uno sobre el otro a través del espacio vacío, sin ninguna conexión mecánica. El módulo F_g de las fuerzas de gravitación ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$) sobre dos objetos cuyas masas m_1 y m_2 están separadas por una distancia r, viene dado por la ley de la gravedad de Newton,

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

en donde G es la constante de gravitación universal ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\text{N·m}^2/\text{kg}^2$).

Es costumbre hacer distinción entre fuerzas atractivas y repulsivas por el signo de sus módulos. Una fuerza atractiva se indica por un módulo negativo y una fuerza repulsiva por un módulo positivo. De acuerdo con esto, la fuerza de la gravedad debe escribirse

$$F_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad 17.1$$

para indicar que la fuerza es atractiva.

La electricidad es una fuerza que actúa a distancia entre dos objetos cuyas *cargas* son q_1 y q_2. La carga, como la masa, es un atributo básico de la materia. La dimensión de carga se toma como fundamental, lo mismo que la masa, la longitud, el tiempo, y el grado (de temperatura). La dimensión de cualquier magnitud física se puede expresar en función de estas cinco dimensiones. La unidad de carga es el *coulomb* (C). La fuerza eléctrica entre dos objetos con cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia r viene dada por la *ley de Coulomb*,

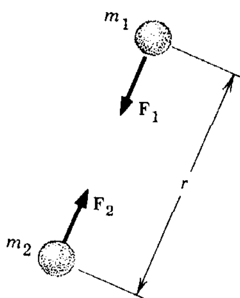


FIGURA 17.2
Atracción gravitacional de dos masas.

$$F_e = +K\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad 17.2$$

en la que K es la constante eléctrica universal ($K = 9{,}0 \times 10^9$ $\text{N·m}^2/\text{C}^2$). Obsérvese la semejanza que hay entre las Ec. 17.1 y 17.2. La fuerza eléctrica depende del producto de las cargas de los dos objetos, lo mismo que la fuerza gravitatoria depende del producto de sus masas. Además, las fuerzas eléctrica y gravitacional son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre los objetos.

La diferencia fundamental entre gravedad y electricidad es que mientras que la gravedad es siempre atractiva, la fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva porque hay dos clases de carga, positiva y ne-

gativa. Los objetos que tienen la misma carga se repelen entre sí y los que tienen carga opuesta se atraen. Éste es el sentido del signo más en la Ec. 17.2. Cuando q_1 y q_2 tienen el mismo signo, bien sean los dos positivos o los dos negativos, el producto q_1q_2 es positivo y por lo tanto F_e es positiva, lo que indica que es una fuerza repulsiva (Fig. 17.3). Por el contrario, si q_1 y q_2 tienen signos opuestos el producto q_1q_2 es negativo y por lo tanto F_e es negativa, lo que indica que es una fuerza atractiva (Fig. 17.4).

Las partículas elementales son las portadoras esenciales de la carga. A partir de la tabla 17.1, que da las cargas y las masas de las partículas elementales, vemos que un proton tiene una carga positiva $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, y un electrón tiene una carga negativa $-e$ de exactamente el mismo valor. (Un neutrón tiene carga cero.) La carga de un objeto es la suma de las cargas de todos sus protones y electrones. Así, un objeto que tiene un número igual de protones y electrones tiene carga cero. Este objeto se dice que no está cargado o que es *neutro.*

Un objeto neutro adquiere carga ganando o perdiendo electrones. Por ejemplo, cuando se frota una varilla de vidrio con un trozo de seda, pasan electrones del vidrio a la seda. Si el vidrio pierde N electrones, tendrá N protones más que electrones, por lo que su carga total será Ne. Análogamente, la seda tendrá N electrones más que protones, por lo que su carga total será $-Ne$. La carga total de la varilla y la seda juntas es

$$Ne + (-Ne) = 0$$

o sea, la misma que tenían antes de frotarse.

Éste es un ejemplo de la ley de *conservación de la carga,* que establece que en cualquier proceso físico, la carga total no cambia. Esta ley es evidentemente cierta para un proceso en el que sólo interviene el paso de electrones de un objeto a otro. Sin embargo, la ley es mucho más general que esto e incluso es válida para procesos en los que se crean y destruyen protones y electrones, como en el caso de la desintegración de un núcleo (Apart. 22.2).

Ejemplo. Comparar las fuerzas eléctrica y gravitatoria entre un electrón y un protón.

A partir de la tabla 17.1 y de la Ec. 17.1 hallamos que la fuerza gravitatoria entre un protón y un electrón separados por una distancia r es

$$F_g = -G\frac{m_p m_e}{r^2}$$

$$= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2)(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}{r^2}$$

$$= -\frac{1{,}01 \times 10^{-67}\ \text{N·m}^2}{r^2}$$

TABLA 17.1 **Masa y carga de las partículas elementales.**

Partícula	Masa, kg	Carga, C
Protón	$1{,}673 \times 10^{-27}$	$+1{,}602 \times 10^{-19}$
Neutrón	$1{,}675 \times 10^{-27}$	0
Electrón	$9{,}110 \times 10^{-31}$	$-1{,}602 \times 10^{-19}$

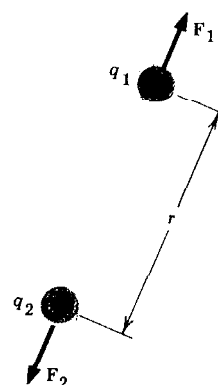


FIGURA 17.3
Repulsión eléctrica de dos cargas positivas.

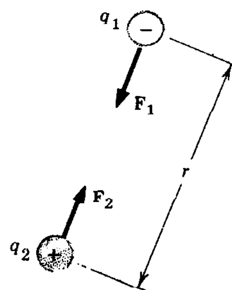


FIGURA 17.4
Atracción eléctrica de cargas opuestas.

A partir de la Ec. 17.2 se ve que la fuerza eléctrica entre un electrón y un protón es

$$F_e = +K\frac{q_p q_e}{r^2}$$

$$= +\frac{(9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{r^2}$$

$$= -\frac{2{,}30 \times 10^{-28}\ \mathrm{N{\cdot}m^2}}{r^2}$$

La razón de estas dos fuerzas es

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{1{,}01 \times 10^{-67}} = 2{,}28 \times 10^{39}$$

Como la fuerza eléctrica es inmensamente mayor que la fuerza gravitacional, se puede despreciar por completo la fuerza de la gravedad cuando se calcula la fuerza entre partículas elementales. Sin embargo, la fuerza entre grandes conglomerados de materia, como los astros, es dominada por la gravedad porque estos objetos tienden a ser eléctricamente neutros.

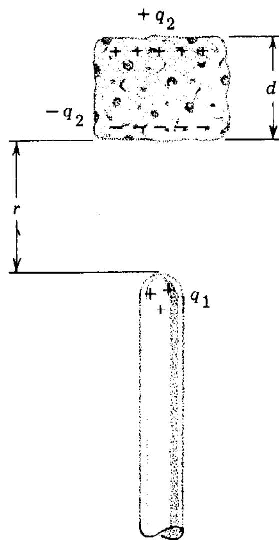


FIGURA 17.5
Inducción de carga sobre un trozo de corcho. El corcho es atraído hacia la carga inductora q_1 porque la atracción entre q_1 y la carga inducida negativa es mayor que la repulsión entre q_1 y la carga inducida positiva.

Inducción

Una varilla de vidrio que ha sido cargada positivamente frotándola con un tejido de seda, atraerá a un trozo pequeño de corcho aun cuando el corcho esté descargado. El corcho está compuesto de electrones y protones de carga opuesta, los cuales se distribuyen normalmente de modo uniforme, de manera que la carga neta es cero en todo el corcho. Cuando un objeto cargado, como, por ejemplo, una varilla de vidrio, se acerca al corcho, la carga positiva de la varilla atrae a los electrones del corcho y repele a los protones haciendo que estas partículas cambien sus posiciones ligeramente. Como resultado, la carga negativa se acumula en el lado del corcho próximo a la varilla y la carga positiva se acumula en el otro lado. Este proceso recibe el nombre de *inducción*. De acuerdo con la ley de conservación de la carga, la carga total del corcho debe seguir siendo cero puesto que no se ha añadido ni quitado carga de él. Así, pues, hay tanta carga negativa inducida sobre un lado del corcho como carga positiva inducida en el otro.
Supongamos que la varilla de vidrio tiene una carga q_1 y está a una distancia r del lado frontal del corcho (Fig. 17.5). Si la carga inducida en este lado es $-q_2$, la varilla lo atrae con la fuerza

$$F_e = +K\frac{q_1(-q_2)}{r^2} = -K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

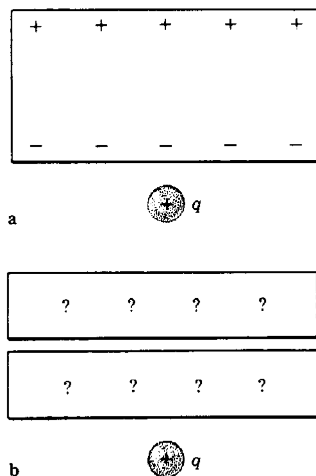


FIGURA 17.6
(*a*) Inducción de carga sobre un objeto, debida a una carga externa q.
(*b*) Corte del objeto para intentar aislar la carga inducida.

Al mismo tiempo, la varilla repele la carga $+q_2$ inducida en el lado posterior. Esta carga está a una distancia d más alejada de la varilla, donde d es el espesor del trozo de corcho. Por lo tanto, la fuerza repulsiva sobre la carga positiva inducida es

$$F'_e = K\frac{q_1 q_2}{(r + d)^2}$$

la cual es menor que F_e. El módulo F de la fuerza total ejercida sobre el corcho es la suma de F_e y F'_e, o sea

$$F = F_e + F'_e = -K\frac{q_1q_2}{r^2} + K\frac{q_1q_2}{(r+d)^2}$$
$$= -Kq_1q_2\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+d)^2}\right]$$
$$= -Kq_1q_2\frac{2rd + d^2}{r^2(r+d)^2}$$

Esto demuestra que la varilla de vidrio ejerce una fuerza atractiva (negativa) sobre el corcho.

OBSERVACIÓN. Si la varilla estuviese cargada negativamente, se induciría carga positiva sobre el lado del corcho próximo a la varilla y carga negativa sobre el otro lado, por lo que el corcho todavía sería atraído por la varilla. De este modo, cualquier objeto cargado, sea positiva o negativamente, ejerce una fuerza de atracción sobre un objeto no cargado.

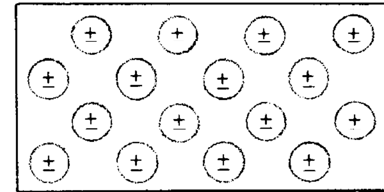
Aisladores y conductores

Las sustancias se diferencian por la relativa libertad con que puede desplazarse la carga a través de ellas. Una sustancia en la que la carga se puede desplazar libremente se llama *conductor* y una sustancia en la que la carga se puede mover sólo ligeramente se llama *aislador* (o *dieléctrico*). Los metales son todos buenos conductores; el vidrio, la goma, y el corcho son ejemplos de buenos aisladores.

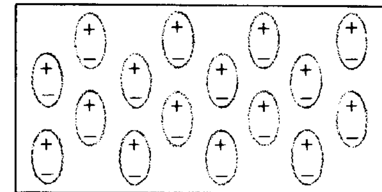
La diferencia entre aisladores y conductores se ve ilustrada por el siguiente experimento. Se pone cerca de un objeto no cargado una carga q que induce carga en él (Fig. 17.6*a*). A continuación se parte el objeto por la mitad, tal como se muestra en la Fig. 17.6*b*, y se suprime la carga q. ¿Se queda cada una de las dos mitades del objeto con la carga inducida? La respuesta es sí, si el objeto es un conductor y no si el objeto es un aislador. Para entender esto hay que comparar las estructuras atómicas de los aisladores y de los conductores.

En un aislador cada electrón está ligado a un átomo y no es libre para separarse por completo. Los átomos de un aislador están representados en la Fig. 17.7*a* como unidades neutras compuestas de cargas positivas y negativas superpuestas unas encima de otras. Una carga positiva q puesta cerca de un aislador atrae a los electrones cargados negativamente que hay en los átomos y repele a los núcleos cargados positivamente. Esto hace que la carga negativa y positiva de cada átomo se separen ligeramente. El átomo en conjunto permanece neutro, pero un extremo se carga positivamente y el otro negativamente. El extremo negativo de cada átomo se coloca frente a la carga inductora q, tal como se ve en la Fig. 17.7*b*. Como consecuencia se forma en la superficie del aislador que se halla frente a q un exceso de carga negativa y en la superficie opuesta se forma un exceso de carga positiva. Es evidente que éstas no son cargas libres: son simplemente los extremos cargados de los átomos neutros. La Fig. 17.7*c* muestra que si el aislador se escinde en dos, aparece carga inducida sobre las superficies cortadas, pero la carga total de cada mitad permanece cero.

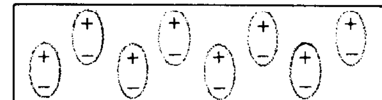
En un conductor metálico se separa de cada átomo un electrón por lo menos y es libre para desplazarse por el conductor. Los átomos que pierden electrones se llaman *iones*. En un metal están cargados positi-



a



b q

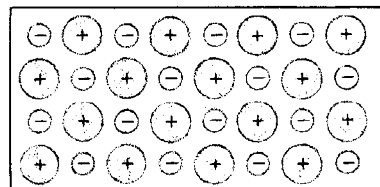


c q

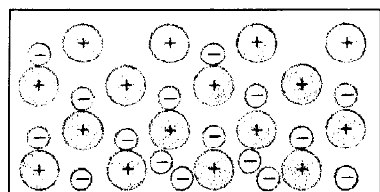
FIGURA 17.7
(*a*) Un aislador. Cada átomo es un objeto neutro compuesto de cargas positivas y negativas. (*b*) Inducción de carga sobre un aislador. La carga externa q hace que la carga positiva y negativa de cada átomo se separen ligeramente. (*c*) Las cargas inducidas sobre un aislador no están separadas cuando el aislador se parte en dos.

vamente y permanecen en posiciones fijas. Así, pues, un metal está compuesto de iones cargados positivamente en posiciones fijas y electrones cargados negativamente, libres para desplazarse de un lado a otro. Normalmente, los iones y los electrones están distribuidos de manera uniforme, de modo que la carga neta es cero en todo el metal (Fig. 17.8*a*). Sin embargo, un objeto cargado puesto cerca de un conductor cambia esta distribución. Una carga positiva q atrae a los electrones y repele a los iones. Como los electrones se pueden mover libremente, se acumulan en el lado próximo a q, que así se carga negativamente (Fig. 17.8*b*). El lado opuesto, al no tener suficientes electrones, queda cargado positivamente. Si se corta por la mitad el conductor, se atrapa un exceso de electrones en la mitad que se halla frente a q, quedando la otra mitad con un déficit de electrones (Fig. 17.8*c*). Por lo tanto, cada mitad sigue cargada, incluso después de quitar la carga inductora.

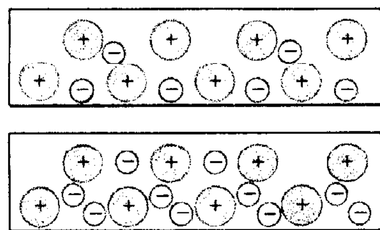
Para descargar estos conductores sólo es necesario conectar un hilo conductor de uno al otro. Los electrones en exceso sobre el conductor cargado negativamente, atraídos hacia el conductor cargado positivamente, fluyen libremente por el hilo hasta que cada conductor es de nuevo neutro.



a



b



c

FIGURA 17.8
(*a*) Un conductor. Las cargas positivas son los iones, los cuales tienen posiciones fijas y las cargas negativas son los electrones, los cuales se pueden desplazar libremente. (*b*) Inducción de carga sobre un conductor. La carga externa q hace que los electrones libres se desplacen hacia un lado del conductor. (*c*) Cuando se corta el conductor por la mitad, queda atrapado un exceso de electrones en una mitad y en la otra un déficit.

Máquinas de inducción

La posibilidad de separar las cargas por inducción en un conductor se utiliza en un dispositivo denominado *máquina de inducción* para producir de manera continua una separación de carga. Hoy en día estas máquinas se usan principalmente para demostraciones de física, pero en el siglo XIX se utilizaron para investigaciones sobre la electricidad. En la máquina que se muestra en la Fig. 17.9, las varillas metálicas están dispuestas radialmente en una rueda que se hace girar en la dirección indicada mediante una manivela. La placa *P* tiene inicialmente una pequeña carga positiva, de modo que se inducen cargas sobre la varilla en da posición 1. Cuando esta varilla gira hasta la posición 2, establece un contacto momentáneo con el hilo *W*, que simultáneamente está en contacto con la varilla en la posición 6. De la varilla en la posición 6 fluye carga negativa, de modo que cuando el contacto desaparece, esta varilla, que ahora está en la posición 7, queda cargada positivamente. Del mismo modo, la varilla en la posición 3 queda cargada negativamente. Estas varillas depositan su carga en las dos esferas conductoras por medio de los contactos *A* y *B*.

Parte de la carga positiva depositada en *A* se acumula en la placa *P*. Al aumentar la carga en *P*, aumenta la cantidad de carga inducida sobre la varilla en la posición 2. Ésta, a su vez, aumenta la carga devuelta a *P*. Así, pues, esta máquina hace uso de la realimentación positiva para establecer rápidamente una gran carga en las dos esferas conductoras. Cuando esta carga es suficientemente grande, el aire que hay entre las esferas se hace de repente conductor y los electrones pueden pasar de la esfera negativa a la positiva. Esto se manifiesta por un chisporroteo que se produce entre las dos esferas.

17.3. EL CAMPO ELÉCTRICO

La Fig. 17.10 muestra una configuración arbitraria de cargas (q_1, q_2, . . ., q_n). La fuerza **F** que ejerce este conjunto de cargas sobre cualquier

otra carga positiva q en el punto P es la suma vectorial de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ que cada carga del conjunto ejerce individualmente sobre q. Esta fuerza depende conjuntamente de la carga de *prueba* q y de las cargas *fuente* q_1, $q_2, \ldots, q_n$ de la configuración original. Es útil expresar $\mathbf{F}$ como el producto de un factor que depende solamente de la carga de prueba y un factor que depende solamente de las cargas fuente. Esto se hace fácilmente por que $\mathbf{F}$ es proporcional a q, y por lo tanto la razón

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad 17.3$$

es independiente de q. El vector $\mathbf{E}$ es el *campo eléctrico* en el punto P producido por las cargas fuente. Es igual a la fuerza que ejercerían estas cargas sobre una carga positiva de 1 C situada en P. La unidad de $\mathbf{E}$ es newtons por coulomb (N/C). En función de $\mathbf{E}$, la fuerza que ejercen las cargas fuente sobre una carga arbitraria q en el punto P se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad 17.4$$

La Ec. 17.4 expresa el vector $\mathbf{F}$ como el producto de un número q que depende tan sólo de la carga de prueba y un vector $\mathbf{E}$ que depende solamente de las cargas fuente. El producto de un número *positivo* q y un *vector* $\mathbf{E}$ es un vector $\mathbf{F}$ que tiene la dirección de $\mathbf{E}$ y el módulo qE. Si q es negativo, el sentido de $\mathbf{F}$ es opuesto al de $\mathbf{E}$.

El campo eléctrico es un concepto importante porque nos permite pensar en la fuerza que ejercería una configuración de cargas sobre una carga en un punto, aun cuando en realidad no hubiese allí carga. Como la fuerza que se ejercería sobre una carga de prueba depende de la posición del punto, el campo eléctrico varía de punto a punto. El efecto de una configuración de carga se puede representar dibujando el campo

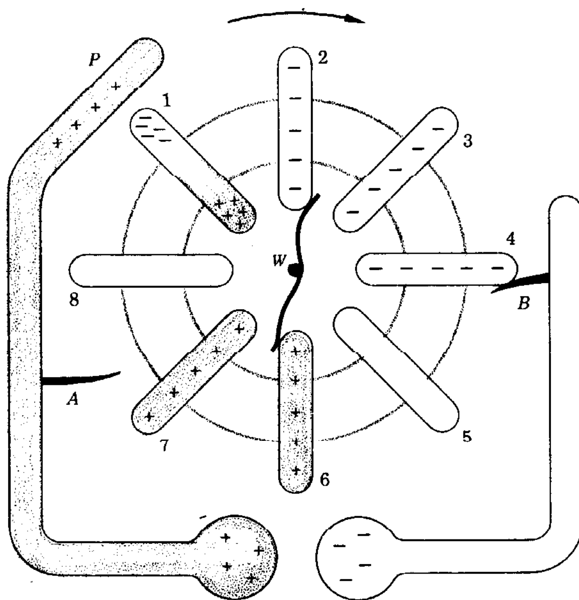


FIGURA 17.9
Una máquina de inducción. La rotación de la rueda en el sentido de las agujas del reloj hace que la carga positiva se acumule en la izquierda y que la negativa se acumule en la derecha.

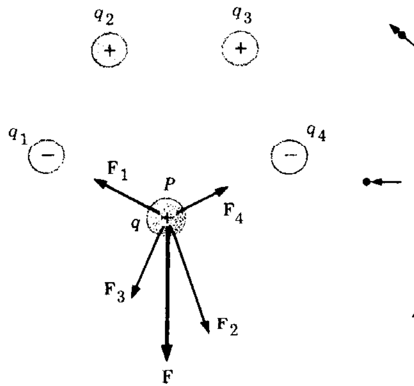


FIGURA 17.10
La fuerza sobre una carga de prueba q debida a cuatro cargas fuente q_1, q_2, q_3, q_4.

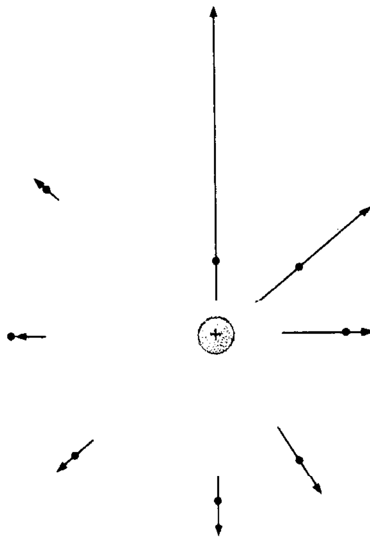


FIGURA 17.11
Campo eléctrico en varios puntos producido por una carga puntual positiva.

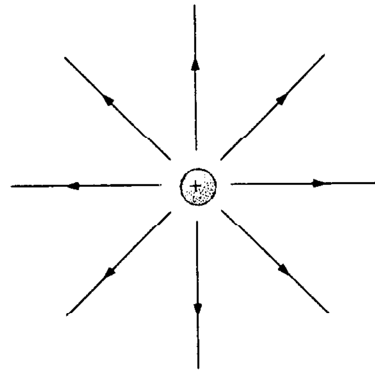


FIGURA 17.12
Líneas de fuerza de una carga puntual positiva.

eléctrico en varios puntos. Por ejemplo, la Fig. 17.11 muestra el campo eléctrico en varios puntos producido por una carga puntual positiva. Las flechas que representan el campo están todas apartándose de la carga porque el sentido del campo es el sentido de la fuerza que se ejercería sobre una carga de prueba positiva. La longitud de las flechas disminuye con la distancia a la carga, porque la fuerza sobre una carga, de prueba disminuye con la distancia, de acuerdo con la ley de Coulomb (Ec. 17.2).

La Fig. 17.12 es otra representación del campo eléctrico de una carga puntual positiva. Las líneas, llamadas *líneas de fuerza*, se dibujan paralelas al campo en cada punto, consiguiéndose así una buena imagen de la dirección del campo eléctrico. Si se comparan las Figs. 17.11 y 17.12, vemos que las líneas de fuerza están más juntas donde E es grande y más separadas donde E es pequeño. Así, la separación de las líneas de fuerza da idea del valor relativo del campo.

La Fig. 17.13 muestra las líneas de fuerza para una carga puntual negativa. Son idénticas a las líneas de fuerza de una carga puntual positiva con la única diferencia de que están orientadas hacia la carga. Esto es así, porque una carga de prueba positiva es atraída hacia la carga negativa.

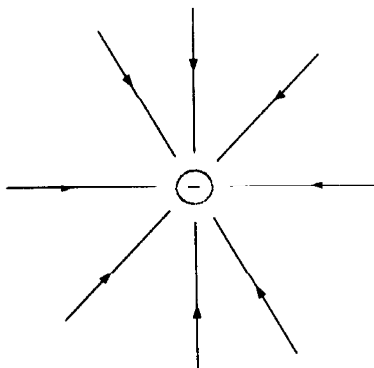


FIGURA 17.13
Líneas de fuerza de una carga puntual negativa.

Campo de un dipolo

La Fig. 17.14 muestra las líneas de fuerza producidas por dos cargas iguales y opuestas separadas por una distancia d. Las líneas de fuerza parten todas de la carga positiva y terminan en la carga negativa. El campo eléctrico en cualquier punto P es tangente a la línea de

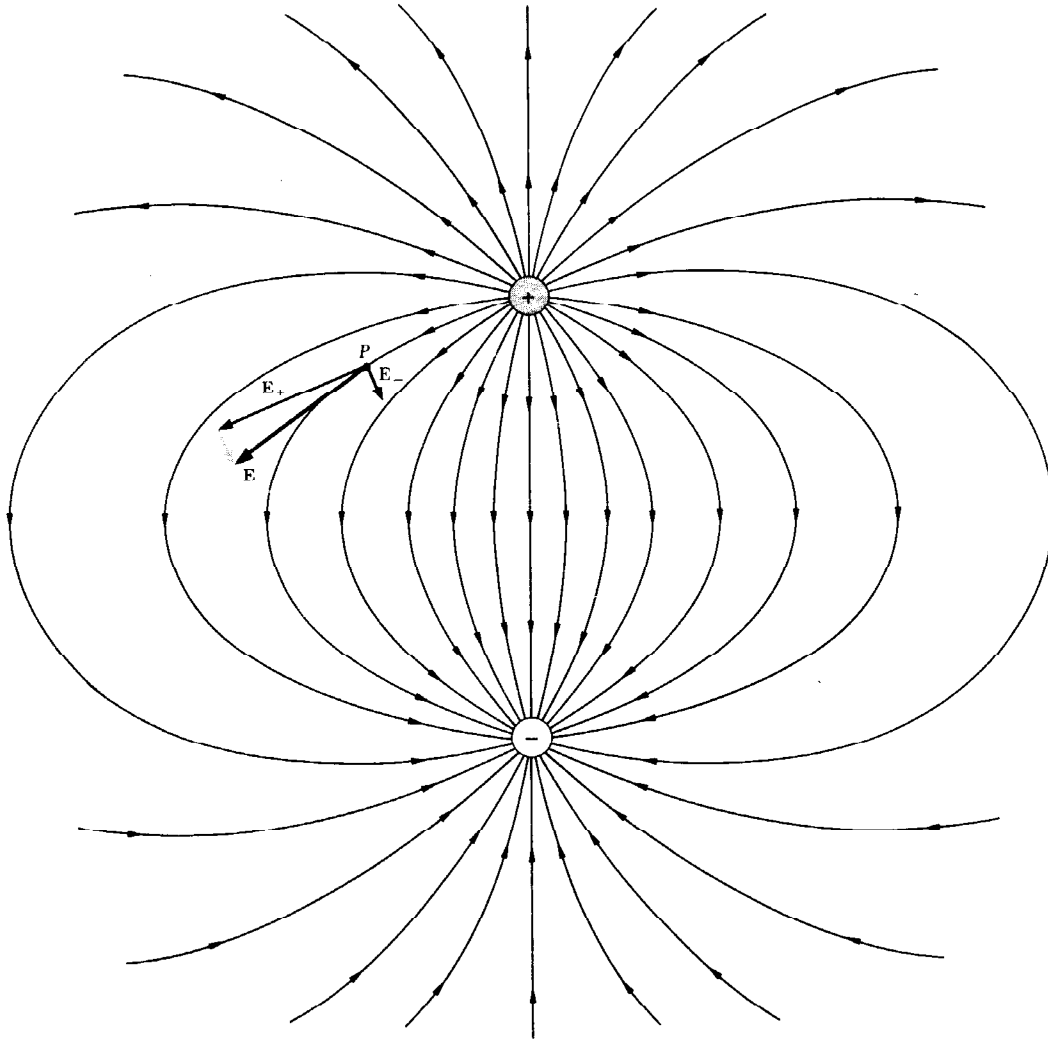


FIGURA 17.14
Líneas de fuerza de un dipolo.
El campo eléctrico en cualquier punto *P* es tangente a la línea de fuerza que pasa por aquel punto.

fuerza que pasa por *P* y es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos debidos a cada carga por separado.

La configuración de carga de la Fig. 17.14 recibe el nombre de *dipolo*. Aun cuando la carga total de la configuración sea cero, ejercerá una fuerza eléctrica sobre otra carga. Ésta es la situación que ya hemos visto al discutir la fuerza entre un objeto cargado y un trozo de corcho sin cargar (Apart. 17.2). El objeto cargado inducía carga positiva y negativa sobre lados opuestos del corcho. Estas cargas inducidas forman un dipolo que ejerce una fuerza sobre el objeto cargado.

El campo eléctrico producido por un dipolo se puede calcular en cualquier punto por la ley de Coulomb. El cálculo es particularmente sencillo para el caso especial de un punto *P* que se halla en el eje del dipolo (Fig. 17.15). Supongamos que q_1 y $q_2 = -q_1$ son las cargas del dipolo, y supongamos que hay una carga de prueba q en el eje del dipolo a una distancia r de su centro. La fuerza total **F** sobre q es la suma de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ debidas a q_1 y q_2. Como estas fuerzas son paralelas, el

módulo de **F** es

$$F = F_1 + F_2$$
$$= K\frac{qq_1}{(r + \frac{1}{2}d)^2} + K\frac{qq_2}{(r - \frac{1}{2}d)^2}$$
$$= Kqq_1\left[\frac{1}{(r + \frac{1}{2}d)^2} - \frac{1}{(r - \frac{1}{2}d)^2}\right]$$
$$= Kqq_1\frac{-2rd}{(r + \frac{1}{2}d)^2(r - \frac{1}{2}d)^2}$$

Cuando r es muy grande comparado con d, los términos $\frac{1}{2}d$ se pueden despreciar en el denominador. Entonces la fuerza viene dada por

$$F = -Kqq_1\frac{2rd}{r^4} = -Kqq_1\frac{2d}{r^3}$$

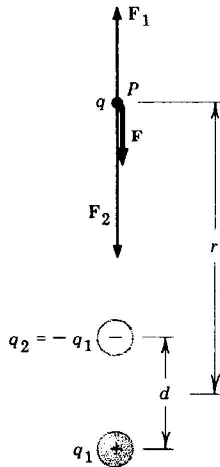


FIGURA 17.15
Fuerza sobre una carga de prueba q localizada sobre el eje de un dipolo.

Esto demuestra que la fuerza ejercida por un dipolo disminuye en razón inversa al cubo de la distancia al dipolo, en contraste con la fuerza ejercida por una sola carga que disminuye como el cuadrado de la distancia. A grandes distancias, la fuerza del dipolo es mucho más débil que la fuerza producida por q_1 o q_2 por separado, porque las fuerzas individuales se neutralizan entre sí en gran parte (aunque no completamente). El módulo del campo eléctrico producido por el dipolo en P es

$$E = \frac{F}{q} = -K\frac{2dq_1}{r^3}$$

17.4. POTENCIAL ELECTRICO

Consideremos un objeto de masa m y carga q en presencia de una carga fija q_1 (Fig. 17.16). Si ambas cargas son positivas, q_1 ejerce una fuerza repulsiva

$$F = K\frac{qq_1}{r^2}$$

sobre el objeto. Si el objeto se encuentra inicialmente en reposo en el punto A, se alejará con movimento acelerado a lo largo de una línea de fuerza. En el punto B tendrá una velocidad v_B y una energía cinética $K_B = 1/2\ mv_B^2$. De acuerdo con el teorema trabajo-energía (apartado 5.1), el trabajo W_{AB} realizado sobre q por la fuerza **F** al desplazar el objeto de A a B es igual a la variación de su energía cinética

$$W_{AB} = K_B - K_A \qquad 17.5$$

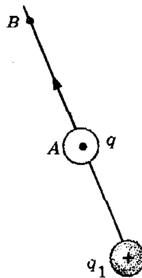


FIGURA 17.16
Una carga de prueba q que se mueve de A a B en presencia de una carga fija q_1.

Como el objeto parte del reposo, K_A es en este caso cero.
El trabajo W_{AB} realizado por la fuerza eléctrica, lo mismo que el trabajo realizado por la gravedad (Apart. 5.3), se puede escribir como la diferencia de la *energía potencial* U del objeto en A y B,

$$W_{AB} = U_A - U_B \qquad 17.6$$

O sea, que se puede asignar un número U a cada punto, de tal manera que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica al desplazar el objeto entre dos puntos cualesquiera viene dado por la Ec. 17.6. Se ve claramente que si se añade al valor de U en cada punto el mismo número, no cambiaría la Ec. 17.6. Esta libertad en la definición de U se utiliza para hacer U igual a cero en algún punto conveniente de una situación dada.
A partir de las Ecs. 17.5 y 17 6 obtenemos el resultado

$$U_A - U_B = K_B - K_A$$

o también
$$U_A + K_A = U_B + K_B \qquad 17.7$$

Esto establece que la suma de las energías cinética y potencial del objeto en A es igual a la suma de las energías en B. Como A y B son puntos arbitrarios, la suma de estas energías es la misma en todos los puntos, o sea, es una constante.
Se puede demostrar que la energía potencial de una carga puntual q debida a una carga puntual q_1 viene dada por

$$U = K\frac{qq_1}{r} \qquad 17.8$$

Esta expresión es muy parecida a la de la energía potencial de gravitación (Ec. 5.18) salvo en el signo, el cual refleja simplemente la diferencia de signo de las leyes de fuerza (Ecs. 17.1 y 17.2). Si q y q_1 tienen el mismo signo, las cargas se repelen mutuamente y U es positiva. Si q y q_1 tienen signo opuesto se atraen mutuamente y U es negativa. Como la fuerza de gravitación siempre es atractiva, la Ec. 5.18 debe tener signo menos. La energía potencial dada por la Ec. 17.8 nunca es cero, pero se hace cada vez más pequeña al hacerse r cada vez más grande. Así podemos decir que la energía potencial es cero cuando las cargas están infinitamente separadas.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la energía potencial de un electrón en un punto A, a una distancia $r_A = 0{,}53 \times 10^{-10}$ m de un protón?* ¿Cuál es la velocidad mínima v_A necesaria para que el electrón pueda escapar completamente del protón?

Utilizando la tabla 17.1 y la Ec. 17.8, hallamos que la energía potencial del electrón en A es

$$\begin{aligned} U_A &= K\frac{q_e q_p}{r_A} \\ &= \frac{(9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2})(-1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{5{,}3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}} \\ &= -4{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{N{\cdot}m} = -4{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

La energía es negativa porque el electrón es atraído por el protón. La Ec. 17.7 se puede utilizar para calcular la velocidad mínima v_A que debe

* Ésta es la distancia media entre un electrón y un protón en un átomo de hidrógeno (Apart. 21.2).

tener el electrón en A para escapar completamente del protón. Un electrón con la velocidad mínima de escape se puede desplazar infinitamente lejos del protón, pero su velocidad en el infinito será cero. Así, cuando el electrón está infinitamente lejos del protón, tanto su energía potencial U_∞ como su energía cinética K_∞ son cero. Por lo tanto, de acuerdo con la Ec. 17.7, tenemos

$$K_A + U_A = K_\infty + U_\infty = 0$$

o sea $$K_A = \tfrac{1}{2}mv_A{}^2 = -U_A = 4{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

en donde m es la masa del electrón. Despejando v_A tenemos

$$v_A{}^2 = \frac{4{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}}{\tfrac{1}{2}m}$$
$$= \frac{4{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}}{0{,}5(9{,}1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})}$$
$$= 9{,}4 \times 10^{12}\ \mathrm{J/kg}$$

de modo que $$v_A = 3{,}1 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

OBSERVACIÓN. Este cálculo debería compararse con el del Apart. 5.3 (ejemplo 2) acerca de la velocidad que necesita un objeto para escapar completamente de la Tierra. Los principios son los mismos en ambos cálculos. Sin embargo, la velocidad de escape en el caso de la gravedad no depende de la masa del objeto, mientras que en el caso de la electricidad sí que depende. ¿Por qué?

La energía potencial de una carga de prueba q debida a una configuración de cargas fuente ($q_1, q_2, \ldots, q_n$) es la suma de las energías potenciales debidas a cada carga individualmente. La energía potencial depende conjuntamente de la carga de prueba q y de las cargas fuente $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Es útil expresar la energía potencial, lo mismo que la fuerza eléctrica, como el producto de un factor que depende solamente de la carga de prueba y de un factor que depende únicamente de las cargas fuente. Como U es proporcional a q, la razón

$$V = \frac{U}{q} \tag{17.9}$$

es independiente de q. La magnitud V, llamada *potencial eléctrico*, depende sólo de las cargas fuente. La energía potencial U de la carga de prueba se expresa simplemente en función del potencial V,

$$U = qV \tag{17.10}$$

La unidad de potencial es joules por coulomb (J/C), que recibe el nombre de *volt* (V):

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/C}$$

A partir de las Ecs. 17.8 y 17.9, se obtiene que el potencial debido a una carga puntual q_1 es

$$V = \frac{U}{q} = K\frac{q_1}{r} \tag{17.11}$$

Ejemplo 2. ¿Cuál es el potencial a una distancia $r = 5{,}3 \times 10^{-11}$ m de un protón?
Según la Ec. 17.11, el potencial vale

$$V = \frac{(9{,}0 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})}{5{,}3 \times 10^{-11}\ \text{m}}$$
$$= 27{,}2\ \text{N}\cdot\text{m/C} = 27{,}2\ \text{J/C} = 27{,}2\ \text{V}$$

El potencial en todos los puntos de una configuración de carga se representa gráficamente usando *equipotenciales*, o sea, líneas a lo largo de las cuales el potencial es constante. La Fig. 17.17 muestra las equipotenciales (líneas de trazos) y las líneas de fuerza (líneas continuas) de un dipolo (dos cargas iguales y opuestas). El campo eléctrico no realiza trabajo sobre una carga de prueba que se desplaza a lo largo de una equipotencial, puesto que la energía potencial de la carga no cambia Esto quiere decir que las líneas de fuerza deben ser perpendiculares a las equipotenciales, tal como se muestra en la Fig. 17.17, pues si no fuera así, la fuerza eléctrica tendría una componente paralela a una equipo-

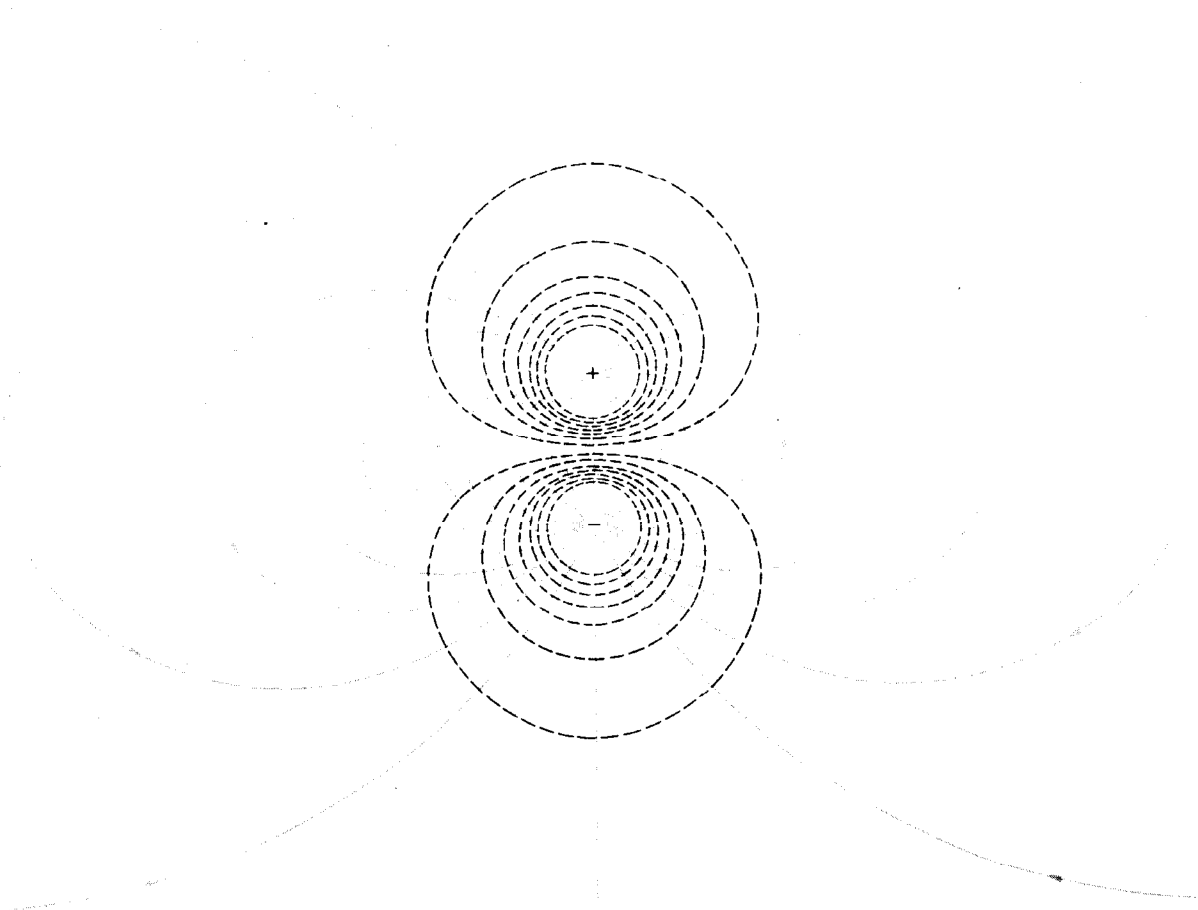


FIGURA 17.17
Equipotenciales y líneas de fuerza de un dipolo. Las líneas de fuerza en cualquier punto son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

tencial y algo de trabajo se realizaría sobre una carga de prueba que se desplazase a lo largo de ella. La fuerza sobre una carga de prueba positiva está siempre dirigida desde una región de alto potencial a una región de bajo potencial, perpendicularmente a las equipotenciales. La fuerza sobre una carga de prueba negativa es a la inversa: está dirigida desde una región de bajo potencial a una región de alto potencial. Cuando un conductor metálico es colocado en un campo eléctrico estático, partes diferentes del conductor pueden estar momentáneamente a potenciales diferentes. Si eso es lo que sucede, los electrones cargados negativamente, que pueden desplazarse libremente por el metal, fluirán desde las regiones de bajo potencial a las de alto potencial. Los electrones se vuelven a distribuir hasta que, en menos de una millonésima de segundo, el potencial es el mismo en todo el metal. Así, cuando no hay flujo de carga en él, un metal u otro objeto conductor es una región equipotencial. Además, como cualquier campo eléctrico en un conductor haría que los electrones libres se desplazaran, el campo eléctrico en un conductor debe ser cero cuando no hay flujo de carga.

Un conductor que está en buen contacto con la Tierra se dice que está unido a *tierra*. La superficie terrestre es en sí misma un conductor moderadamente bueno, de modo que la Tierra y todos los conductores unidos a ella forman un gran conductor, todo él al mismo potencial que la Tierra. Para aplicaciones prácticas el potencial de la Tierra se toma como cero.

Por ejemplo, la toma de corriente de una casa está normalmente a 120 V. Esto quiere decir que un extremo del enchufe se mantiene a un potencial de 120 V con respecto al que está unido a tierra. Cuando se enchufa un aparato fluye carga positiva del extremo de alto potencial, pasa por el aparato y vuelve a tierra. El trabajo realizado por la carga es

$$W = U_{120} - U_0$$
$$= q \times 120 \text{ V} - 0 = q \times 120 \text{ V}$$

Por ejemplo, el trabajo realizado sobre una carga de 10 C es

$$W = 10 \text{ C} \times 120 \text{ V} = 1200 \text{ C·V} = 1200 \text{ J}$$

Este trabajo se convierte en calor, luz o energía mecánica, según la naturaleza del aparato enchufado.

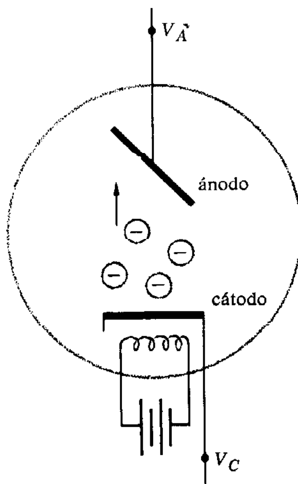


FIGURA 17.18
Una válvula de vacío.
Los electrones que se evaporan del cátodo calentado se aceleran hacia el ánodo, que se mantiene a un potencial positivo con respecto al cátodo.

17.5. HACES DE ELECTRONES

Muchos aparatos importantes, como, por ejemplo, osciloscopios, receptores de televisión, aparatos de rayos X, microscopios electrónicos y válvulas electrónicas, utilizan un haz de electrones acelerados por un campo eléctrico. En todos los casos se mantiene el haz en un tubo de vidrio al que se ha hecho el vacío, tal como se ve en la Fig. 17.18. Las placas metálicas o *electrodos* están montadas dentro del tubo y los hilos unidos a los electrodos pasan por la pared del tubo. Un electrodo, llamado *cátodo*, es calentado por medio de un filamento de alambre en el que hay corriente (Apart. 18.1). Cuando la temperatura del cátodo es suficientemente alta, algunos de sus electrones libres poseen energía suficiente para escapar del metal, lo mismo que las moléculas que se evaporan de un líquido (Apart. 9.1). Estos electrones evaporados forman

una nube electrónica alrededor del cátodo y cuando ésta se hace suficientemente densa, la nube impide que haya más evaporación.
Si el otro electrodo, llamado *ánodo*, se mantiene a un elevado potencial positivo con respecto al cátodo, los electrones de la nube serán atraídos por él. Como no hay aire en el tubo, estos electrones se mueven libremente hacia el ánodo sin chocar con las moléculas de aire. Al alejarse de la nube electrónica son reemplazados por nuevos electrones evaporados del cátodo.
Supongamos que V_A es el potencial del ánodo y que V_C es el potencial del cátodo. Las energías potenciales de un electrón de carga $q = -e$ en el ánodo y el cátodo son

$$U_A = -eV_A \qquad \text{y} \qquad U_C = -eV_C$$

La fuerza eléctrica es la única fuerza que actúa sobre los electrones, de modo que cuando un electrón se mueve del cátodo al ánodo, la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante:

$$K_C + U_C = K_A + U_A$$

Despejando de aquí la energía cinética K_A en el ánodo, se obtiene

$$\begin{aligned} K_A &= K_C + (U_C - U_A) \\ &= K_C + e(V_A - V_C) \end{aligned}$$

La energía cinética K_C de los electrones cuando salen del cátodo es aproximadamente cero, de modo que tenemos

$$K_A = \tfrac{1}{2}mv_A^2 = e(V_A - V_C) \qquad 17.12$$

o sea

$$v_A^2 = \frac{2e(V_A - V_C)}{m} \qquad 17.13$$

en donde m es la masa de un electrón.

Ejemplo. Si el ánodo de un tubo de vacío está a un potencial de 5000 V con respecto al cátodo, ¿cuál es la velocidad de un electrón cuando alcanza el ánodo?

Según la Ec. 17.13, la velocidad del electrón viene dada por

$$\begin{aligned} v_A^2 = \frac{2e(V_A - V_C)}{m} &= \frac{2(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5000\ \text{V})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}} \\ &= 17{,}6 \times 10^{14}\ \text{J/kg} \end{aligned}$$

o sea

$$v_A = 4{,}2 \times 10^{7}\ \text{m/s}$$

Tubo de rayos X

En un tubo de rayos X los electrones chocan con el ánodo, tal como se observa en la Fig. 17.18. La repentina desaceleración de los electrones

genera los rayos X, que son simplemente ondas electromagnéticas de longitud de onda muy corta (Apart. 15.1). La longitud de onda de los rayos X producidos se hace más corta al crecer la diferencia de potencial $V_A - V_C$ (Apart. 21.1). Como los rayos X de longitud más corta son más penetrantes que los de longitud de onda más larga, hoy en día se utilizan aparatos de rayos X con diferencias de potencial muy grandes. Con una diferencia de potencial de 8000 V, la energía cinética de los electrones al chocar con el ánodo es

$$K_A = e(V_A - V_C)$$
$$= 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 8000\ \text{V} = 12{,}8 \times 10^{-16}\ \text{J}$$

Normalmente es más conveniente expresar la energía de una partícula elemental en *electronvolts* (eV). Un electronvolt es la energía adquirida por un electrón al desplazarse a través de una diferencia de potencial de 1 V. O sea, el electronvolt está relacionado con el joule por

$$1\ \text{eV} = e \times 1\text{V} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

y

$$1\ \text{J} = 6{,}25 \times 10^{18}\ \text{eV}$$

Por ejemplo, la energía cinética del electrón en electronvolts es

$$K_A = (12{,}8 \times 10^{-16}\ \text{J})\frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$
$$= 8000\ \text{eV}$$

Así, la energía en electronvolts es igual a la diferencia de potencial en volts.

Tubo de rayos catódicos

El tubo de rayos catódicos (Fig. 17.19) se utiliza tanto en osciloscopios como en receptores de televisión para dar una imagen controlada eléctricamente. Los electrones evaporados del cátodo son acelerados hasta el ánodo, lo mismo que en un tubo de rayos X. Sin embargo, existe un orificio en el ánodo de un tubo de rayos catódicos por el que pasan algunos electrones. Estos electrones chocan después con la superficie interior del extremo aplastado del tubo. Esta superficie está cubierta con un material fluorescente que produce una mancha brillante en el lugar donde choca el haz.

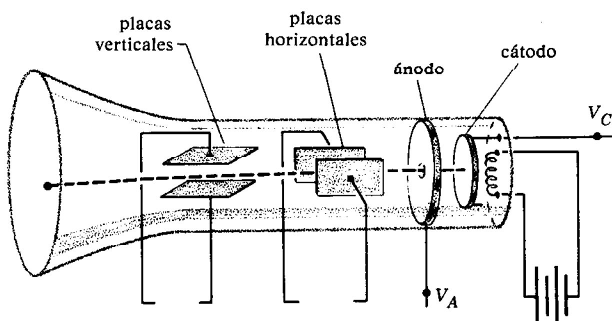


FIGURA 17.19
Tubo de rayos catódicos. Algunos electrones pasan por el orificio que hay en el ánodo y siguen hasta chocar con la pantalla fluorescente. La posición del haz sobre la pantalla se controla por medio de los potenciales aplicados a las placas deflectoras.

La posición de la mancha es controlada por dos pares de placas deflectoras orientadas en ángulo recto. Cuando los electrones pasan entre un par de placas son desviados hacia la placa de potencial más elevado. El valor de la desviación es controlado variando la diferencia de potencial entre las placas. Un par de placas produce desviación horizontal y el otro par produce desviación vertical. Los dos pares juntos pueden mover la mancha por toda la pantalla.

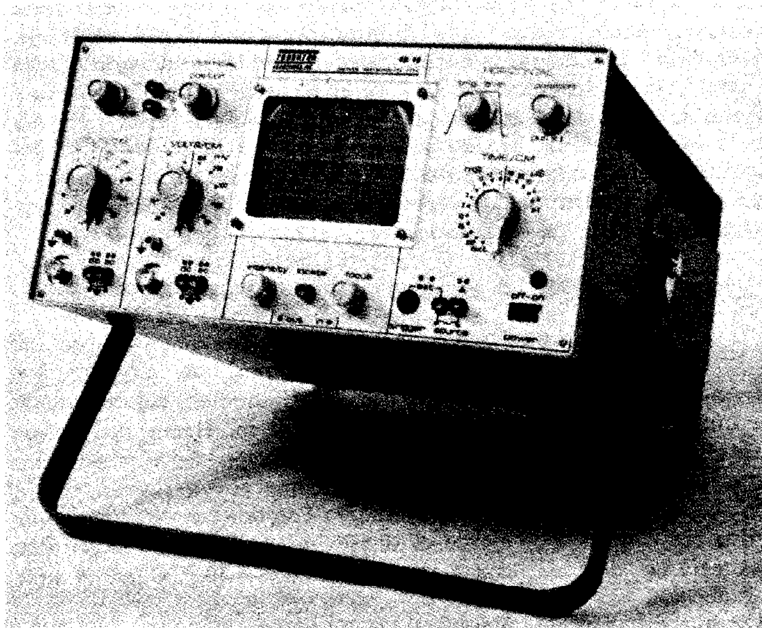


FIGURA 17.20
Un osciloscopio.
(Thornton Associates.)

Se utiliza un osciloscopio (Fig. 17.20) para mostrar un potencial que varía con el tiempo, por ejemplo, el producido por impulsos que se mueven a lo largo del axón de una célula nerviosa. Por medio de electrodos implantados en la célula, el potencial de interés se aplica a las placas verticales de un osciloscopio, produciendo desviaciones de la mancha. Para mostrar la variación temporal de los pulsos, el haz es barrido simultáneamente de izquierda a derecha a velocidad constante y en sentido horizontal. Al final del barrido, vuelve rápidamente a la izquierda y se le hace pasar otra vez de un lado a otro. Este barrido requiere que el potencial aplicado a las placas horizontales tenga la forma de la onda en diente de sierra que aparece en la Fig. 17.21. Este potencial de barrido es proporcionado por los circuitos electrónicos del osciloscopio y existen controles para variar la frecuencia de barrido. Cuando está en funcionamiento, la frecuencia de barrido se ajusta para igualar la frecuencia con la que llegan los pulsos a las placas verticales. Entonces, con cada barrido horizontal, se pone de manifiesto un nuevo pulso en la misma posición que el anterior, el cual produce una imagen estacionaria de un pulso único. La Fig. 17.22 muestra el potencial de acción (Apart. 18.5) del axón gigante de un calamar, como aparece en la pantalla de un osciloscopio. El funcionamiento de un osciloscopio se describe con mayor detalle en el Apart. 20.2.

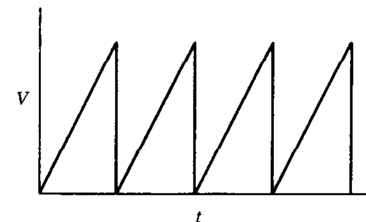


FIGURA 17.21
Variación temporal del potencial de barrido aplicado a las placas deflectoras horizontales de un osciloscopio.

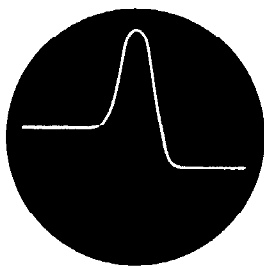


FIGURA 17.22
Potencial de acción del axón gigante de un calamar tal como aparece en un osciloscopio.

Tubo de televisión

Un tubo de televisión es muy parecido a un tubo de rayos catódicos, excepto en que el haz es desviado magnéticamente más que eléctricamente. La imagen está compuesta de 525 líneas horizontales individuales y cambia 30 veces por segundo. Esto quiere decir que el haz barre horizontalmente la pantalla $525 \times 30 = 15\,750$ veces por segundo. Mientras el haz es barrido horizontalmente, también lo hace verticalmente a una velocidad de 60 veces por segundo. Para formar una imagen hacen falta dos barridos verticales porque sólo la mitad de las líneas son exhibidas en cada barrido.* Los barridos horizontales y verticales son producidos por los circuitos electrónicos que hay en el aparato, pero están sincronizados con la señal transmitida por la emisora. Esta señal controla también la intensidad del haz electrónico y por lo tanto el brillo del punto luminoso producido cuando el haz barre la pantalla. Lo que produce una imagen determinada es la variación de la intensidad del haz que recorre la pantalla de un lado a otro.

PROBLEMAS

1. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida sobre una carga de +7 C por una carga de —3 C que se halla a 2 m de distancia? (*b*) ¿Es la fuerza atractiva o repulsiva?
Resp. (*a*) $4{,}72 \times 10^{10}$ N; (*b*) atractiva.
2. Supongamos que la carga en las esferas metálicas de una máquina de inducción (Fig. 17.9) es $+1{,}4 \times 10^{-8}$ y $-1{,}4 \times 10^{-8}$ C, respectivamente. ¿Cuál es la fuerza que ejerce una esfera sobre la otra cuando están separadas 5 cm?
3. (*a*) ¿Cuál es la masa de un grupo de protones que tienen una carga total de 1 C? (*b*) ¿Cuál es la carga total de 1 kg de protones?
Resp. (*a*) $1{,}04 \times 10^{-8}$ kg; (*b*) $0{,}96 \times 10^{8}$ C.
4. (*a*) Hallar la fuerza eléctrica entre un kilogramo de protones y un kilogramo de electrones separados por 6×10^{6} m (el radio de la tierra). (*b*) ¿Cuál es la fuerza de gravitación entre estos mismos objetos?
5. Una varilla de vidrio frotada con un trozo de tela adquiere una carga de $+3 \times 10^{-10}$ C. ¿Cuántos electrones pasaron del vidrio a la seda?
Resp. $1{,}9 \times 10^{9}$.
6. Hallar la fuerza sobre una carga de 5×10^{-8} C ejercida por una carga de 3×10^{-9} C para los siguientes valores de r: 0,5, 1,0, 2,0, 2,5 y 3,0 m. Hacer un gráfico de la fuerza en función de r y unir los puntos mediante una curva suave.
7. Hallar la fuerza (módulo y dirección) que ejerce el dipolo de la Fig. 17.23 sobre una carga de prueba $q = +10^{-10}$ C en el punto *P*.
Resp. —0,176 N.
8. Hallar la fuerza (módulo y dirección) que ejerce el dipolo de la Fig. 17.23 sobre una carga de prueba $q = +10^{-10}$ C en el punto *Q*.

*9. Hallar la fuerza (módulo y dirección) que ejerce el dipolo de la Fig. 17.23 sobre una carga de prueba $q = +10^{-10}$ C en el punto *R*. (Se necesita la suma vectorial.)
Resp. 1,8 N.

*10. Hallar la fuerza (módulo y dirección) que ejerce el dipolo de la Fig. 17.23 sobre una carga de prueba $q = +10^{-10}$ C en el punto *S*.

11. Una carga q_1 ejerce una fuerza de 100 N sobre una carga de prueba $q_2 = 2 \times 10^{-5}$ C localizada en un punto a 0,20 m de q_1. (*a*) ¿Cuál es el campo eléctrico debido a q_1 en el punto? (*b*) ¿Cuál es el módulo de q_1?
Resp. (*a*) 5×10^{6} N/C; (*b*) $2{,}2 \times 10^{-5}$ C.

* El ojo ve una sola imagen, porque el ojo retiene la imagen de una línea alrededor de 1/20 s después de que la línea ha desaparecido (persistencia de la visión). Así, pues, el ojo todavía ve la primera línea de una imagen concreta cuando la última línea se forma 1/30 s más tarde.

12. Hallar el módulo del campo eléctrico a 0,2, 0,5 y 0,8 m de una carga de 2×10^{-10} C. Hacer un dibujo a escala semejante al de la fig. 17.11 trazando flechas que representen el campo en estos puntos.
13. (*a*) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de la fuerza total sobre la carga $q_3 = +5$ C ejercida por las cargas q_1 y q_2 de la figura 17.24? (*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto *P* debido a q_1 y q_2?
Resp. (*a*) $1,06 \times 10^{11}$ N; (*b*) $2,12 \times 10^{10}$ N/C.
14. (*a*) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de la fuerza total sobre la carga $q_2 = 10$ C ejercida por las cargas q_1 y q_3 de la figura 17.24? (*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto *P* debido a q_1 y q_3?
*15. (*a*) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de la fuerza total sobre la carga $q_3 = +3$ C ejercida por las cargas q_1 y q_2 de la figura 17.25? (Hace falta la suma de vectores.) (*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto *P* debido a q_1 y q_2?
Resp. (*a*) $1,3 \times 10^{10}$ N; (*b*) $4,3 \times 10^{9}$ N/C.
*16. (*a*) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de la fuerza total sobre la carga $q_2 = -8$ C ejercida por las cargas q_1 y q_3 de la figura 17.25? (*b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto *Q* debido a q_1 y q_3?

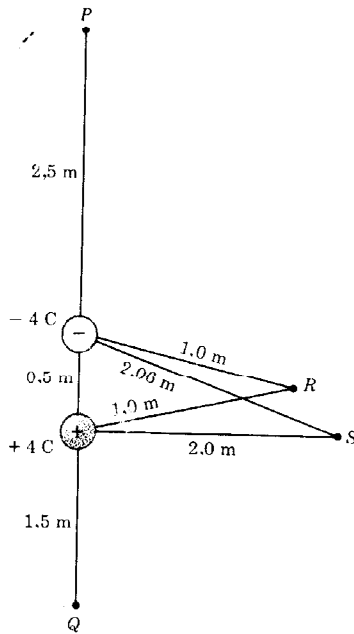


FIGURA 17.23. Problemas 7 al 10, 21 y 22.

17. (*a*) ¿Cuál es el potencial a una distancia de 3 m de la carga $q_1 = 15 \times 10^{-6}$ C? (*b*) Una carga $q = +3$ C se halla originalmente a 3 m de q_1. ¿Cuánto trabajo realiza sobre *q* el campo eléctrico cuando se desplaza esta carga hasta un punto situado a 5 m de distancia de q_1?
Resp. (*a*) $4,5 \times 10^{4}$ V; (*b*) $5,4 \times 10^{4}$ J.
18. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial de un electrón que se halla a 20 cm de una carga de 6×10^{-8} C? (*b*) ¿Cuánto trabajo hace falta para llevar al electrón muy lejos de la carga?
19. La energía potencial *U* de un protón es 3×10^{-18} J en un punto concreto. ¿Cuál es el potencial eléctrico *V* en este punto?
Resp. 18,75 V.



FIGURA 17.24. Problemas 13, 14, y 23.

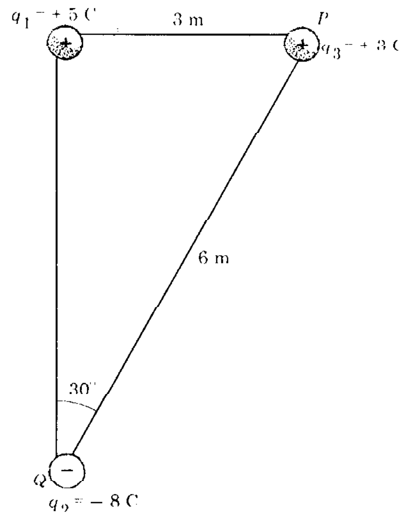


FIGURA 17.25. Problemas 15, 16, y 24.

20. Demostrar que la unidad de intensidad del campo eléctrico es igual a volts por metro.
21. (*a*) Hallar los potenciales en los puntos *P*, *Q*, *R*, y *S* de la Fig. 17.23. (*b*) ¿Cuánto trabajo se necesita para desplazar una carga de $7,5 \times 10^{-7}$ C desde el punto *P* al punto *Q*?
Resp. (*a*) $-2,4 \times 10^{9}$, $+6,0 \times 10^{9}$, 0, y $+0,52 \times 10^{9}$ V; (*b*) 6300 J.

* 22. Hallar varios puntos en la fig. 17.23 en los que el potencial es $-4{,}0 \times 10^9$ V.

23. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial de la carga $q_3 = +5$ C de la fig. 17.24? (*b*) ¿Cuál es el potencial en el punto *P* debido a q_1 y q_2?
Resp. (*a*) $3{,}75 \times 10^{11}$ J; (*b*) $7{,}5 \times 10^{10}$ V.

24. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial de la carga $q_3 = +3$ C de la fig. 17.25? (*b*) ¿Cuál es el potencial en el punto *P* debido a q_1 y q_2?

25. El núcleo de uranio tiene un radio de 8×10^{-15} m y contiene 92 protones. (*a*) ¿Cuál es el potencial en un punto *P* justo en la parte exterior del núcleo? (*b*) Un protón originalmente en reposo en *P* es repelido por la carga positiva del núcleo. ¿Cuál es la velocidad del protón cuando está muy alejado del núcleo?
Resp. (*a*) $1{,}65 \times 10^7$ V; (*b*) $5{,}62 \times 10^7$ m/s.

26. El ánodo de un tubo de rayos X se mantiene a un potencial de 12 000 V con respecto al cátodo. ¿Cuál es la velocidad de los electrones cuando tocan al ánodo?

Corriente Capítulo 18

Una corriente es un flujo de carga. Cuando una carga positiva se mueve desde una región de potencial alto a otra de bajo potencial, su energía potencial se transforma en otras formas de energía. Por ejemplo, en una resistencia de calefacción la energía potencial de la carga en movimiento se transforma en calor, en una bombilla se transforma en luz (y calor) y en un motor se transforma en energía mecánica (la energía cinética del rotor). Una corriente pulsada y modulada se puede utilizar en las comunicaciones, como en el caso del telégrafo y la televisión, y en control, como en las computadoras. De hecho, todos los aparatos eléctricos y electrónicos utilizan corrientes de un modo u otro.
También utilizan corriente los sistemas biológicos. La anguila eléctrica crea una gran corriente para defenderse y ciertos peces navegan por medio de pequeñas corrientes que crean en el agua que les rodea. Y lo que es más importante, las corrientes intervienen en el transporte de impulsos nerviosos a lo largo de una fibra nerviosa.

18.1 LEY DE OHM

La Fig. 18.1 muestra dos esferas metálicas con carga igual y opuesta apoyadas en soportes aislados. Cuando se conectan las esferas por medio de un alambre conductor, los electrones fluyen de la esfera cargada negativamente a través del alambre y pasan a la esfera cargada positivamente. Durante este proceso hay un flujo de carga, o *corriente*, en el alambre. Específicamente, la intensidad de la corriente I en el alambre es la carga que pasa por segundo por el alambre. La unidad de intensidad es el coulomb por segundo (C/s), y se llama *ampere* (A):

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$$

La corriente existe en el alambre hasta que las esferas están completamente descargadas, y esto tiene una duración de aproximadamente un microsegundo (1 μs $= 10^{-6}$ s). Así, si la carga inicial sobre las esferas es $q = 10^{-8}$ C y la corriente persiste durante el tiempo $t = 10^{-6}$ s, la intensidad media I durante este tiempo es

$$I = \frac{q}{t} = \frac{10^{-8}\text{ C}}{10^{-6}\text{ s}}$$
$$= 10^{-2}\text{ C/s} = 10^{-2}\text{ A}$$

El alambre mismo permanece descargado, aun cuando en él haya corriente, porque entran en él tantos electrones de la esfera negativa como salen de él hacia la esfera positiva. No hay acumulación de carga en el alambre.

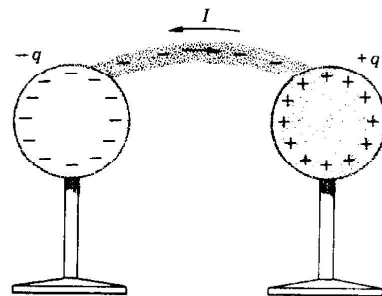


FIGURA 18.1
Dos esferas metálicas con carga igual y opuesta. Los electrones pasan de la esfera negativa a la positiva cuando las esferas están conectadas por un alambre.

OBSERVACIÓN. Se ha convenido en que la dirección de una corriente se defina como la dirección en la que fluiría una carga positiva. Como las cargas que se mueven en un metal resulta que son electrones cargados negativamente, la corriente convencional en un alambre está dirigida en sentido contrario al flujo real de carga. Sin embargo, esto no produce ningún problema porque un flujo de carga negativa en una dirección equivale a un flujo de carga positiva en dirección opuesta. Así, podemos evitar los signos menos innecesarios pensando que una corriente consiste en una carga positiva que fluye en una dirección aunque de hecho consista en una carga negativa que fluye en la dirección opuesta.

La corriente de la Fig. 18.1 está dirigida desde la esfera positiva (de alto potencial) a la negativa (de potencial bajo) y sólo dura hasta que la diferencia de potencial entre las esferas se anula. Sin embargo, se puede mantener una corriente permanente entre las dos esferas si hubiese un mecanismo para devolver la carga positiva a la esfera positiva tan rápidamente como fluye a la esfera negativa. Un mecanismo que haga esto recibe el nombre de *generador de fem.** Por ejemplo, la máquina de inducción que aparece en la Fig. 17.9 (Apart. 17.2) es un generador de fem que utiliza la energía mecánica para separar la carga positiva y negativa. Esta energía mecánica es proporcionada por el trabajo realizado al girar la rueda y se transforma en energía potencial de las cargas sobre las esferas metálicas. Cuando se conectan las esferas por medio de un alambre, la carga pasa por el alambre y la energía potencial se transforma en calor y en otras formas de energía. Una corriente permanente puede mantenerse en el alambre dando vueltas continuamente a la rueda.

OBSERVACIÓN. Cuando la diferencia de potencial entre las esferas es suficientemente grande (20 000 V o más), el aire que hay entre ellas se ioniza y puede conducir una corriente. Esa corriente es visible en forma de una chispa. Se puede mantener un chisporroteo continuo entre las esferas dando vueltas continuamente a la rueda de la máquina de inducción. Esto demuestra la conversión de energía mecánica en energía potencial y de energía potencial en calor y luz. Una central eléctrica convierte, del mismo modo, la energía mecánica de la turbina del generador en energía eléctrica. El proceso, sin embargo, utiliza el principio de la inducción magnética (Apart. 19.4) más que la inducción eléctrica.

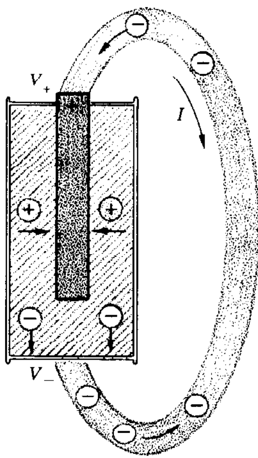


FIGURA 18.2
Dentro de una batería se utiliza energía química para desplazar la carga positiva al borne positivo y la carga negativa al borne negativo.

Una batería es un generador de fem que utiliza energía química para mantener una diferencia de potencial entre sus dos bornes. Cuando los bornes no están conectados se mantiene entre ellos una diferencia de potencial $\mathcal{E}$, llamada la fem de la batería. La fem de la batería de un flash es 1,5 V, o sea, que el borne positivo está a 1,5 V por encima del borne negativo. Cuando no hay corriente no se gasta energía, pero cuando están conectados los bornes por un hilo conductor, la carga pasa por el alambre para igualar la diferencia de potencial. Entonces la batería gasta energía química para separar las cargas tan pronto como se combinan. Esto se puede ver en la Fig. 18.2, la cual muestra que dentro de la batería, la carga positiva se desplaza hacia el borne positivo. La energía química se necesita para desplazar la carga contra la fuerza eléctrica repulsiva. (Si la corriente es grande, la diferencia de potencial V entre los bornes puede ser menor que $\mathcal{E}$. Sin embargo, despreciaremos aquí esta posibilidad.)

La energía que gasta la batería es descargada en el circuito externo. Así, supongamos que una intensidad I se mantiene en el circuito de la Fig. 18.2 En un tiempo t, la cantidad de carga positiva que pasa del

* Fem es una abreviatura de *fuerza electromotriz.*

borne positivo al negativo es

$$q = It \qquad 18.1$$

El trabajo realizado sobre esta carga al moverla por el alambre es igual a la variación de su energía potencial. Por las Ecs. 17.6 y 17.10 tenemos

$$W = U_+ - U_- = qV_+ - qV_- = q(V_+ - V_-) = qV$$

en donde $V = V_+ - V_-$ es la diferencia de potencial entre los bornes. El trabajo realizado por segundo, o potencia P, es

$$P = \frac{W}{t} = \frac{qV}{t} = IV \qquad 18.2$$

Ejemplo 1. ¿Cuál es la potencia desarrollada por una batería de 1,5 V que produce una corriente de 0,2 A?
La diferencia de potencial V es precisamente la fem de la batería, y por lo tanto obtenemos, a partir de la ecuación 18.2

$$P = I\mathcal{E} = 0{,}2 \text{ A} \times 1{,}5 \text{ V} = 0{,}3 \text{ A·V}$$

Pero 1 A = 1 C/s y 1 V = 1 J/C, por lo tanto

$$1 \text{ A·V} = (1 \text{ C/s})(1 \text{ J/C}) = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$$

O sea, que el producto de la diferencia de potencial en volts y la intensidad de la corriente en amperes es igual a la potencia en watts. Por lo tanto, la potencia entregada al circuito externo es

$$P = 0{,}3 \text{ A·V} = 0{,}3 \text{ W}$$

Esta potencia es suministrada a expensas de la energía química interna de la batería.

OBSERVACIÓN. El sistema SI ha sido adoptado sobre todo porque proporciona una relación simple entre las unidades eléctricas comunes (volts y amperes) y las unidades mecánicas de energía y potencia (joules y watts).

La intensidad I en un alambre depende de la diferencia de potencial V entre sus extremos. Para la mayoría de los metales I es proporcional a V y por lo tanto, la relación entre I y V se puede expresar

$$I = \frac{V}{R} \qquad 18.3$$

o también

$$V = RI \qquad 18.4$$

Ésta es la *ley de Ohm*. La constante de proporcionalidad R recibe el nombre de *resistencia* y su unidad es el volt por ampere (V/A), llamado *ohm* (Ω):

$$1\ \Omega = 1 \text{ V/A}$$

La ley de Ohm es válida sólo para ciertos materiales, sobre todo metales. Tiene gran importancia, no obstante, porque se aplica a los materiales usados corrientemente en circuitos eléctricos.
La resistencia de un conductor a un flujo de carga tiene su origen en las frecuentes colisiones que efectúan los electrones en movimiento con los átomos fijos. Cuando una diferencia de potencial es aplicada a lo largo de un alambre, se establece un campo eléctrico que ejerce una fuerza

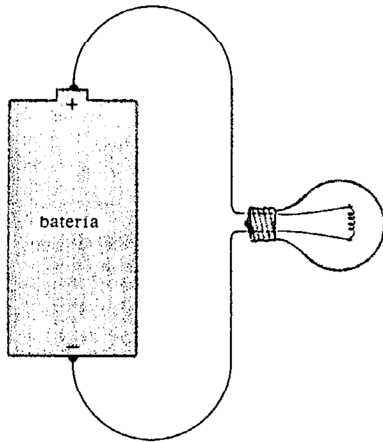


FIGURA 18.3
Una batería conectada a una bombilla.

sobre cada electrón del alambre. Esta fuerza imprime una aceleración a un electrón libre y aumenta su energía cinética hasta que choca con un átomo estacionario. En la colisión, el exceso de energía cinética del electrón se transforma en energía vibratoria del átomo. Después de la colisión, el electrón es de nuevo acelerado por el campo hasta que choca otra vez con un átomo. En cada colisión el electrón pierde la energía cinética que adquirió desde la anterior colisión. Así, cuando el electrón se mueve por el alambre en arrancadas y paradas, su energía eléctrica se transforma en energía térmica.

OBSERVACIÓN. La Ec. 18.3 es análoga a la Ec. 7.16 para el flujo de un fluido por una cañería. El flujo Q es la análoga de la intensidad I, la diferencia de presión $p_2 - p_1$ es el análogo de la diferencia de potencial V, y la resistencia al fluido de una cañería (Ec. 7.17) es la análoga de la resistencia eléctrica de un alambre. La resistencia eléctrica de un alambre está relacionada con la longitud L y el radio r del alambre por

$$R = \frac{\rho L}{\pi r^2} \qquad 18.5$$

en la que ρ es una constante, llamada *resistividad*, que es característica del metal de que está hecho el alambre. Esta ecuación es semejante a la Ec. 7.17 para la resistencia al fluido, excepto en que la resistencia eléctrica es proporcional a $1/r^2$, mientras que la resistencia al fluido es proporcional a $1/r^4$. Pero, igual que lo que pasa en una cañería, la resistencia de un alambre aumenta si aumenta la longitud y disminuye si aumenta el radio.
Se puede llevar muy lejos la analogía entre la corriente eléctrica y el flujo de un fluido. Por ejemplo, una bomba para fluido es la análoga de un generador de fem. Una bomba utiliza una fuente exterior de energía para crear una diferencia de presión entre sus aberturas de entrada y salida. Cuando están conectadas estas aberturas por una cañería, el fluido sale del lado de presión elevada, a través de la tubería, hacia el lado de presión baja. La bomba gasta energía por elevar la presión del fluido que circula.

La Fig. 18.3 muestra una batería conectada a una bombilla. La resistencia de los alambres de conexión es muy pequeña y se puede despreciar. Toda la resistencia R del circuito procede del filamento extremadamente delgado de la bombilla. Este circuito se representa esquemáticamente en la Fig. 18.4. El símbolo −|ǀ|ǀ+ representa una batería, siendo la línea vertical larga el borne positivo (alto potencial). El símbolo -\/\/\/- representa una *resistencia* eléctrica, o sea, un elemento del circuito, como la bombilla, que tiene una resistencia finita R. Las líneas continuas representan alambres sin resistencia. La corriente I se dirige desde el borne positivo al negativo por el circuito externo porque ésta es la dirección en la que fluiría la carga positiva.

La Ec. 18.4 se puede utilizar para calcular la diferencia de potencial entre varios puntos del circuito. La diferencia de potencial entre los puntos a y b es

$$V_b - V_a = 0$$

porque la resistencia entre a y b es cero. Del mismo modo, la diferencia de potencial entre c y d es

$$V_d - V_c = 0$$

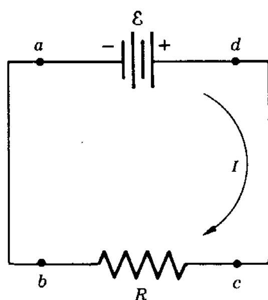


FIGURA 18.4
Diagrama esquemático de un circuito consistente en una batería conectada a una resistencia (bombilla).

La diferencia de potencial entre b y c, sin embargo, es

$$V_c - V_b = RI$$

Si sumamos todas estas ecuaciones, tenemos

$$(V_b - V_a) + (V_d - V_c) + (V_c - V_b) = RI$$

o sea

$$V_d - V_a = RI$$

Pero $V_d - V_a$, que es la diferencia de potencial entre d y a, es la fem $\mathcal{E}$ de la batería. Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{E} = RI \qquad 18.6$$

En otras palabras, la diferencia de potencial a través de la resistencia es igual a la fem de la batería.
De acuerdo con la Ec. 18.2, se pierde energía en la resistencia en la proporción

$$P = VI \qquad 18.7$$

Si V es reemplazada por RI (Ec. 18.4), la ecuación precedente se puede escribir

$$P = RI^2 \qquad 18.8$$

Por otro lado, si I es reemplazada por V/R (Ec. 18.3), la potencia también se puede expresar

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad 18.9$$

Las tres expresiones para la potencia son de utilidad. Sin embargo, sólo hace falta recordar una expresión, porque las otras dos se deducen fácilmente de ella utilizando la ley de Ohm.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la disipación de potencia en una bombilla de 4 Ω conectada a una batería de 12 V? ¿Cuál es la disipación de potencia en una bombilla de 2 Ω conectada a la misma batería? ¿Qué bombilla es más brillante?
Utilizando la Ec. 18.8, se podría decir que se disipa más potencia en la bombilla de mayor resistencia; sin embargo, esto no es cierto porque cuanto mayor es la resistencia, menor es la intensidad de la corriente. Por la Ec. 18.3 vemos que la intensidad en la bombilla de 4 Ω es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega} = 3\ \text{A}$$

y por lo tanto, de acuerdo con la Ec. 18.8 , la potencia es

$$P = RI^2 = 4\ \Omega \times (3\ \text{A})^2 = 36\ \text{W}$$

La intensidad en la bombilla de 2 Ω es

$$I = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega} = 6\ \text{A}$$

y la potencia es

$$P = 2\ \Omega \times (6\ \text{A})^2 = 72\ \text{W}$$

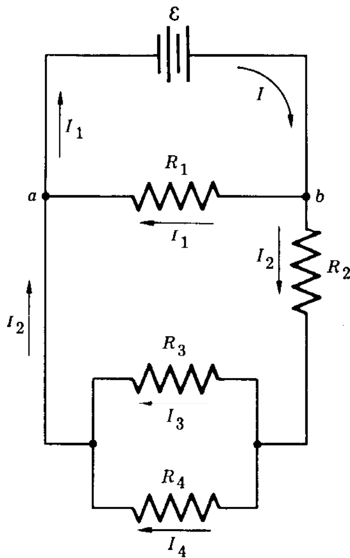


FIGURA 18.5
Red compleja de circuitos.

Como el potencial es el mismo en ambos casos, se obtienen los mismos resultados más directamente utilizando la Ec. 18.9 Para la bombilla de 4 Ω tenemos

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(12\ \text{V})^2}{4\ \Omega} = 36\ \text{W}$$

y para la de 2 Ω tenemos

$$P = \frac{(12\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 72\ \Omega$$

Como el brillo de una bombilla aumenta con la potencia, la bombilla de 2 Ω es más brillante que la de 4 Ω.

18.2 REDES DE CIRCUITOS

Los circuitos consisten a menudo en una red de resistencias interconectadas, como la que aparece en la Fig. 18.5 El problema básico de la teoría de circuitos es hallar la intensidad de la corriente en cada rama del circuito, cuando se conocen los valores de las resistencias. El análisis de ésta o de cualquier otra red utiliza solamente dos principios, conocidos como *leyes de Kirchhoff*.

Primera ley de Kirchhoff. *La intensidad total de la corriente que entra en un punto cualquiera del circuito es igual a la intensidad que sale del punto.* Esta ley es una consecuencia del hecho de que no se acumula carga en un punto de un circuito, de modo que sale de él tanta carga como ha entrado. Esto significa, por ejemplo, que la corriente I que entra en el punto b de la Fig. 18.5 es igual a la suma de $I_1 + I_2$ de las corrientes que salen de b.

Segunda ley de Kirchhoff. *La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito es la misma a lo largo de cualquier camino que conecte los puntos.* Esto quiere decir, por ejemplo, que la diferencia de potencial entre los puntos a y b de la Fig. 18.5 es la misma a lo largo del camino que pasa por R_1 que a lo largo del camino que pasa por R_2 y R_3.

Estos principios pueden utilizarse para hallar la intensidad de la corriente en el circuito de la Fig. 18.6 que tiene dos resistencias conectadas en *serie*. Por la primera ley de Kirchhoff, la intensidad I que entra en el punto c procedente de R_1 es igual a la intensidad que sale del punto c y pasa por R_2. De hecho, la intensidad I es la misma en cualquier punto del circuito porque sólo hay un camino a través de cada punto. La diferencia de potencial entre los puntos a y e a lo largo del camino *abcde* se puede calcular por la ley de Ohm (Ec. 18.4). La diferencia de potencial entre los puntos a y b es

$$V_b - V_a = 0$$

porque la resistencia entre a y b es cero. Del mismo modo, la diferencia de potencial entre d y e es

$$V_e - V_d = 0$$

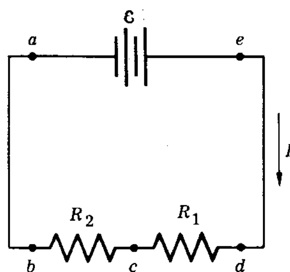


FIGURA 18.6
Dos resistencias conectadas en serie a una batería.

La caída de potencial a través de la resistencia R_2 es

$$V_c - V_b = R_2 I$$

y a través de R_1 es

$$V_d - V_c = R_1 I$$

Si sumamos estas cuatro ecuaciones, tenemos

$$(V_b - V_a) + (V_e - V_d) + (V_c - V_b) + (V_d - V_c) = R_1 I + R_2 I$$

o sea
$$V_e - V_a = (R_1 + R_2)I$$

que es la diferencia de potencial entre e y a a lo largo del camino *abcde*. Por la segunda ley de Kirchhoff, esto es igual a la diferencia de potencial entre e y a a lo largo del camino que pasa por la batería, que es la fem de la batería. Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{E} = (R_1 + R_2)I$$

y así, la intensidad en el circuito es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$

Comparando esta expresión con la Ec. 18.6, vemos que las dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en serie actúan como una sola resistencia cuyo valor es

$$R = R_1 + R_2 \qquad \text{serie} \qquad 18.10$$

Ejemplo 1. Consideremos una batería con $\mathcal{E} = 12$ V conectada en serie a dos bombillas cuyas resistencias son $R_1 = 2\ \Omega$ y $R_2 = 4\ \Omega$. ¿Cuál es la intensidad de corriente en el circuito y la potencia disipada en cada bombilla?
A partir de la Ec. 18.10 la resistencia del circuito es

$$R = R_1 + R_2 = 2\ \Omega + 4\ \Omega = 6\ \Omega$$

Por la Ec. 18.6 la intensidad de la corriente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\ \text{V}}{6\ \Omega} = 2\text{A}$$

La caída de potencial en R_1 es

$$V_1 = R_1 I = (2\ \Omega)(2\ \text{A}) = 4\ \text{V}$$

y la caída de potencial en R_2 es

$$V_2 = R_2 I = (4\ \Omega)(2\ \text{A}) = 8\ \text{V}$$

La suma de las caídas de potencial en las dos resistencias es igual a la fem de la batería. La potencia disipada en las resistencias se halla utilizando la Ec. 18.8:

$$P_1 = R_1 I^2 = (2\ \Omega)(2\ \text{A})^2 = 8\ \text{W}$$
$$P_2 = R_2 I^2 = (4\ \Omega)(2\ \text{A}^2) = 16\ \text{W}$$

En este ejemplo se disipa más potencia en la resistencia grande porque la intensidad es la misma en las dos resistencias. En el ejemplo 2 del Apart. 18.1 se disipaba más potencia en la resistencia pequeña porque la diferencia de potencial en los extremos de las resistencias era la misma.

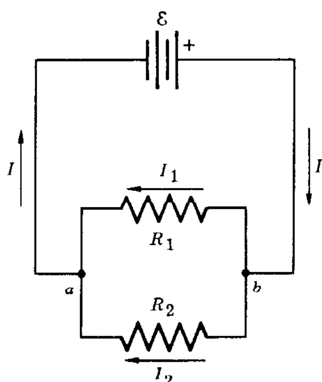


FIGURA 18.7
Dos resistencias conectadas en paralelo a una batería.

La Fig. 18.7 muestra dos resistencias conectadas en *paralelo* a una batería. Comparemos esto con el circuito en serie de la Fig. 18.6. En el circuito en serie toda la corriente pasa por R_1 y R_2, mientras que en el circuito en paralelo la corriente se divide, pasando parte por R_1 y parte por R_2. Como la conexión en paralelo proporciona dos caminos entre los puntos *a* y *b*, la resistencia total entre estos puntos es menor que lo que sería si en el circuito hubiese una sola resistencia. Supongamos que I es la intensidad de la corriente que pasa por la batería y que I_1 e I_2 son las intensidades en R_1 y R_2, respectivamente. La corriente que entra en el punto *b* es I y las corrientes que salen del punto *b* son I_1 e I_2. Por lo tanto, según la primera ley de Kirchhoff tenemos que

$$I = I_1 + I_2 \qquad 18.11$$

Las caídas de potencial a través de R_1 y R_2 son iguales porque cada resistencia es un camino entre los puntos *a* y *b*. Esta diferencia de potencial es también igual a la fem de la batería porque la batería es otro camino entre estos puntos. En consecuencia, tenemos

$$V_b - V_a = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \mathcal{E}$$

y por lo tanto, las intensidades en las resistencias son

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \qquad \text{y} \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

De acuerdo con la Ec. 18.11 la intensidad que pasa por la batería es

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 &= \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} \\ &= \mathcal{E}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ &= \frac{\mathcal{E}}{R} \end{aligned}$$

O sea, dos resistencias conectadas en paralelo actúan como una sola resistencia R, dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{paralelo} \qquad 18.12$$

El valor de R es siempre menor que R_1 o R_2.

Ejemplo 2. Dos bombillas cuyas resistencias son $R_1 = 2\ \Omega$ y $R_2 = 4\ \Omega$ se conectan en paralelo a una batería de 12 V. ¿Cuánto valen la resistencia total del circuito y la intensidad que pasa por cada resistencia?

Según la ecuación 18.12 la resistencia total del circuito viene dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega} = \frac{3}{4}\ \Omega^{-1}$$

o sea

$$R = \frac{4}{3}\ \Omega$$

y por lo tanto, la intensidad que pasa por la batería es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\ \text{V}}{4/3\ \Omega} = 9\ \text{A}$$

Esto hay que compararlo con el valor de 2 A que se obtuvo cuando las resistencias fueron conectadas en serie. Las intensidades en las resistencias individuales son

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega} = 6\ \text{A}$$

y

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega} = 3\ \text{A}$$

La corriente total de 9 A se divide entre las dos resistencias, correspondiendo la intensidad mayor a la resistencia más pequeña.

OBSERVACIÓN. Las reglas para sumar resistencias en serie y paralelo se aplican también a la resistencia de fluidos. El sistema circulatorio del cuerpo es una red compleja de vasos en serie y paralelo, y los métodos utilizados para analizar los circuitos eléctricos son aplicables a los problemas de flujo de fluidos en el cuerpo. Por ejemplo, la Fig. 18.8 muestra dos vasos sanguíneos de resistencias R_1 y R_2 conectados en paralelo. Supongamos que $p = p_b - p_a$ es la diferencia de presión entre los puntos a y b. El flujo de fluido Q que pasa por los dos vasos viene dado por la Ec. 7.17.

$$Q = \frac{p}{R}$$

en donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

Así, pues, podemos escribir

$$Q = p\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \qquad 18.13$$

Supongamos que se obstruye la vena 2 de modo que no pasa sangre por ella. (Esto significa que R_2 es infinitamente grande o que $1/R_2$ es cero.) Entonces toda la sangre fluirá por la vena 1, de modo que

$$Q' = \frac{p'}{R_1} \qquad 18.14$$

Para mantener el mismo flujo de fluido, debe crecer la presión p' de la vena. O sea que el cuerpo intenta hacer $Q' = Q$ aumentando la presión. El aumento necesario de presión se halla haciendo Q' igual a Q en la Ec. 18.14 y despejando p':

$$p' = R_1 Q$$

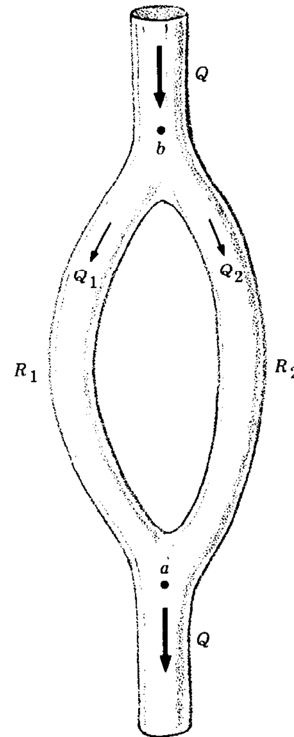


FIGURA 18.8
Dos vasos sanguíneos conectados en paralelo.

Sustituyendo el valor de Q dado por la Ec. 18.13, tenemos

$$p' = p\frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

Por ejemplo, si R_2 era originalmente igual a R_1, la presión p' debe igualar a $2p$ para mantener el mismo flujo una vez que la vena 2 queda obstruida. ¿Cuál es el equivalente del generador de fem del sistema circulatorio?

Ejemplo 3. Hallar las intensidades I, I_1, I_2, I_3, e I_4 del circuito de la Fig. 18.5 cuando las resistencias valen

$$R_1 = 15\ \Omega; \quad R_2 = 8\ \Omega; \quad R_3 = 3\ \Omega; \quad R_4 = 6\ \Omega$$

y la fem de la batería es de 3 V.
La intensidad en las distintas partes de un circuito complicado se calcula utilizando repetidamente las Ecs. 18.10 y 18.12. Las resistencias R_3 y R_4 están conectadas en paralelo, por lo que son equivalentes a una única resistencia R' dada por

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega}$$

o sea

$$R' = 2\ \Omega$$

La resistencia R' está en serie con R_2, por lo tanto la resistencia efectiva de R' y R_2 juntas es

$$R'' = R_2 + R' = 8\ \Omega + 2\ \Omega = 10\ \Omega$$

El circuito está dibujado de nuevo en la Fig. 18.9, en el que R'' reemplaza a R_2, R_3 y R_4. Esto muestra que R_1 y R'' están en paralelo y, por lo tanto, la resistencia total R de todo el circuito es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{15\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega}$$

o sea

$$R = 6\ \Omega$$

Si la fem de la batería es 3,0 V, la intensidad I es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0{,}5\ \text{A}$$

$I = \frac{3,0}{6}$?

La diferencia de potencial en los extremos de R_1 y R'' es también 3,0 V, de modo que las intensidades I_1 e I_2 son

$$I_1 = \frac{3{,}0\ \text{V}}{R_1} = \frac{3{,}0\ \text{V}}{15\ \Omega} = 0{,}2\ \text{A}$$

e

$$I_2 = \frac{3{,}0\ \text{V}}{R''} = \frac{3{,}0\ \text{V}}{10\ \Omega} = 0{,}3\ \text{A}$$

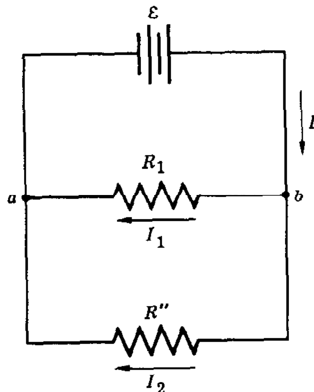


FIGURA 18.9
El mismo circuito de la Fig. 18.5 reconstruido con R_2, R_3 y R_4 sustituidos por la resistencia equivalente R''.

Obsérvese que $I_1 + I_2 = I$, de acuerdo con la primera ley de Kirchhoff. La diferencia de potencial entre los puntos a y b se puede expresar (ver la Fig. 18.5)

$$V_b - V_a = 3{,}0\ \text{V} = I_2R_2 + I_3R_3$$
$$= 0{,}3\ \text{A} \times 8\ \Omega + I_3 \times 3\ \Omega$$

Despejando I_3 obtenemos

$$I_3 \times 3\ \Omega = 3{,}0\ \text{V} - 2{,}4\ \text{V} = 0{,}6\ \text{V}$$

de modo que

$$I_3 = \frac{0{,}6\ \text{V}}{3\ \Omega} = 0{,}2\ \text{A}$$

Finalmente, de acuerdo con la condición $I_2 = I_3 + I_4$, la intensidad en R_4 resulta ser

$$I_4 = I_2 - I_3 = 0{,}3\ \text{A} - 0{,}2\ \text{A} = 0{,}1\ \text{A}$$

Esto demuestra cómo por medio de un análisis sistemático del circuito se pueden hallar las intensidades en todas las resistencias del mismo.

18.3. CORRIENTE ALTERNA

Una batería mantiene una diferencia de potencial constante entre sus bornes. Cuando estos bornes están conectados a una resistencia, se produce una corriente permanente que va a través de la resistencia desde el borne de alto potencial al de bajo potencial. Como la dirección de la corriente es constante, se dice que es una *corriente continua* (cc).

Un generador eléctrico produce un potencial oscilante entre sus bornes, tal como se ve en la Fig. 18.10. El potencial recorre un ciclo completo de oscilación en el tiempo τ, llamado *período*. La curva del potencial tiene la forma de una onda sinusoidal (Apart. 13.4) y se representa por la ecuación

$$V = V_p \operatorname{sen}\left(2\ \pi\ \frac{t}{\tau}\right) \qquad 18.15$$

en donde V_p es el potencial máximo. La intensidad de la corriente I en una resistencia colocada entre los bornes de un generador viene dada por la ley de Ohm

$$I = \frac{V}{R} = I_p \operatorname{sen}\left(2\ \pi\ \frac{t}{\tau}\right) \qquad 18.16$$

en donde

$$I_p = \frac{V_p}{R} \qquad 18.17$$

Como la corriente oscila con el tiempo, se le llama *corriente alterna* (ca).

En los Estados Unidos y Canadá, el período de toda la corriente alterna comercial es $\tau = 1/60$ s. La *frecuencia* f, que se define como $1/\tau$, es

$$f = \frac{1}{\tau} = 60\ \text{s}^{-1}$$

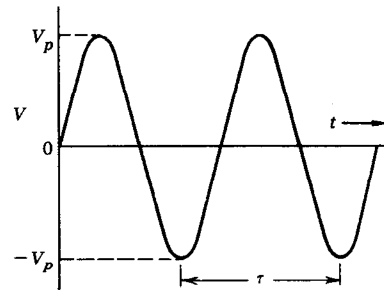


FIGURA 18.10
Variación temporal del potencial en los bornes de un generador ca.

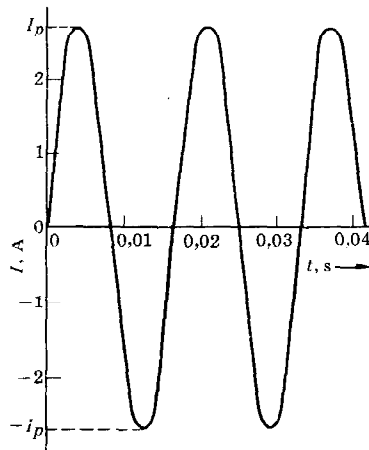


FIGURA 18.11
Variación temporal de una corriente alterna de 60 Hz en una resistencia.

La unidad de frecuencia es el hertz, de modo que

$$f = 60\ \text{s}^{-1} = 60\ \text{Hz}$$

En Europa la frecuencia de la corriente alterna es 50 Hz.
Si se coloca una resistencia de 50 Ω entre los bornes de un generador de corriente alterna cuyo potencial máximo es 170 V, la corriente en la resistencia viene dada por las Ecs. 18.16 y 18.17 con

$$I_p = \frac{V_p}{R} = \frac{170\ \text{V}}{50\ \Omega} = 3{,}4\ \text{A}$$

Esta corriente está representada gráficamente en la Fig. 18.11, suponiendo que $f = 60$ Hz. La corriente alterna el signo y también el potencial. Cuando la corriente es positiva, la carga fluye en una dirección y cuando la corriente es negativa, la carga fluye en la otra dirección. Así, pues, no hay un flujo neto de carga alrededor del circuito; por el contrario, la carga se mueve hacia atrás y adelante en la resistencia.
La potencia disipada en una resistencia todavía viene dada por las Ecs. 18.7, 18.8 y 18.9. Utilizando las Ecs. 18.8 y 18.16 obtenemos

$$\begin{aligned} P &= RI^2 = R[I_p \operatorname{sen}(2\ \pi\ ft)]^2 \\ &= RI_p^2 \operatorname{sen}^2(2\ \pi\ ft) \end{aligned}$$

Esta potencia aparece representada en la Fig. 18.12. De este modo, aunque la corriente cambia de signo, la potencia, que es proporcional al cuadrado de la intensidad, es siempre positiva. La potencia varía entre cero y RI_p^2 dos veces cada ciclo, o sea 120 veces por segundo, pero en la mayoría de los casos sólo interesa la potencia media $\bar{P}$. Se puede demostrar que

$$\bar{P} = R\overline{I^2} = \tfrac{1}{2}RI_p^2$$

en donde $\overline{I^2}$ es el valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente.

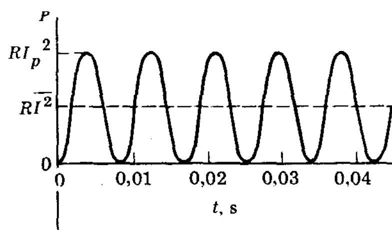


FIGURA 18.12
Variación temporal de la potencia disipada en una resistencia debida a una corriente alterna de 60 Hz.

Intensidad eficaz y tensión eficaz

Es útil definir una corriente continua I_{ef} que dé la misma disipación de potencia que la corriente alterna. O sea, I_{ef} se define por la condición †

$$RI_{ef}^2 = \bar{P} = R\overline{I^2} = \tfrac{1}{2}RI_p^2$$

de modo que

$$I_{ef}^2 = \overline{I^2} = \tfrac{1}{2}I_p^2$$

e

$$I_{ef} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{I_p}{1{,}41}$$

† La intensidad eficaz I_{ef} es la *raíz* cuadrada del valor *medio* del *cuadrado* de la intensidad I: $I_{ef} = \sqrt{\overline{I^2}}$.

La tensión continua o eficaz V_{ef} se define en función de I_{ef} por la ley de Ohm:

$$V_{ef} = RI_{ef}$$

Pero $I_{ef} = I_p/\sqrt{2}$, luego

$$V_{ef} = \frac{RI_p}{\sqrt{2}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

puesto que $RI_p = V_p$. Así, pues, una corriente alterna se puede tratar como una corriente continua de tensión

$$V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \qquad 18.18$$

e intensidad

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} \qquad 18.19$$

y de aquí que los métodos del Apart. 18.2 se puedan utilizar para analizar circuitos de corriente alterna. La importancia de I_{ef} y V_{ef} es que se pueden uilizar en las Ecs. 18.7, 18.8 y 18.9 para hallar la potencia media.

En los Estados Unidos y Canadá, la tensión eficaz de una toma de corriente es $V_{ef} = 120$ V. La tensión máxima que sale por el enchufe es

$$V_p = \sqrt{2} \times 120 \text{ V} = 170 \text{ V}$$

En Europa, la tensión eficaz es 240 V, que corresponde a una tensión máxima de 340 V.

Ejemplo. ¿Cuánto vale la resistencia de un tostador americano de 1200 W? ¿Cuál sería la disipación de potencia de dicho tostador si se conectara a un enchufe en Inglaterra?

La potencia nominal da la potencia media disipada a 120 V. Por lo tanto, utilizando la Ec. 18.9 hallamos

$$R = \frac{V_{ef}^2}{\bar{P}} = \frac{(120 \text{ V})^2}{1200 \text{ W}} = 12\ \Omega$$

Si enchufásemos este tostador en Inglaterra, la potencia disipada sería

$$\bar{P} = \frac{(240 \text{ V})^2}{12\ \Omega} = 4800 \text{ W}$$

A esta potencia, el elemento calefactor del tostador se fundiría. En general, un aparato proyectado para funcionar a una tensión no funcionará de manera conveniente a una tensión notablemente distinta.

Instalación doméstica

La energía eléctrica se distribuye desde el generador a las casas por un par de líneas de transporte de energía. Cada casa está conectada en

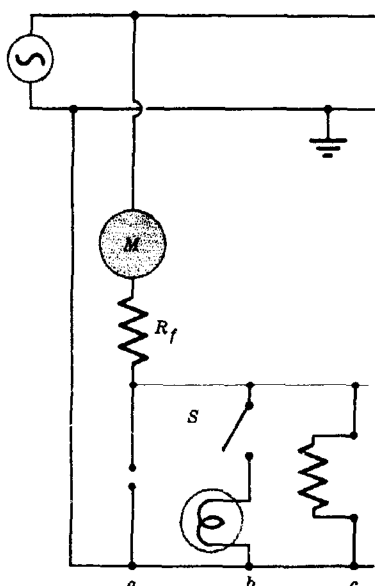


FIGURA 18.13
Conexiones eléctricas de una casa.

paralelo a estas líneas y la compañía de electricidad mantiene una tensión eficaz constante entre las líneas. Esto aparece en forma de diagrama en la Fig. 18.13, en donde el símbolo -(~)- designa un generador de ca y el símbolo -||| designa una conexión a tierra. La línea eléctrica de tierra se conecta a ésta por medio de cables enterrados en el suelo, lo cual mantiene la línea a potencial cero. El potencial de la otra línea (la que lleva corriente) oscila con respecto a la de tierra. Un fusible R_f y un contador M están colocados en serie con la línea que entra en la casa, pero todos los aparatos están conectados en paralelo. La línea *a* muestra la conexión a un enchufe de pared. Toda la tensión de 120 V se mantiene entre los terminales del enchufe, pero cuando no hay conectado ningún aparato al enchufe, no hay corriente en esta parte del circuito. La línea *b* muestra la conexión a una luz del techo controlada por un interruptor de pared S. La línea *c* es otro enchufe de pared con un aparato conectado a él.

Cuando se enchufan más aparatos en paralelo a la línea de la casa, disminuye la resistencia total a través de la línea y aumenta la corriente total I_{ef} que entra en la casa. De acuerdo con la Ec. 18.7, la potencia total que llega a la casa es

$$\bar{P} = V_{ef} I_{ef}$$

Por ejemplo, si $I_{ef} = 35$ A, la potencia es

$$\bar{P} = 120 \text{ V} \times 35 \text{ A} = 4200 \text{ W} = 4{,}2 \text{ kW}$$

en la que 1 kW = 10^3 W. Si se mantiene la potencia de 4,2 kW durante 5 h, la energía consumida es

$$E = 4{,}2 \text{ kW} \times 5 \text{ h} = 21 \text{ kWh}$$

en donde el *kilowatt-hora* (kWh) es la unidad de energía usada por la industria de energía eléctrica. Está relacionada con el joule por

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3{,}6 \times 10^6 \text{ J}$$

En 1974, la capacidad total de producción de los Estados Unidos fue de $4{,}6 \times 10^5$ MW (1 megawatt = 1MW = 10^6 W), y se produjo un total de $1{,}9 \times 10^{12}$ kWh de energía eléctrica. Lo que la industria eléctrica vende al público es energía, o sea, que la industria cobra por kilowatts-hora no por kilowatts.

El contador M de la Fig. 18.13 es un pequeño elemento que da vueltas a una velocidad proporcional a la corriente y registra, a efectos de facturación, la energía total consumida. El fusible R_f consiste en una resistencia metálica especial que se funde cuando la corriente pasa de cierto valor, interrumpiendo de este modo la conexión entre la casa y la línea de transporte. Se produce una corriente muy grande cuando hay aplicados demasiados aparatos a la línea *(circuito sobrecargado)* o cuando se coloca accidentalmente una pequeña resistencia a través de los terminales de un enchufe *(cortocircuito)*. Un cortocircuito reduce la resistencia total del circuito de la casa a casi cero, produciéndose una corriente demasiado grande. Si el fusible no rompiese inmediatamente el circuito, los conductores de las paredes se podrían calentar tanto como para dar lugar a un incendio.

Seguridad eléctrica

Como un lado de una toma de corriente está unido a tierra, un circuito queda cerrado cuando el otro lado (el que lleva corriente o lado activo) se conecta directamente a tierra. Esto sucede, por ejemplo, si el conductor activo está conectado a una cañería de agua o a una cañería de desagüe con un buen contacto eléctrico a tierra. Así, una persona puede quedar electrocutada tocando simultáneamente una cañería de agua y el terminal activo de una toma de corriente. También se puede recibir un shock con sólo tocar el terminal activo de un enchufe si se está de pie sobre un suelo mojado o sobre el piso de un sótano húmedo, ya que el agua es un conductor bastante bueno.

Si una persona está en buen contacto con el suelo cuando toca el enchufe, la única resistencia del circuito es la de su cuerpo. La piel seca es un buen aislante, cuya resistencia es de 10^6 Ω o más, pero la piel húmeda es un buen conductor. Así, si se hace contacto con una mano mojada, la resistencia de la piel queda cortocircuitada y la única resistencia que queda es la del cuerpo como un todo, que vale solamente unos 10^3 Ω. Por lo tanto, haciendo un buen contacto con un enchufe de 120 V, la corriente en el cuerpo es

$$I_{ef} = \frac{120\ \text{V}}{1000\ \Omega} = 0{,}12\ \text{A} = 120\ \text{mA}$$

en donde 1 miliampere = 1 mA = 10^{-3} A.

El 75 % de la población percibe una corriente de 1,0 mA a 60 Hz como un pequeño hormigueo. Una corriente mayor empieza a romper el propio sistema eléctrico del cuerpo, interfiriendo la transmisión de los impulsos nerviosos. Una corriente de 10 mA es lo suficientemente grande como para paralizar la mano que sujeta el hilo eléctrico, impidiendo escapar a la persona. Una corriente de 120 mA (a 60 Hz), si dura más de unos pocos segundos, es suficiente para producir fibrilación ventricular (o sea, una contracción nerviosa de parte del músculo cardíaco que impide las contracciones coordinadas del corazón).

Una persona puede quedar electrocutada por tocar un aparato eléctrico en el que un conductor activo se ha soltado accidentalmente, porque ahora hay un circuito completo desde el terminal activo del enchufe pasando por el aparato y el cuerpo de la persona hasta tierra. Para evitar esto, todos los aparatos modernos tienen un tercer hilo que conecta el cuerpo del aparato a las cañerías del agua de la casa. Si se suelta un hilo, se produce inmediatamente un cortocircuito a través del tercer hilo y el fusible interrumpirá el circuito.

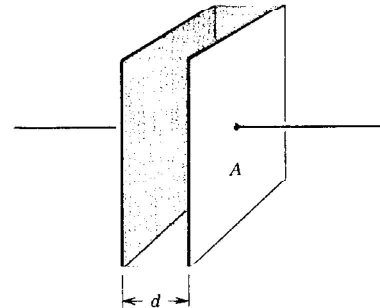


FIGURA 18.14
Condensador.

18.4. CONDENSADORES

Una resistencia es solamente uno de los muchos elementos que se utilizan en los circuitos eléctricos. Otro elemento importante es el *condensador*, que consta de dos superficies conductoras separadas por una delgada lámina aislante (Fig. 18.14). Los hilos unidos a las superficies permiten que el condensador sea conectado en un circuito eléctrico. La Fig. 18.15 es un diagrama de un circuito en el que un condensador, simbolizado por ⊣⊢ está conectado en serie a una resistencia R y una batería $\mathcal{E}$. Como hay aislamiento entre las placas del condensador, la carga no puede fluir por este elemento y, por lo tanto, no se puede establecer una corriente continua a través de un condensador. Sin embargo, cuando el interruptor S está cerrado, habrá una *corriente*

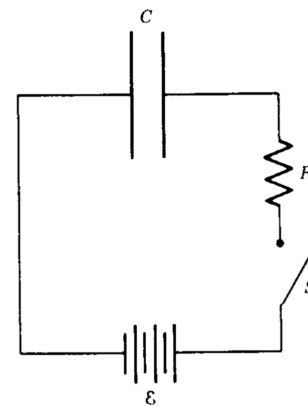


FIGURA 18.15
Condensador conectado en serie a una batería y a una resistencia.

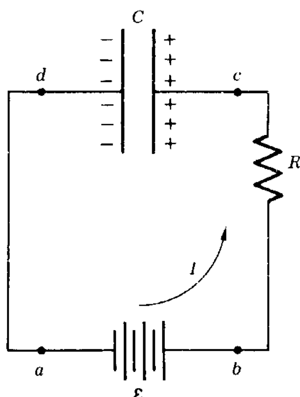


FIGURA 18.16
La corriente transitoria existe en un circuito de condensadores hasta que el potencial entre las placas del condensador es igual a la fem de la batería.

transitoria a través de la resistencia puesto que los electrones fluyen de una placa del condensador a la otra (Fig. 18.16). En consecuencia, la carga positiva q se acumulará sobre una placa, mientras que una cantidad igual de carga negativa q se acumulará en la otra, hasta que el potencial $V = V_c - V_d$ del condensador sea igual a la fem de la batería. La corriente transitoria I es grande en el instante en el que se cierra el interruptor, pero disminuye rápidamente hasta cero cuando el condensador se ha cargado (Fig. 18.17*a*). Al mismo tiempo, el valor de la carga de cada placa del condensador aumenta desde cero hasta su valor final q_0, tal como se ve en la Fig. 18.17*b*.

En cualquier instante, la carga q del condensador es proporcional a su potencial V. Esto se puede expresar

$$q = CV \qquad 18.20$$

en donde C es una constante, llamada *capacidad*. La unidad de capacidad es coulombs por volt (C/V) y se llama *farad* (F).

El producto RC de resistencia y capacidad tiene la dimensión del tiempo. Esto se puede ver observando que RC tiene la unidad

$$\frac{V}{A}\frac{C}{V} = \frac{C}{A} = \frac{C}{C/s} = s$$

En el tiempo $\tau = RC$, la corriente transitoria de la Fig. 18.17*a* disminuye hasta el 37 % de su valor inicial, mientras que la carga del condensador (Fig. 18.17*b*) alcanza el 63 % de su valor máximo. A partir de la Ec. 18.20, el potencial del condensador es $V = q/C$, por lo tanto V también alcanza el 63 % de su valor máximo en el tiempo τ. Así,

$$\tau = RC \qquad 18.21$$

es el *tiempo característico* requerido para que un circuito con un condensador cambie su estado. Tales circuitos se pueden utilizar para producir pulsos eléctricos con una frecuencia definida.

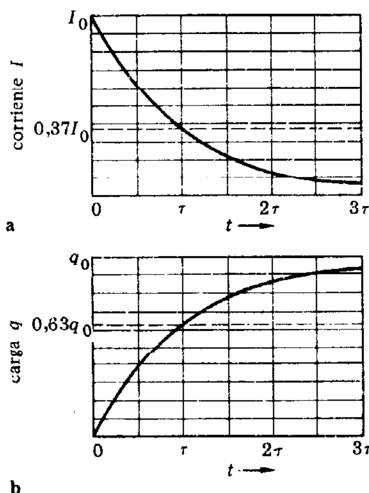


FIGURA 18.17
(*a*) Variación temporal de la corriente transitoria en un circuito de resistencia y condensador.
(*b*) Variación temporal de la carga en cada una de las placas de un condensador en un circuito de resistencia y condensador.
La unidad de tiempo sobre el eje horizontal es $\tau = RC$, que es el tiempo característico del circuito.

Ejemplo 1. Un condensador de 80 μF, inicialmente descargado, se conecta a través de una resistencia de 500 Ω a una batería de 45 V. ¿Cuál es la carga final del condensador? ¿Cuál es la carga del condensador 0,1 s después de cerrar el circuito?

Según la Ec. 18.20 la carga final del condensador es

$$q_0 = CV = (80 \times 10^{-6}\ \text{F})(45\ \text{V}) = 3{,}6 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

Según la Ec. 18.21 el tiempo característico del circuito es

$$\tau = RC = (500\ \Omega)(80 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 0{,}04\ \text{s}$$

de modo que 0,1 s es igual a 2,5 τ. En la Fig. 18.17*b* vemos que a 2,5 τ la carga del condensador es

$$q = 0{,}9\,q_0 = (0{,}9)(3{,}6 \times 10^{-3}\ \text{C}) = 3{,}24 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

Una vez que la corriente transitoria se hace cero, no hay corriente continua en el circuito de la Fig. 18.16, porque un condensador es un

$q(t) = q_0(1-e^{-t/\tau}) = 3{,}3 \times 10^{-3}$

elemento del circuito con una resistencia infinita para un potencial continuo. Por otro lado, supongamos que se aplica a un condensador un potencial alterno (Fig. 18.18). La carga sobre cada placa cambia de positiva a negativa cada vez que el potencial del condensador se invierte y, por lo tanto, hay una corriente alterna en el circuito. Así, pues, un condensador es un elemento que ofrece poca resistencia a un potencial alterno y una resistencia infinita a un potencial continuo. En muchos circuitos electrónicos, en los que el potencial es una mezcla de una componente continua y otra alterna, los condensadores se utilizan para filtrar la componente continua de la componente alterna.

El valor de C está relacionado con el área A de las placas del condensador y la distancia d entre ellas por medio de

$$C = \frac{\epsilon A}{4\pi K d} \qquad 18.22$$

en donde $K = 9{,}0 \times 10^9$ N·m²/C² es la constante eléctrica (Apart. 17.2), y ε es la *constante dieléctrica,* un número adimensional característico del material aislante. Es 1 para el aire y varía entre 2 y 6 para la mayoría de los materiales aislantes. Como K es tan grande, la capacidad (en farads) de un condensador de tamaño normal es muy pequeña. Los condensadores que se utilizan en los circuitos varían entre 0,1 F y 1 pF (1 picofarad = 10^{-12} F).

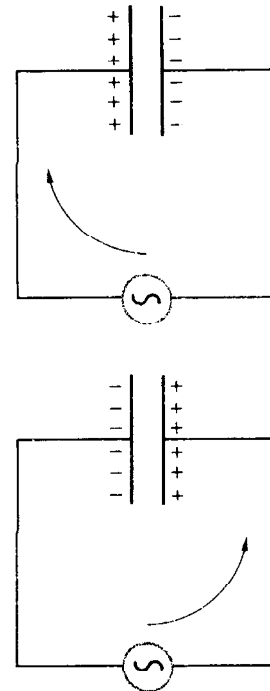


FIGURA 18.18
La carga pasa de una placa de un condensador a la otra cada vez que cambia de signo el potencial de un generador de ca.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la capacidad de un condensador de placas de superficie 5 cm² separadas por un aislante de 0,1 mm de espesor? La constante dieléctrica del aislante es 3,5.

Según la Ec. 18.22 la capacidad vale

$$C = \frac{\varepsilon A}{4\pi K d} = \frac{(3{,}5)(5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{(4\pi)(9 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(0{,}1 \times 10^{-3}\ \text{m})}$$
$$= 1{,}24 \times 10^{-10}\ \text{F} = 124\ \text{pF}$$

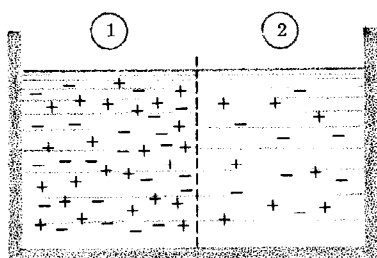
18.5. BIOELECTRICIDAD

En la mayoría de las células animales hay una diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula. Esto es aún más pronunciado en las células nerviosas y musculares donde, en estado de reposo, el potencial interior es de unos —85 mV con respecto al potencial exterior. Un impulso nervioso es un cambio en este potencial que se propaga a lo largo de una fibra nerviosa o axón. Los impulsos nerviosos llevan señales de información desde las células sensoriales al cerebro y mandan señales en sentido inverso desde el cerebro a las células musculares. Un impulso nervioso, al alcanzar una fibra muscular, produce cambios de potencial semejantes que se propagan a lo largo de la fibra, iniciando la contracción de la misma. De este modo, la electricidad juega un papel fundamental en la organización neuromuscular de los animales. Los músculos de algunos peces han perdido su capacidad para contraerse y son utilizados exclusivamente para producir un potencial eléctrico. La conocida anguila eléctrica produce un gran potencial que utiliza para su defensa, pero muchos peces producen un pequeño potencial que emplean para detectar objetos en las aguas circundantes.

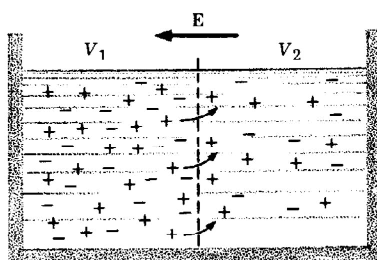
El potencial de Nernst

El potencial de reposo de una célula es producido por diferencias en la concentración de iones dentro y fuera de la célula y por diferencias en la permeabilidad de la pared celular a los diferentes iones. Para entender esto, veamos primero el caso simple de dos soluciones de cloruro potásico, KCl, de distinta concentración, separadas por una membrana semipermeable (Fig. 18.19). En solución, el KCl se disocia en iones potasio cargados positivamente, K^+, e iones cloruro cargados negativamente, Cl^-. Estos iones se mueven independientes unos de otros, pero cualquier pequeña región de fluido tiene por término medio igual número de iones K^+ y Cl^- y, por lo tanto, es eléctricamente neutra. Si la membrana es permeable a los iones K^+ pero no a los iones Cl^-, los iones K^+ se difundirán libremente a un lado y otro de la membrana. Sin embargo, como hay más iones en el compartimiento 2, inicialmente fluirán más iones K^+ del 1 al 2 que del 2 al 1. Como el Cl^- no puede difundirse a través de la membrana, pronto hay un exceso de carga positiva en el compartimiento 2 y un exceso de carga negativa en el compartimiento 1 (Fig. 18.19*b*). Estas cargas en exceso se concentran a lo largo de la membrana, mientras que la masa de fluido en cada compartimiento permanece neutra. Las capas de carga positiva y negativa a cada lado de la membrana producen una diferencia de potencial $V = V_1 - V_2$ a través de la membrana y un campo eléctrico **E**, que retarda el flujo de iones positivos del compartimiento 1 al compartimiento 2, y acelera su flujo del compartimiento 2 al 1.

Pronto se establece un equilibrio dinámico en el que se difunden tantos iones K^+ del 1 al 2 como del 2 al 1. Este equilibrio proviene del balance de dos tendencias opuestas, la diferencia de concentración que favorece la difusión del 1 al 2 y la diferencia de potencial que favorece la difusión del 2 al 1. La diferencia de potencial V en el equilibrio viene dada, en función de las concentraciones * c_1 y c_2 de los iones K^+ en los dos compartimientos, por la ecuación



a



b

FIGURA 18.19
(*a*) Dos soluciones de KCl separadas por una membrana permeable sólo a los iones K^+. (*b*) La difusión de los iones K^+ desde la solución más concentrada del compartimiento 1 a la menos concentrada del compartimiento 2 da como resultado un exceso de carga negativa en el 1 y un exceso de carga positiva en el 2.

$$V = V_1 - V_2 = \pm 2{,}3 \frac{kT}{e} \log \frac{c_1}{c_2} \qquad 18.23$$

Éste es el *potencial de equilibrio de Nernst*. Es negativo cuando la membrana es permeable a los iones positivos, y positivo cuando la membrana es permeable a los iones negativos. Aquí k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. La magnitud kT es proporcional a la energía cinética media de los iones en solución (Apart. 8.4) y $kT \log (c_1/c_2)$ es proporcional al flujo neto de iones debido a la diferencia de concentración. La magnitud eV es proporcional al flujo neto de iones debido a la diferencia de potencial. La Ec. 18.23 es la condición para que estos dos flujos sean iguales y opuestos.

A la temperatura corporal de 37° C el valor de kT/e es

* La concentración se mide en moles por unidad de volumen. Es la densidad de partículas η (Apart. 8.1) dividida por el número de Avogadro.

$$\frac{kT}{e} = \frac{(1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(310\ \text{K})}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 0{,}0267\ \text{V} = 26{,}7\ \text{mV}$$

de modo que el potencial de Nernst es

$$V = V_1 - V_2 = \pm(61{,}4\ \text{mV}) \log \frac{c_1}{c_2} \qquad 18.24$$

El fluido intracelular de una célula nerviosa tiene una concentración de iones K^+ de 0,141 mol/l, mientras que el fluido extracelular tiene una concentración de K^+ de sólo 0,005 mol/l (tabla 18.1). Si estas concentraciones están en equilibrio, el potencial a través de la membrana será

$$V = -61{,}4\ \text{mV} \log \frac{0{,}141}{0{,}005} = -(61{,}4\ \text{mV})\ (\log 28{,}2)$$
$$= -61{,}4\ \text{mV} \times 1{,}45 = -89{,}2\ \text{mV}$$

donde se ha utilizado la tabla II.1 para evaluar el log 2,82.

A partir de medidas experimentales se obtiene que la diferencia de potencial es de —85 mV, de modo que las concentraciones de K^+ están casi en equilibrio. Sin embargo, como el interior de la célula es ligeramente menos negativo que lo que se necesita para contrarrestar la diferencia de concentración, hay una pequeña cantidad de iones K^+ que salen de la célula. Estos iones son bombeados de nuevo a la célula de un modo activo por medio de un proceso metabólico que tiene lugar en la pared de la célula y que todavía es desconocido. Utilizamos el término «bombeados» para hacer hincapié en que no es un proceso de difusión, sino un mecanismo activo que exige una energía metabólica. Por otro lado, la cantidad de iones K^+ que son transportados así es muy pequeña.

OBSERVACIÓN. Es muy importante darse cuenta de que solamente una pequeña fracción de iones K^+ de una célula toman parte en el establecimiento del potencial de Nernst. Una célula típica tiene un volumen de unos 10^{-9} cm³ y una concentración de K^+ de unos 0,14 mol/l, o unos 10^{20} iones K^+ por centímetro cúbico. Así, pues, hay unos (10^{20} iones/cm³) (10^{-9} cm³) = = 10^{11} iones K^+ en una célula. Cuando los iones K^+ se difunden hacia el exterior de la célula, el exceso de carga dentro y fuera de la célula se acumula a lo largo de la pared celular (Fig. 18.20). La pared de la célula actúa como un condensador con un área A de unos 5×10^{-6} cm² y un espesor de unos 10^{-6} cm. Su capacidad C se calcula a partir de la Ec. 18.22 y tiene un valor de

$$C = \frac{\epsilon(5 \times 10^{-10}\ \text{m}^2)}{(4\pi)(9 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10^{-8}\ \text{m})} = 13 \times 10^{-13}\ \text{F}$$

en donde ϵ se ha supuesto que es 3. Con una diferencia de potencial de 0,085 V a través de la pared de la célula, se halla la carga neta a ambos lados de la pared que, según la Ec. 18.20, es

$$q = CV = (13 \times 10^{-13}\ \text{F})(0{,}085\ \text{V}) = 11 \times 10^{-14}\ \text{C}$$

El número de iones K^+ necesarios para producir esta carga es

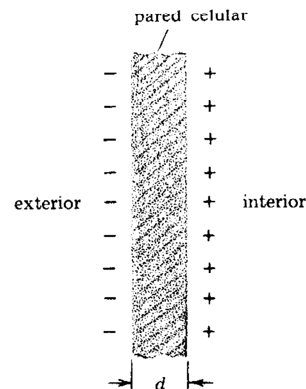


FIGURA 18.20
La pared celular actúa como un condensador con carga positiva en el interior y carga negativa en el exterior.

TABLA 18.1 **Concentraciones de iones K^+, Na^+ y Cl^- en el fluido intracelular y extracelular.**
Todos los demás iones se representan por A^-.

Ion	Concentración, mol/l Extracelular c_E	Intracelular c_I
K^+	0,005	0,141
Na^+	0,142	0,010
	0,147	0,151
Cl^-	0,103	0,004
A^-	0,044	0,147
	0,147	0,151

$$\frac{q}{e} = \frac{11 \times 10^{-14}\ \text{C}}{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 6{,}9 \times 10^5$$

que es solamente de alrededor de una millonésima parte de los iones K^+ que hay dentro de la célula. Así, pues, aun cuando el potencial de Nernst exige que salgan de la célula algunos iones K^+, la cantidad de iones que lo hacen es demasiado pequeña para afectar de manera significativa a la concentración de éstos a ambos lados de la pared celular.

Tanto en el fluido intracelular como en el extracelular se disuelven muchas clases de iones, pero solamente aquellos iones que pueden difundirse a través de la pared de la célula contribuyen al potencial de Nernst. En el estado de reposo, la pared celular es permeable sólo a los iones K^+ y Cl^-. Los iones Cl^- se distribuyen entre los compartimientos intracelular y extracelular, de acuerdo con la Ec. 18.24. O sea, que la razón c_I/c_E de las concentraciones intracelular y extracelular de Cl^- viene dada en función del potencial celular $V = V_I - V_E$ por

$$\log \frac{c_I}{c_E} = \frac{+V}{61{,}4\ \text{mV}}$$

en donde se ha utilizado el signo más porque los iones están cargados negativamente. Como el potencial es —85 mV, esto da

$$\log \frac{c_I}{c_E} = -1{,}38 = -2 + 0{,}62$$

o lo que es lo mismo $$\frac{c_I}{c_E} = (10^{-2})(4{,}2) = 0{,}042$$

donde se ha utilizado la tabla II.2 para hallar el antilogaritmo de 0,62.

Las mediciones muestran que la concentración extracelular de Cl^- es $c_E = 0{,}103$ mol/l, y que la *concentración intracelular* c_I es

$$c_I = (0{,}042)(0{,}103\ \text{mol/l}) = 0{,}0043\ \text{mol/l}$$

El potencial negativo del interior de la célula favorece una alta concentración intracelular de K^+ y una baja concentración intracelular de Cl^-. La completa neutralidad del fluido en los dos compartimientos se logra por la presencia de iones a los que la pared de la célula es impermeable. Los más importantes de éstos son los iones de sodio, Na^+, y varios iones orgánicos negativos, A^-. La tabla 18.1 da las concentraciones de estos iones en los fluidos intracelular y extracelular, mostrando así que la carga total en ambos compartimientos es cero. (Como se hizo notar en la observación anterior, el exceso de carga en cada compartimiento se concentra a lo largo de la pared de la célula y el número de iones que toman parte es demasiado pequeño para afectar al valor de las concentraciones de un modo significativo.)

El potencial de Nernst se determina tanto por la diferencia en la concentración de los iones en los fluidos intracelular y extracelular como por la permeabilidad selectiva de la pared celular a los iones de diferentes clases. Por ejemplo, la diferencia en la concentración de iones Na^+ en los dos compartimientos tendría un potencial de Nernst de

$$V = -(61{,}4 \text{ mV}) \log \frac{0{,}010}{0{,}142}$$

$$= +70{,}6 \text{ mV}$$

si la pared celular fuera permeable a los iones Na^+. Este potencial anularía e incluso invertiría los potenciales de K^+ y Cl^-. La situación es análoga a la del circuito eléctrico mostrado en la Fig. 18.21. Las baterías $\mathcal{E}_K$, $\mathcal{E}_{Cl}$, y $\mathcal{E}_{Na}$ representan los potenciales de Nernst que resultan de las diferencias de concentración de los iones K^+, Cl^- y Na^+, respectivamente. Estas baterías están conectadas en paralelo a conductores que representan el interior y el exterior de la célula. En estado de reposo, el circuito que contiene la batería Na^+ está abierto y solamente las baterías K^+ y Cl^- contribuyen a la diferencia de potencial. (Hay

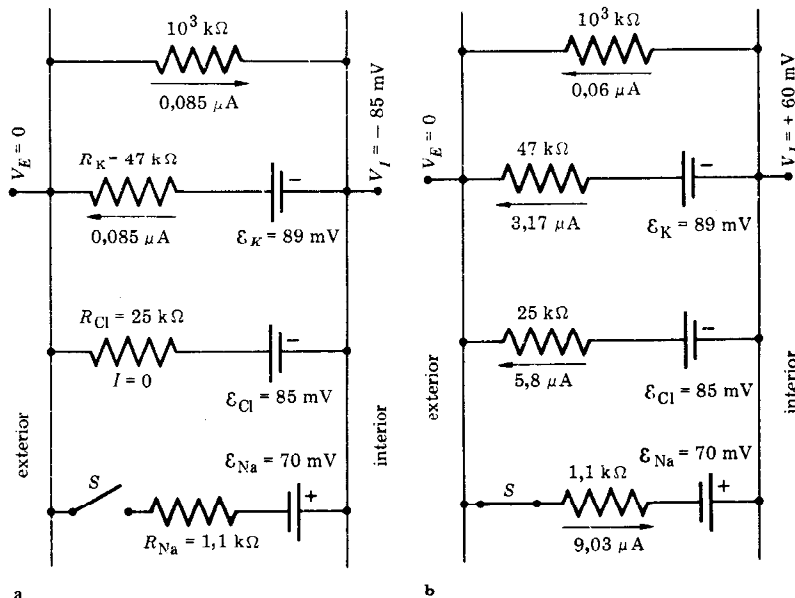


FIGURA 18.21
Circuito analógico de los potenciales de Nernst en una célula.
(*a*) En estado de reposo la pared de la célula es impermeable a los iones Na^+, lo cual corresponde a tener abierto el interruptor *S*. Las baterías Cl^- y K^+ mantienen una diferencia de potencial de −85 mV entre el interior y el exterior de la célula.
(*b*) Durante un potencial de acción, la pared de la célula se hace de repente permeable a los Na^+, lo cual corresponde al cierre del interruptor *S*. Entonces la batería Na^+ hace que el interior de la célula esté a +60 mV con respecto al exterior.

una pequeña corriente I a través de la resistencia R_K porque el potencial total entre los conductores es $85\ mV = \mathcal{E}_K - R_K I$.)

La pared de las células nerviosas y musculares tiene la capacidad de cambiar su permeabilidad relativa a los iones K^+ y Na^+. Cuando una célula nerviosa es estimulada eléctrica, química o mecánicamente, la pared de la célula se hace permeable de repente a los Na^+. Esto es análogo a cerrar el interruptor S del circuito de la Fig. 18.21. Los iones Na^+ fluyen ahora a través de la pared celular hasta el interior de la célula, neutralizando la carga negativa que hay dentro de la misma. Para un período de unos 0,2 ms la pared de la célula es unas 100 veces más permeable a los iones Na^+ que a los K^+. (En la Fig. 18.21 se ha representado esto haciendo R_{Na} menor que R_K y R_{Cl}.) Durante este período domina la batería Na^+ y el potencial interior cambia de —85 a +60 mV. (Las resistencias de la Fig. 18.21 se eligen de manera que el potencial en los extremos de los conductores varíe de —85 a +60 mV cuando se cierra el interruptor.) Después de este período, la pared de la célula se hace otra vez impermeable a los iones Na^+, de modo que, de nuevo, domina la batería K^+. Los iones K^+ salen de la célula hasta que se reestablece el potencial de equilibrio de —85 mV. Estos cambios en el potencial celular aparecen en la Fig. 18.22. La repentina subida y bajada del potencial celular recibe el nombre de *potencial de acción.*

Durante el siguiente período de reposo, el exceso de iones Na^+, que había entrado en la célula durante el potencial de acción, es bombeado activamente fuera de la célula. El mecanismo del bombeo de Na^+ es desconocido, pero se cree que es semejante al bombeo de K^+. Hay que hacer hincapié otra vez, en que el número total de iones que se desplazan a través de la pared celular durante estos cambios de potencial, es muy pequeño comparado con el número de iones que hay en la célula. Por lo tanto, un solo potencial de acción no produce un cambio

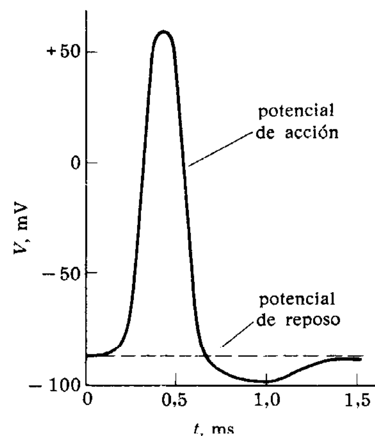


FIGURA 18.22
Variación temporal del potencial de acción.

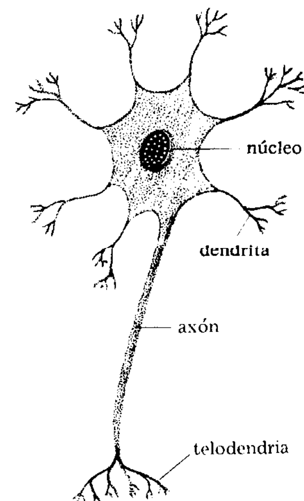


FIGURA 18.23
Célula nerviosa.

importante en la concentración de iones de la célula. La célula se puede excitar muchos miles de veces antes de que la concentración de Na^+ se vea afectada de modo apreciable. El bombeo de Na^+ es así un mecanismo para mantener a la larga la adecuada concentrción de Na^+, y no es significativo para una sola puesta en marcha del potencial de acción.

Impulsos nerviosos

Una célula nerviosa, Fig. 18.23, consta de un cuerpo celular y una larga prolongación llamada *axón*. El fluido de un axón tiene una composición parecida al fluido del cuerpo celular y, en el estado de reposo, el interior del axón tiene un potencial de —85 mV con respecto al fluido extracelular. Los axones actúan como cables que transmiten impulsos nerviosos desde una célula nerviosa a otra célula nerviosa o muscular. Un impulso nervioso es un potencial de acción que se propaga a lo largo del axón.

La Fig. 18.24*a* muestra la sección de un axón en estado de reposo. Cuando el axón es estimulado en un punto *A*, sólo se hace permeable a los iones Na^+ la región de la pared de la célula que se halla alrededor de *A*. En esta región se establece un potencial de acción, el cual momentáneamente hace que el exterior de la célula llegue a ser negativo y el interior, positivo (Fig. 18.24*b*). En la parte exterior del axón es atraída carga positiva a esta región negativa, con lo que las regiones adyacentes se hacen menos positivas. De igual modo, en el interior, la carga negativa es atraída hacia la región positiva y las regiones adyacentes se hacen menos negativas. Esto produce un pequeño cambio en el potencial de la pared celular en estas regiones adyacentes, lo que a su vez hace que la pared celular en estas regiones se convierta de repente en permeable a los iones Na^+, disparando así un potencial de acción. Los iones Na^+ entran en la célula, invirtiendo el potencial en estas regiones (Fig. 18.24*c*). La carga de las áreas más alejadas del axón es atraída a estas regiones, estimulando los potenciales de acción en estas áreas. De este modo, un pulso de potencial, con la forma del potencial de acción, se propaga a lo largo del axón en ambas direcciones. Poco después de que el pulso se haya alejado de *A*, el potencial en *A* vuelve a tener su valor de reposo y está preparado para dispararse otra vez.

Un impulso nervioso se mueve a lo largo de un axón a una velocidad de 30 m/s, que es pequeña comparada con la velocidad de los impulsos eléctricos en los circuitos electrónicos. La velocidad de un impulso nervioso se determina por el tiempo que necesitan los iones para fluir en ambos sentidos a través de la pared de la célula. Un impulso nervioso se parece a una onda sobre una cuerda en la que el flujo de carga es, en su mayor parte, perpendicular a la dirección de propagación del pulso.

El mecanismo básico por el que la pared de la célula cambia su permeabilidad a los iones Na^+ no se entiende todavía. La pared celular es una estructura funcionalmente compleja que controla el paso de moléculas entre los compartimientos intracelular y extracelular. Normalmente es lo que los biólogos y biofísicos del mundo entero investigan intensamente, y podemos esperar que se avanzará muchísimo

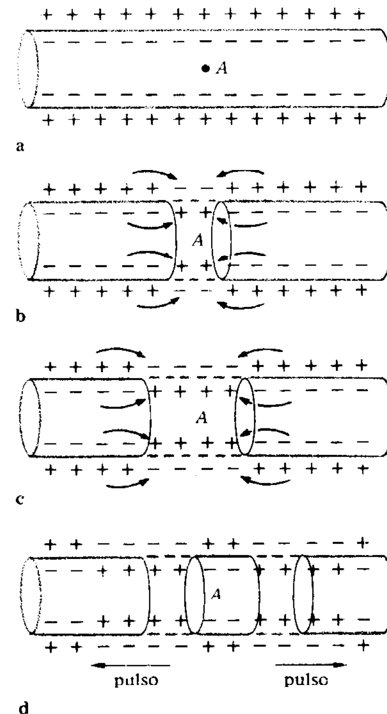


FIGURA 18.24
Transmisión de un impulso nervioso a lo largo de un axón. (*a*) Estado de reposo. (*b*) El estímulo en el punto *A* produce un potencial de acción local en ese punto, por lo que el interior de la célula se hace positivo. (*c*) Al fluir la carga hacia *A* desde las regiones contiguas, se estimulan potenciales de acción en regiones más alejadas del axón. (*d*) El axón vuelve a su estado de reposo en *A*, mientras que el pulso continúa su propagación a lo largo del axón.

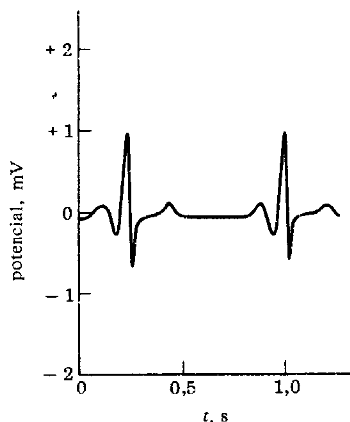


FIGURA 18.25
Un electrocardiograma normal.

en la comprensión de esta estructura fundamental en un futuro próximo.

Cuando un impulso nervioso alcanza una célula muscular, produce un potencial de acción en la célula muscular. Este potencial se propaga a lo largo de la fibra muscular, del mismo modo que se propaga a lo largo de un axón. Lo que inicia la contracción de la fibra es el movimiento de este impulso a lo largo de la misma. Antes de cada latido del corazón se extiende por éste un gran potencial de acción. Este potencial produce corrientes en el tejido contiguo y algunas de ellas llegan a la piel, donde pueden ser detectadas por medio de electrodos colocados en el pecho. Las señales de los electrodos son amplificadas y registradas sobre un gráfico móvil. El registro resultante, que se llama *electrocardiograma* (ECG), tiene gran valor en el diagnóstico de enfermedades del corazón. La Fig. 18.25 muestra un electrocardiograma normal de dos latidos del corazón.

Pez eléctrico

Algunos peces han desarrollado células musculares modificadas que las utilizan principalmente para producir un potencial de acción. Estas células no son fibras largas y delgadas como la célula muscular normal, sino placas cortas y lisas, llamadas *electroplacas*. Están dispuestas unas encima de otras como las baterías de un flash. Al ser estimuladas por impulsos nerviosos, se inicia simultáneamente en un lado de cada célula un potencial de acción. Mientras que cada célula produce un potencial de acción de 0,1 V solamente, un bloque de cientos y miles de estas células produce un pulso de potencial momentáneo de muchos volts. La anguila eléctrica *(Electrophorus)* produce un potencial momentáneo de 300 V, que es suficiente para aturdir a su presa o a sus posibles enemigos.

Más interesantes son los peces de poco potencial eléctrico los cuales mantienen unas ininterrumpidas diferencias de potencial de unos pocos voltios entre la cabeza y la cola. Esta diferencia de potencial es producida en forma de pulsos, a una velocidad de varios cientos de pulsos por segundo. Como consecuencia, se establece alrededor del pez un campo eléctrico pulsante y la carga eléctrica circula a lo largo de las líneas de fuerza de este campo (Fig. 18.26). Cuando el pez se desliza de un lado a otro, la corriente y el campo eléctrico se modifican por la presencia en el agua de objetos con diferente resistencia eléctrica. La Fig. 18.26 muestra el campo eléctrico que se forma alrededor de un pez cuchillo. Cuando en el punto *B* hay un objeto con una resistencia menor que la del agua que le rodea, la corriente local es mayor que la normal en este punto. Análogamente, cuando en el punto *A*, cercano al pez, hay un objeto con una resistencia mayor que la del agua que le rodea, la corriente local es entonces menor que la normal en este punto. El pez eléctrico tiene células sensoriales en la piel y con ellas puede detectar estas corrientes. Además, estos peces pueden determinar el tamaño y la posición de objetos próximos por el efecto que estos objetos tienen sobre la corriente. Se ha visto por medio de experimentos que el pez del Nilo *(Gymnarchus)* puede detectar la presencia de una delgada varilla de vidrio oculta dentro de una vasija porosa, gracias al efecto de la resistencia eléctrica de la varilla sobre la corriente que hay alrededor.

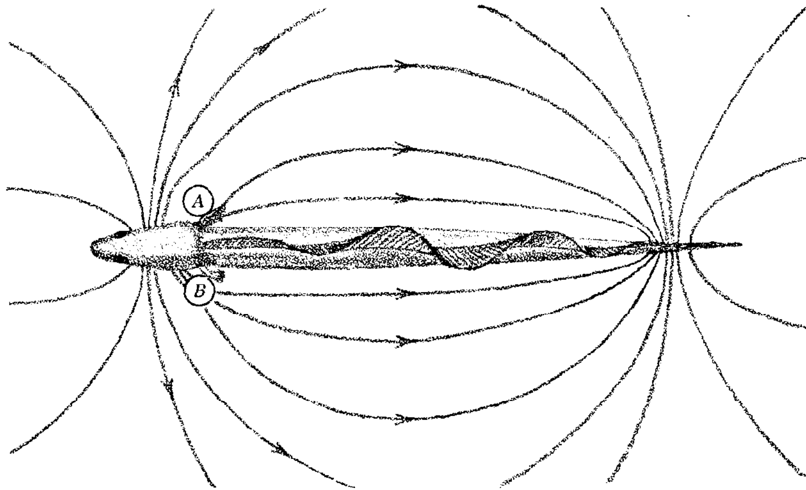


FIGURA 18.26
Líneas de fuerza alrededor de un pez eléctrico.

Las células eléctricamente sensibles puede que se hayan desarrollado primeramente en algunos peces para detectar los potenciales de acción normales en otros peces. Por ejemplo, los tiburones y las rayas pueden detectar una acedía a una distancia de 5 a 10 cm por el potencial de acción de los músculos respiratorios de este pez. Pero dos órdenes de peces (Mormiriformes y Gimnotoideos) se caracterizan por las adaptaciones que les permiten producir y controlar grandes potenciales de acción; esto les permite detectar objetos animados e inanimados en las oscuras y lóbregas aguas donde viven. Además, algunos de estos peces parece ser que utilizan sus campos eléctricos para indicar entre ellos sus intenciones agresivas y de apareamiento.

En los últimos 30 años es cuando se ha sabido del sentido eléctrico de los peces. Hemos visto que otros animales pueden detectar propiedades físicas que no puede detectar el hombre. Los murciélagos, por ejemplo, detectan sonidos ultrasónicos y las abejas detectan la luz polarizada. En el largo proceso de la evolución, puede que algunos animales hayan adoptado otras propiedades físicas como un sentido especializado.* Se puede esperar con bastante fundamento que todavía se harán nuevos e interesantes descubrimientos en el campo de los sentidos de los animales.

* Ver el Apart. 19.5 para una discusión de la posibilidad de que exista un sentido magnético en los pájaros y en las bacterias.

PROBLEMAS

1. Por un alambre pasa una carga de 75 C en 120 s. (*a*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el alambre durante este tiempo? (*b*) ¿Cuántos electrones pasan por el alambre durante este tiempo?
Resp. (*a*) 0,625 A; (*b*) $4{,}69 \times 10^{20}$.
2. (*a*) ¿Cuánta carga pasa en 30 s por un alambre en el que hay una corriente de 4,5 A? (*b*) ¿Cuántos electrones pasan por el alambre en este tiempo?
3. El *faraday* (F) es la carga de 1 mol de protones. (*a*) ¿Cuál es el valor del faraday en coulombs? (*b*) ¿Cuánto le costaría a 1 F de carga pasar por un alambre en el que la corriente es de 15 A?
Resp. (*a*) $9{,}6 \times 10^4$ C; (*b*) 106,7 min.
4. Una batería puede producir un total de 0,40 F (ver problema 3). (*a*) ¿Durante cuánto tiempo puede una batería mantener una corriente de 0,7 A en un circuito? (*b*) Si la fem de la batería es 1,5 V, ¿cuál es la energía eléctrica total que puede producir la batería?
5. Una batería mantiene una corriente de 0,3 A con una fem de 1,5 V. (*a*) ¿Cuál es la potencia disponible de la batería? (*b*) ¿Cuánta energía consume la batería en 5 min?
Resp. (*a*) 0,45 W; (*b*) 135 J.
6. Una batería con una fem de 3,0 V envía energía a un circuito exterior a razón de 0,80 W. (*a*) ¿Cuál es la corriente en el circuito? (*b*) Si la batería puede producir un total de energía eléctrica de $3{,}5 \times 10^4$ J, ¿por cuánto tiempo puede mantener la batería esta corriente?
7. Supongamos que la batería de la Fig. 18.4 tiene una fem de 5,0 V y que la resistencia es de 10 Ω. ¿Cuál es (*a*) la corriente en el circuito y (*b*) la potencia disipada en la resistencia?
Resp. (*a*) 0,5 A; (*b*) 2,5 W.
8. Supongamos que la corriente en la Fig. 18.4 es 0,3 A y que la resistencia es 20 Ω. ¿Cuál es (*a*) la fem de la batería y (*b*) la potencia disipada en la resistencia?
9. Supongamos que la fem de la batería de la Fig. 18.4 es 4,5 V y que la corriente en el circuito es de 0,2 A. ¿Cuál es (*a*) la resistencia en el circuito y (*b*) la potencia disipada en el mismo?
Resp. (*a*) 22,5 Ω; (*b*) 0,9 W.
10. Supongamos que la corriente en la Fig. 18.4 es 0,4 A y que la potencia disipada en la resistencia es 1,2 W. ¿Cuál es (*a*) la fem de la batería y (*b*) la resistencia del circuito?
11. Supongamos que la fem de la batería de la Fig. 18.4 es 3,0 V y la potencia disipada en la resistencia es 2,0 W. ¿Cuál es (*a*) la intensidad de la corriente en el circuito y (*b*) la resistencia?
Resp. (*a*) 0,67 A; (*b*) 4,5 Ω.
12. Supongamos que la resistencia en la figura 18.4 es 27 Ω y que la potencia disipada en ella es 3,0 W. ¿Cuál es (*a*) la fem de la batería y (*b*) la intensidad de la corriente en el circuito?
13. Normalmente una batería tiene una pequeña resistencia interna propia. Esto se indica en la Fig. 18.27 por medio de la resistencia *r*. Si la fem de la batería es 3,0 V, $r = 0{,}5\ \Omega$ y $R = 5\ \Omega$, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes *a* y *b* de la batería?
Resp. 2,73 V.

OBSERVACIÓN. Debido a la resistencia interna de una batería, el potencial entre sus bornes puede ser menor que la fem de la batería.

14. El circuito de la Fig. 18.27 tiene una corriente de 0,5 A cuando *R* es 10 Ω y una corriente de 0,27 A cuando *R* es 20 Ω. ¿Cuál es (*a*) la resistencia interna y (*b*) la fem $\mathcal{E}$ de la batería?

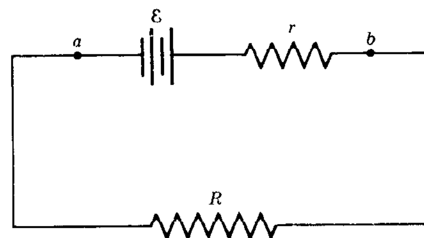


FIGURA 18.27. Problemas 13 y 14.

15. Supongamos que la fem de la batería de la Fig. 18.6 es 7,5 V y que las resistencias son $R_1 = 8\ \Omega$ y $R_2 = 12\ \Omega$. ¿Cuál es (*a*) la

intensidad de la corriente en el circuito y (b) la potencia disipada en cada resistencia?
Resp. (a) 0,375 A; (b) 1,125 y 1,69 W.

16. Supongamos que la fem de la batería de la Fig. 18.6 es 9,0 V y la resistencia R_1 es 100 Ω. ¿Cuál debe ser la resistencia R_2 para que la corriente sea de 20 mA?

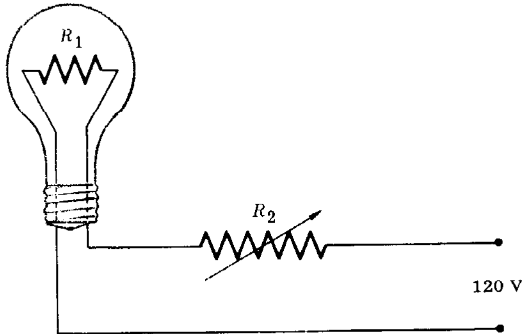


FIGURA 18.28. Problema 17.

17. La Fig. 18.28 muestra una diferencia de potencial de 120 V entre los extremos de un circuito formado por una lámpara de resistencia $R_1 = 144$ Ω conectada en serie a una resistencia variable R_2. El brillo de la lámpara se controla variando el valor de R_2. ¿Cuál es la potencia disipada en la lámpara (a) cuando R_2 es cero y (b) cuando $R_2 = 144$ Ω? (c) ¿Cuál debe ser R_2 para que la potencia disipada en la lámpara sea de 50 W?
Resp. (a) 100 W; (b) 25 W; (c) 59,7 Ω.

18. Una bombilla de tres posiciones tiene dos filamentos que se hallan conectados a tres alambres, tal como aparece en la Fig. 18.29. Dando vueltas al interruptor del portalámparas se conectan 120 V a *ab*, *bc* o *ac*. (a) Si $R_1 = 144$ Ω y $R_2 = 216$ Ω, ¿cuáles son las tres posibles potencias disipadas de la bombilla? (b) Otra bombilla de tres posiciones puede funcionar a 300, 100 y 75 W. ¿Cuáles son las resistencias de sus dos filamentos?

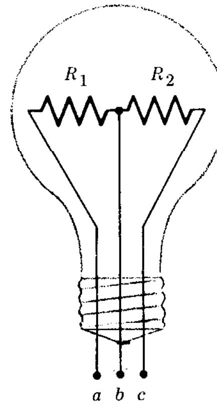


FIGURA 18.29. Problema 18.

19. Supongamos que la fem de la batería de la Fig. 18.29 es 7,5 V y que las resistencias son $R_1 = 8$ Ω y $R_2 = 12$ Ω. ¿Cuáles son las intensidades I, I_1 y I_2?
Resp. 1,56, 0,94 y 0,62 A.

20. Supongamos que la fem de la batería que aparece en la Fig. 18.7 es 9,0 V y que la resistencia R_1 es 100 Ω. ¿Cuál debe ser la resistencia R_2 para que la corriente I sea 150 mA?

21. Se colocan seis bombillas de un árbol de Navidad en un circuito en paralelo, tal como aparece en la Fig. 18.30. Cada bombilla consume 10 W cuando funciona a 120 V. (a) ¿Cuál es la resistencia R de cada

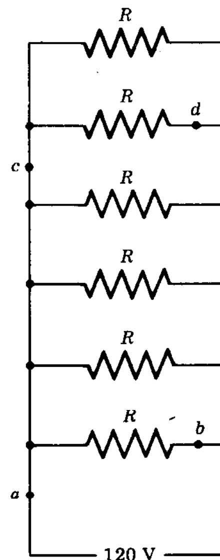


FIGURA 18.30. Problema 21.

bombilla? (*b*) ¿Cuál es la resistencia de todo el conjunto de bombillas? (*c*) ¿Cuál es el consumo total de potencia del conjunto? (*d*) ¿Cuáles son las intensidades de la corriente en los puntos *a*, *b*, *c*, y *d*?
Resp. (*a*) 1440 Ω; (*b*) 240 Ω; (*c*) 60 W; (*d*) 0,50, 0,083, 0,167 y 0,083 A.

22. Se colocan seis bombillas en un circuito en serie, tal como se ve en la Fig. 18.31. (Así se colocaban antiguamente las bombillas

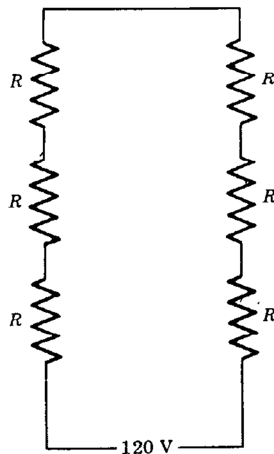
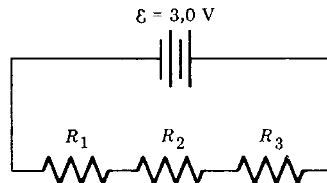


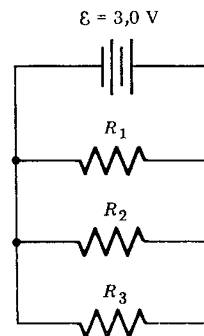
FIGURA 18.31. Problema 22.

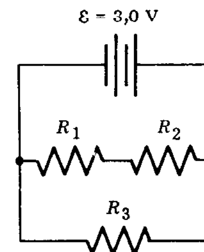
en los árboles de Navidad.) Cada bombilla tiene la misma resistencia R y el conjunto está pensado para que consuma 60 W cuando funciona a 120 V. (*a*) ¿Cuál es la resistencia de cada bombilla? (*b*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el circuito cuando funciona a 120 V? (*c*) ¿Cuál sería la potencia consumida por una sola bombilla que funcionase a 120 V? (*d*) Comparar este circuito con el del problema 21 y comentar las desventajas de la colocación de las bombillas de un árbol de Navidad en serie.

23. En la Fig. 18.32 vemos las tres resistencias $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$ y $R_3 = 25\ \Omega$ en cuatro circuitos diferentes. Hallar para cada circuito las intensidades I_1, I_2 e I_3 en cada resistencia, y la intensidad I en la batería.
Resp. (*a*) $I_1 = I_2 = I_3 = I = 0{,}067$ (A); (*b*) 0,6, 0,2, 0,12 y 0,92 A; (*c*) 0,15, 0,15, 0,12, y 0,27 A; (*d*) 0,209, 0,130, 0,079, y 0,209 A.

24. Hallar la potencia disipada en cada resistencia para cada circuito de la Fig. 18.32 y







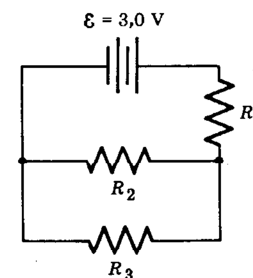


FIGURA 18.32. Problemas 23 y 24.

la potencia total disponible de la batería (ver Prob. 23).

25. Hallar todas las resistencias que se pueden hacer con tres resistencias de 10 Ω en varias combinaciones. No todas las combinaciones necesitan utilizar las tres resistencias.
Resp. 3,33, 5, 6,66, 10, 15, 20, y 30 Ω.

26. Colocar una resistencia de 5 Ω, otra de 10 Ω y otra de 20 Ω en una combinación que tenga una resistencia total de 14 Ω.
27. Hallar todas las resistencias que se pueden hacer con una resistencia de 6 Ω, otra de 9 Ω, y otra de 15 Ω en varias combinaciones. No todas las combinaciones tienen que utilizar las tres resistencias.
Resp. 2,90, 3,6, 4,28, 4,8, 5,625, 6, 6,3, 7,5, 9, 11,625, 13,28, 15, 18,6, 21, 24, y 33 Ω.
28. Colocar una resistencia de 8 Ω, otra de 12 Ω, y otra de 16 Ω en una combinación que tenga una resistencia total de 8,89 Ω.
29. Se aplica un potencial alterno con un potencial máximo de 75 V en los extremos de una resistencia de 15 Ω. ¿Cuál es (*a*) la intensidad eficaz y (*b*) la potencia media disipada en la resistencia?
Resp. (*a*) 3,53 A; (*b*) 187,5 W.
30. Por una resistencia de 25 Ω pasa una corriente alterna con una intensidad eficaz de 2,4 A. ¿Cuál es (*a*) el potencial máximo aplicado a la resistencia y (*b*) la potencia media disipada en ella?
31. (*a*) ¿Cuánto vale la resistencia de una bombilla que disipa 60 W con un potencial eficaz de 120 V? (*b*) ¿Cuánto valen las intensidades eficaz y máxima en la resistencia?
Resp. (*a*) 240 Ω; (*b*) 0,5 A, 0,707 A.
32. Una intensidad eficaz de 100 mA mantenida durante 1 s en el cuerpo de una persona puede resultar letal. Suponiendo que la resistencia global del cuerpo es de 1000 Ω, ¿qué energía se necesita para matar a una persona por electrocución? Comparar este valor con el de la energía necesaria para matar a una persona con una bala (ver Prob. 15 del Cap. 5).
33. ¿Cuál es el valor de la carga máxima sobre una placa de un condensador de 0,25 μF conectado a una batería de 3,0 V?
Resp. $7{,}5 \times 10^{-7}$ C.
34. Un condensador de 200 μF tiene una carga de 0,015 C en cada placa. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
35. Un condensador de 50 μF que está inicialmente descargado es conectado, por medio de una resistencia de 300 Ω a una batería de 12 V. (*a*) ¿Cuál es el valor de la carga final q_0 sobre el condensador? (*b*) Desde que se conecta el condensador a la batería ¿en cuánto tiempo estará cargado a 1/2 q_0? (*c*) ¿Cuánto tiempo le costará al condensador cargarse hasta 0,90 q_0?
Resp. (*a*) 6×10^{-4} C; (*b*) 10,5 ms; (*c*) 37,5 ms.
36. Un condensador de 400 μF se conecta a una batería por medio de una resistencia. Hallar (*a*) la resistencia *R* y (*b*) la fem de la batería $\mathcal{E}$ si el tiempo característico del circuito es 0,5 s y la carga máxima del condensador es 0,024 C.
37. Un condensador de 150 pF consiste en placas de 7 cm² de superficie separadas por una lámina de plástico de 0,2 mm de espesor. ¿Cuál es la constante dieléctrica del plástico?
Resp. 4,8.
*38. (*a*) Demostrar que cuando se conectan en paralelo dos condensadores de capacidades C_1 y C_2, la capacidad efectiva C del conjunto es $C = C_1 + C_2$. (*b*) Demostrar que cuando dichos condensadores se conectan en serie, la capacidad efectiva viene dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

(*Sugerencia:* Al conectarse en paralelo, cada condensador tiene el mismo potencial, mientras que al conectarse en serie cada condensador tiene la misma carga.)
39. Si la membrana de las células fuera permeable a los iones orgánicos electronegativos A^- de los fluidos celulares (tabla 18.1) ¿cuál sería el potencial de Nernst debido a estos iones?
Resp. +32,1 mV.
40. Supongamos que la concentración intracelular de Cl^- fuese 0,025 mol/l. ¿Cuál sería la concentración extracelular si el potencial de Nernst debido al Cl^- fuera —72 mV?

BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDER, R. M.: «Functional Design in Fishes», Hutchinson University Library, Londres, 1967. En el capítulo 6 se hace una descripción detallada del sentido eléctrico del pez.

BULLOCK, Theodore Holmes: Seeing the World through a New Sense: Electroreception in Fish, *American Scientist*, **61** : 316 (1973). Es

Magnetismo Capítulo 19

El magnetismo es una fuerza fundamental de la naturaleza y está íntimamente relacionada con la electricidad. Algunos efectos magnéticos simples han sido conocidos desde tiempos antiguos por la existencia de materiales magnéticos en la naturaleza. Sin embargo, los fenómenos electromagnéticos importantes que establecieron las conexiones entre electricidad y magnetismo, fueron descubiertos en el siglo XIX. De hecho, todos los aparatos utilizados en la producción y distribución comercial de la electricidad como, por ejemplo, generadores, transformadores y motores, tienen su fundamento en los principios electromagnéticos descubiertos entre 1820 y 1831. Por otra parte, en 1873 Maxwell demostró, matemáticamente, que estos principios implican la existencia de ondas de campos eléctricos y magnéticos que se autopropagan y que viajan a la velocidad de la luz. Así, los principios del electromagnetismo son la base de nuestra tecnología, de nuestra comprensión de la naturaleza de la luz y de otras formas de radiación electromagnética. Recientemente, algunos investigadores han descubierto que algunos pájaros y otros organismos poseen un sentido magnético que posibilita su orientación con respecto al campo magnético de la Tierra.

19.1. IMANES

El ejemplo más corriente de magnetismo es la atracción ejercida por los extremos o *polos* de un imán sobre pequeños trozos de hierro. Este fenómeno, en algunos aspectos, es semejante a la atracción que ejerce una varilla electrificada sobre un pequeño trozo de corcho (apartado 17.2). Sin embargo, el hierro es una de las pocas sustancias atraídas por un imán, mientras que una varilla electrificada atrae a cualquier sustancia. Más aún, una varilla permanece electrificada sólo un momento, mientras que un imán conserva su magnetismo por tiempo indefinido.

La aguja de una brújula es un imán largo y delgado apoyado en su centro de gravedad de tal manera que puede girar libremente en el plano horizontal (Fig. 19.1). Si no hay cerca ningún otro material magnético, la aguja se orientará aproximadamente en la dirección norte-sur. El extremo de la aguja que apunta siempre hacia el norte recibe el nombre de polo norte (N) del imán; el otro extremo es el polo sur (S). Las palabras *norte* y *sur* se utilizan para distinguir polos magnéticos opuestos, del mismo modo que los términos *positivo* y *negativo*, sirven para distinguir cargas eléctricas opuestas.

Además, la fuerza entre dos polos magnéticos depende de los polos del mismo modo que la fuerza entre dos cargas eléctricas depende de las cargas: los polos opuestos se atraen mutuamente y los polos iguales se repelen. Esto se demuestra fácilmente con dos barras de imán cuyos polos se han determinado por su tendencia a apuntar hacia el

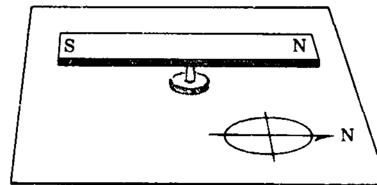


FIGURA 19.1
Una barra imanada suspendida por su centro de gravedad.

norte (o hacia el sur). Cuando el polo norte de un imán se pone cerca del polo sur de otro imán, los dos polos se atraen conjuntamente, mientras que si se pone el polo norte de un imán cerca del polo norte de otro imán, los dos polos se repelen.

A causa de la atracción de los polos opuestos, una aguja de brújula colocada cerca de una barra imanada se alineará con el polo norte dirigido hacia el polo sur del imán (Fig. 19.2). La Tierra misma es un imán gigantesco cuyo polo norte* está cerca del polo norte geográfico. Por lo tanto, si no hay otros imanes, el polo norte de la aguja de una brújula apunta su norte hacia el polo norte magnético de la Tierra. Sin embargo, el magnetismo terrestre es tan débil que su efecto sobre la aguja de una brújula es mínimo comparado con el de un imán cercano. En consecuencia, no haremos caso del magnetismo de la Tierra al considerar los efectos de un imán sobre una brújula cercana.

A diferencia de la carga eléctrica, los polos magnéticos aislados no existen. Por ejemplo, si intentamos separar los polos norte y sur de un imán largo rompiéndolo por la mitad (Fig. 19.3), vemos que los polos norte y sur aparecen inmediatamente en los trozos partidos, de modo que cada fragmento sigue siendo un imán completo, con sus propios polos norte y sur. De hecho, cada trozo tiene un polo norte y un polo sur de igual fuerza, sean cualesquiera los trozos en los que se partió el imán. Más aún, incluso las partículas elementales como los electrones, protones y neutrones actúan como imanes completos con sus polos norte y sur. Como no se han encontrado partículas con un solo polo magnético, los polos magnéticos carecen de la importancia fundamental que tienen las cargas eléctricas.

No obstante, el *campo magnético* **B** se puede definir del mismo modo que definimos el campo eléctrico **E** en el Apart. 17.3. Recuérdese que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio es la fuerza que ejercería un sistema de cargas sobre una unidad de carga eléctrica positiva colocada en aquel punto. Del mismo modo, el campo magnético en cualquier punto del espacio es la fuerza que ejercería un sistema magnético (por ejemplo, una barra imanada) sobre una unidad de polo norte magnético colocada en aquel punto. Como no existen polos aislados, tenemos que utilizar pequeñas agujas de brújula para medir el campo.

Por ejemplo, consideremos una pequeña aguja de brújula colocada en un punto P del campo magnético producido por una barra imanada (Fig. 19.4). Los dos polos del imán ejercen una fuerza neta $\mathbf{F}_1$ sobre el polo norte de la aguja de la brújula, y una fuerza neta $\mathbf{F}_2$ sobre el polo sur. Si la aguja de la brújula no está ya alineada con el campo

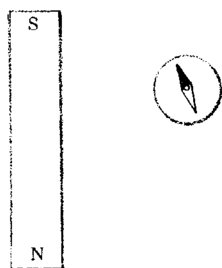
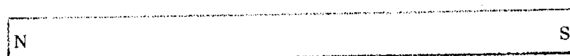


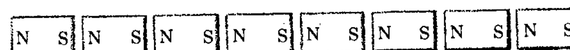
FIGURA 19.2
Una aguja de brújula cerca de una barra imanada. El extremo oscuro es el polo norte de la aguja.



a



b



c

FIGURA 19.3
Una barra imanada partida por la mitad y después en fragmentos más pequeños. Cada fragmento es un imán completo con polo norte y polo sur.

* Considerada como imán, ese polo imán sería sur, pero se llama polo norte magnético y hacia él se orienta el norte de las brújulas.

magnético en *P*, la Fig. 19.4*a* muestra que estas fuerzas ejercen un momento que hará girar la aguja alrededor del punto de apoyo hasta que esté alineada con el campo. Como el momento sobre una aguja de brújula es cero sólo cuando está alineada con el campo magnético, en equilibrio, la aguja apunta en la dirección del campo magnético que está próximo. Como consecuencia, la dirección del campo magnético en cualquier punto viene dada por la dirección de una aguja de brújula colocada en aquel punto.

La Fig. 19.5 muestra el campo magnético alrededor de una barra imanada. Lo mismo que con el campo eléctrico, las líneas de fuerza se dibujan muy juntas donde el campo magnético es más intenso. Una comparación de las Figs. 19.5 y 17.14 nos muestra que el campo magnético alrededor de una barra imanada es idéntico al campo eléctrico alrededor de un dipolo eléctrico. Esto no tiene que sorprender si uno se da cuenta de que un imán es un dipolo magnético, o sea, un sistema compuesto de dos polos opuestos separados por una distancia *d*.

OBSERVACIÓN. Aunque no existen polos magnéticos aislados en la naturaleza, sí que existen dipolos magnéticos. Las partículas elementales son los portadores esenciales de los dipolos magnéticos, como también son los portadores esenciales de la carga. Normalmente, los dipolos magnéticos de los electrones en la materia están orientados en todas direcciones, de modo que se anulan mutuamente (Fig. 19.6*a*). Sin embargo, en un imán permanente, muchos de estos dipolos están alineados en la misma dirección, de modo que la sustancia en bloque actúa como un gran dipolo magnético que es la suma vectorial de los dipolos elementales (Fig. 19.6*b*). De esto se habla con más detalle en el Apart. 19.2.

La Fig. 19.7 muestra el campo magnético de un imán en forma de C, que es un imán curvado de manera que sus polos se enfrenten. Esta configuración tiene muchas aplicaciones importantes porque da lugar a un campo magnético casi uniforme en el entrehierro.

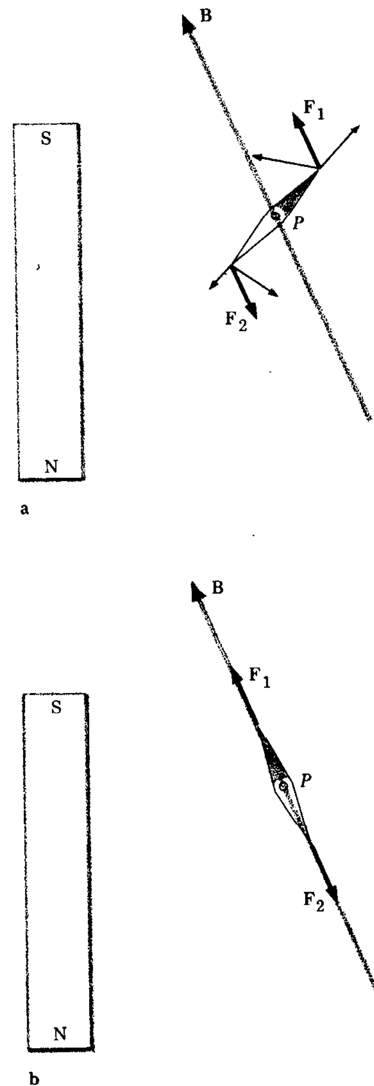


FIGURA 19.4
Una aguja de brújula cerca de una barra imanada. (*a*) Cuando la aguja no está alineada con el campo magnético, las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ ejercidas por el imán sobre la aguja hacen que la aguja gire. (*b*) Sólo cuando la aguja está alineada con el campo, se anula el momento del par $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

19.2. ELECTROMAGNETISMO

La mayoría de los hechos básicos acerca de la electricidad estática, corrientes e imanes permanentes, ya eran conocidos a finales del siglo XVIII. Muchos científicos, viendo la semejanza entre los fenómenos eléctricos y magnéticos, sospecharon que existía una conexión entre ellos, pero todavía no se había descubierto ninguna. Fue en 1820 cuando el físico danés Hans Christian Oersted (1777-1851) hizo un descubrimiento trascendental que cambió la civilización. Estando haciendo unas demostraciones ante un pequeño grupo de estudiantes, Oersted observó que la aguja de una brújula se desviaba siempre que pasaba corriente por un cable cercano. Llevando adelante la investigación, observó que un hilo portador de corriente tiene el mismo efecto sobre la aguja de una brújula que un imán. Esta era una de las conexiones, durante mucho tiempo perseguida, entre la electricidad y el magnetismo: el magnetismo es producido por una corriente.

OBSERVACIÓN. Hasta que Oersted descubrió el electromagnetismo, la electricidad había sido una curiosidad de laboratorio, sin ninguna aplicación práctica. El descubrimiento del electromagnetismo fue el comienzo de una época que condujo a la utilización práctica de la electricidad. Por ejemplo, el telégrafo, que inició la era moderna de la comunicación a gran velocidad, fue desarrollado a los 20 años del descubrimiento de Oersted.

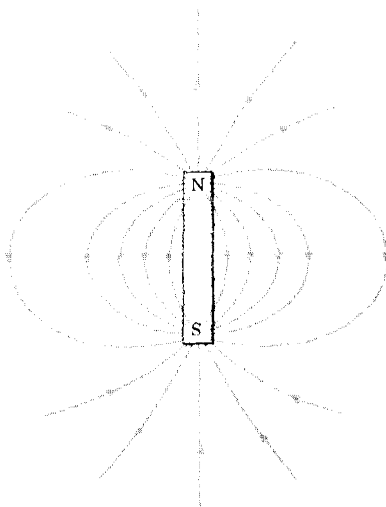
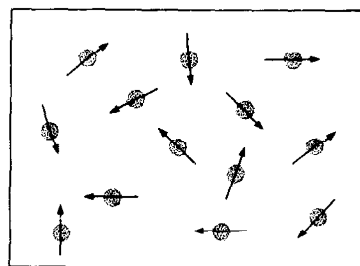
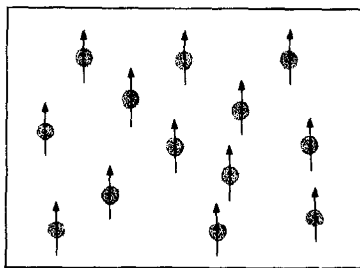


FIGURA 19.5
Campo magnético alrededor de una barra imanada.



a



b

FIGURA 19.6
(*a*) Los dipolos magnéticos de los electrones se hallan dispuestos al azar en la materia ordinaria. (b) Los dipolos magnéticos de los electrones se hallan alineados en un material imanado.

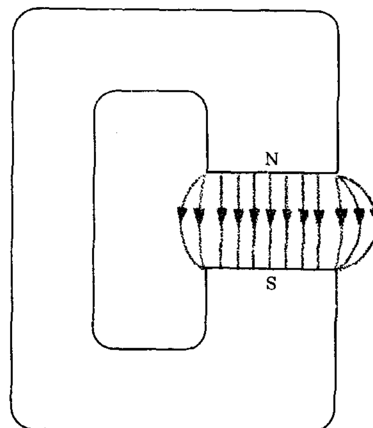


FIGURA 19.7
Campo magnético en el entrehierro de un imán en forma de C.

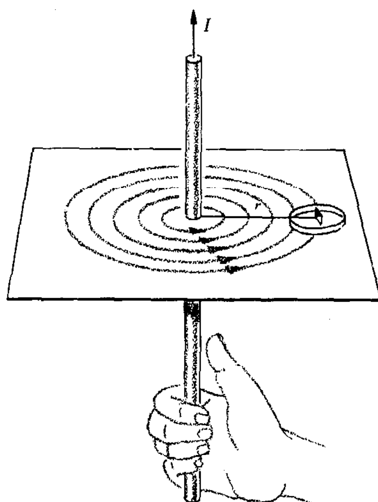


FIGURA 19.8
Campo magnético alrededor de un hilo por el que circula una corriente. La relación entre los sentidos de la corriente y el campo es la misma que entre los señalados por el pulgar y los demás dedos de la mano derecha.

André Marie Ampère (1775-1836) investigó el descubrimiento de Oersted más profundamente y pronto desarrolló una completa descripción matemática de la relación existente entre las corrientes y el magnetismo. Averiguó que las líneas magnéticas de fuerza que se hallan próximas a un hilo conductor de corriente tienen la forma de círculos concéntricos alrededor del hilo, tal como se ve en la Fig. 19.8. Esto se puede demostrar colocando una pequeña brújula en un plano perpendicular al hilo. La aguja de la brújula, que señala la dirección del campo donde está colocada, siempre es perpendicular al radio r trazado desde el hilo hasta la aguja, lo cual indica que el campo forma un círculo alrededor del hilo. La relación entre la dirección del campo y la dirección de la corriente viene dada por la *regla de la mano derecha: Cuando se coge el hilo con la mano derecha, de modo que el dedo pulgar apunte en la dirección de la corriente, los dedos rodean al hilo en el mismo sentido que el campo magnético.*

El módulo B del campo magnético en un punto próximo a un hilo muy largo por el que circula una corriente es directamente proporcional a la intensidad de la corriente I e inversamente proporcional a la distancia perpendicular r desde el punto al hilo. Esta relación expresada en símbolos es

$$B = k\frac{I}{r} \tag{19.1}$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. En el sistema de unidades SI, donde la unidad de intensidad de la corriente es el ampere y la unidad de distancia es el metro, la unidad de intensidad del campo magnético es el *tesla* (T). Se define haciendo que k sea exactamente igual a 2×10^{-7} T-m/A. O sea que, por definición, el módulo del campo magnético, que se halla a un metro de distancia de un hilo largo por el que pasa una corriente de un ampere, es

$$B = k\frac{I}{r} = 2 \times 10^{-7}\ \text{T-m/A}\frac{1\ \text{A}}{1\ \text{m}}$$
$$= 2 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

La constante k se escribe normalmente

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

en donde

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T-m/A}$$

recibe el nombre de *permeabilidad magnética*. En función de μ_0, la Ec. 19.1 se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad 19.2$$

OBSERVACIONES. (1) El tesla no es una unidad fundamental. Tal como se verá en el Apart. 19.3, está relacionada con el newton, el ampere y el metro por

$$1\ \text{T} = 1\ \text{N/A-m}$$

Es bien sabido que el newton y el ampere están a su vez relacionados con las unidades fundamentales de longitud, masa, tiempo y carga. (2) El gauss (G) es otra unidad corriente de intensidad del campo magnético. Está relacionado con el tesla por

$$1\ \text{T} = 10^4\ \text{G}$$

o lo que es lo mismo

$$1\ \text{G} = 10^{-4}\ \text{T}$$

Ejemplo 1. ¿Cuál es el campo magnético en un punto que se halla a 5 cm de un hilo por el que circula una corriente de 3 A?

Según la Ec. 19.2, el campo es

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T-m/A})(3\ \text{A})}{2\pi \times 0{,}05\ \text{m}}$$
$$= 1{,}20 \times 10^{-5}\ \text{T} = 0{,}12\ \text{G}$$

En las latitudes medias, el valor del campo magnético de la Tierra es de unos 0,5 G, de modo que el efecto del campo del hilo sobre la aguja de brújula es pequeño, si se le compara con el efecto del campo terrestre.

El campo magnético producido por un hilo por el que circula una corriente se aumenta grandemente si al hilo se le da la forma de bobina circular con muchas espiras. Esto se puede entender considerando la bobina de dos espiras que aparece en la Fig. 19.9. Cada espira produce un campo proporcional a la intensidad de la corriente I del hilo, de modo que las dos espiras juntas producen una campo proporcional a $2I$. De un modo semejante, una bobina de n espiras produce

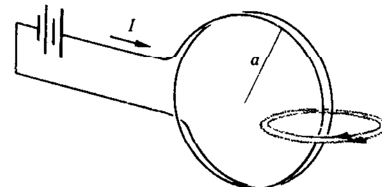


FIGURA 19.9
El campo magnético producido por una bobina de dos espiras es la suma de los campos producidos por cada espira por separado.

un campo proporcional a nI. Como el centro de una bobina de radio a está a la distancia a del hilo, se podría esperar de la Ec. 19.2 que el campo en el centro sea

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2\pi a}$$

Sin embargo, esto no es del todo correcto, ya que la Ec. 19.2 sólo es válida en el caso de un hilo recto muy largo, mientras que aquí se trata de un hilo circular. La expresión correcta para una bobina circular es

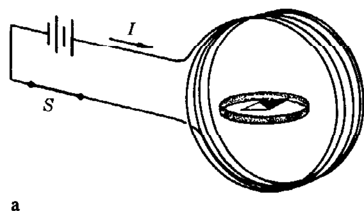
$$B = \frac{\mu_0 nI}{2a} \qquad 19.3$$

que difiere de la expresión anterior sólo en un factor π debido a la diferencia de geometría entre un hilo recto y otro circular. El campo en el centro de la bobina es perpendicular al plano de la bobina.

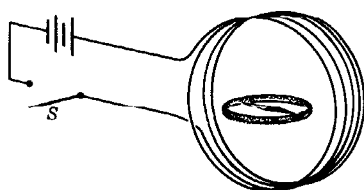
Ejemplo 2. Una bobina de 5 cm de radio tiene 100 espiras. ¿Cuál es el campo magnético en el centro de dicha bobina cuando la corriente que pasa por el cable es de 3 A?
Según la Ec. 19.3, el campo magnético vale

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T-m/A})(100)(3\ \text{A})}{2 \times 0{,}05\ \text{m}}$$
$$= 3{,}77 \times 10^{-3}\ \text{T} = 37{,}7\ \text{G}$$

que es 75 veces el campo magnético de la Tierra.
La Fig. 19.10 muestra una brújula en el centro de una bobina de muchas espiras. Cuando está cerrado el interruptor S, la brújula se orienta paralelamente al campo magnético producido por la corriente. Cuando el interruptor está abierto, desaparece el campo y la aguja vuelve a tener la orientación norte-sur. Así, la orientación de la aguja indica si hay corriente en el hilo.
OBSERVACIÓN. La primera línea telegráfica, construida por William Cooke (1806-1879) y Charles Wheatstone (1802-1875) en 1838, utilizó una bobina y una brújula para recibir mensajes desde un transmisor distante. El mensaje era transmitido por un operador que abría y cerraba un interruptor de acuerdo con un determinado código y era recibido por otro operador que observaba las correspondientes desviaciones de la aguja de una brújula (Fig. 19.10).



a



b

FIGURA 19.10
(*a*) Cuando el interruptor está cerrado, la aguja de la brújula se alinea con el campo magnético que hay en el centro de la bobina circular. (*b*) Cuando el interruptor se halla abierto, la aguja de la brújula vuelve a tomar la orientación norte-sur.

El electroimán

En muchas aplicaciones prácticas del magnetismo, el campo magnético de una espira eléctrica se intensifica mediante el uso de una propiedad peculiar del hierro, llamada *ferromagnetismo*. Otros elementos de transición (tabla 21.2), como el níquel y el cobalto, también presentan esta propiedad, pero el hierro es el único material ferromagnético abundante.
Ferromagnetismo es la tendencia que tienen los dipolos magnéticos de los electrones exteriores de un átomo para alinearse paralelamente a los

dipolos magnéticos de los electrones correspondientes de un átomo cercano. En un imán permanente, los dipolos de los electrones externos de todos los átomos de un gran volumen del material están alineados, de modo que sus campos magnéticos se suman para producir un gran campo magnético fuera del imán. En el hierro desimanado los dipolos se alinean dentro de un pequeño volumen o *dominio*, pero la dirección del alineamiento es diferente en diferentes dominios (Fig. 19.11).

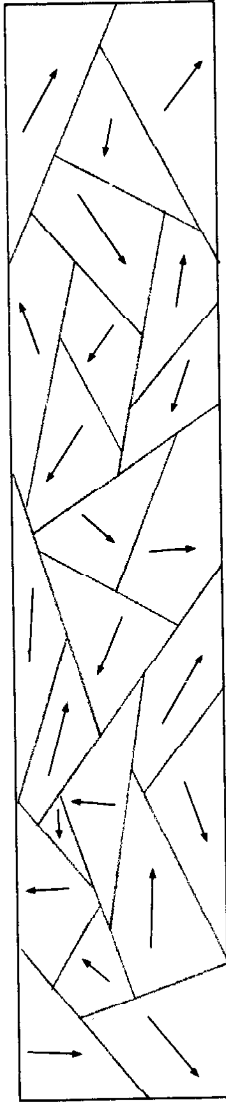


FIGURA 19.11
Dominios en una barra de hierro desimanado. En ella la magnetización de los dominios está orientada al azar.

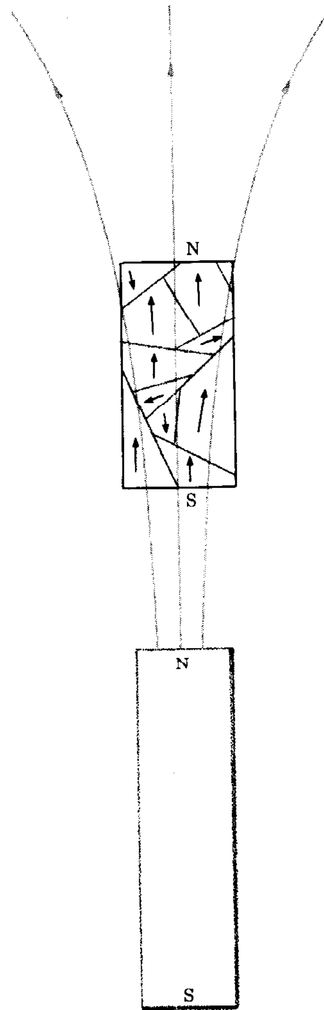


FIGURA 19.12
Un trozo de hierro en el campo magnético de un imán. Los dominios del hierro que son paralelos al campo externo aumentan de tamaño a expensas de los otros dominios.

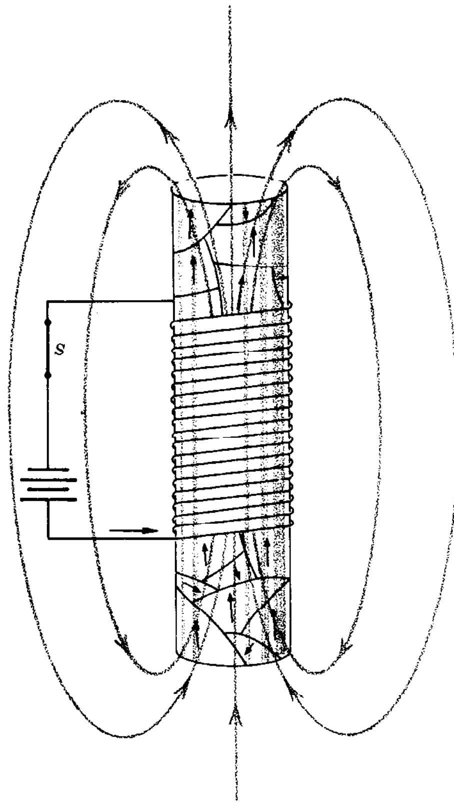


FIGURA 19.13
Un electroimán. El campo magnético de la bobina imana al hierro, el cual hace que aumente mucho el campo magnético que hay alrededor del hierro.

En consecuencia, los campos magnéticos de estos dominios se anulan entre sí y no hay campo magnético fuera del hierro. Cada dominio, que tiene típicamente una anchura de un milímetro, actúa como un pequeño imán permanente, de modo que se puede pensar que el hierro desimanado es una distribución al azar de millones de estos imanes.
Al colocar hierro desimanado en un campo magnético externo, los dominios alineados paralelamente al campo, aumentan de tamaño a expensas de los otros dominios. Esto lo vemos en la Fig. 19.12, en el caso de un trozo de hierro próximo al polo de un imán. Debido al aumento de tamaño de los dominios del hierro paralelos al campo externo, el hierro muestra una imanación en la dirección del campo. Como se ve en la Fig. 19.12, el extremo del hierro más cercano al polo norte del imán muestra un polo sur, de modo que el hierro es atraído por el imán. La situación es análoga a la de un trozo de corcho próximo a una varilla electrificada (Fig. 17.5).
Un *electroimán* consiste en una bobina de alambre arrollada alrededor de un cilindro de hierro (Fig. 19.13). El campo magnético producido por una corriente en la bobina aumenta el tamaño de los dominios del hierro que estén imanados en la dirección del campo. El hierro desarrolla así su propio campo magnético, que se suma al campo de la corriente. El campo del hierro puede ser, fácilmente, miles de veces mayor que el campo de la corriente sola, de modo que el hierro aumenta, de hecho, el campo magnético de la corriente. Más aún, si la corriente no es demasiado grande, los dominios vuelven inmediatamente a su tamaño original cuando cesa la corriente y, por lo tanto, desaparece el campo magnético. O sea, que el campo magnético de un electroimán existe sólo mientras hay corriente en la bobina.

OBSERVACIÓN. Los dominios de un trozo de hierro colocado en un campo magnético muy grande quedan alineados permanentemente en la dirección del campo, de modo que el hierro conserva su imanación después de desaparecer el campo externo. Los imanes permanentes se hacen simplemente colocando una barra de hierro en el campo magnético de una bobina en la que hay una corriente muy intensa. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones, los electroimanes funcionan con unos valores de la corriente demasiado pequeños para imanar al hierro de modo permanente.

Motores eléctricos

Un sencillo *motor de corriente continua* (cc), como el que se utiliza en los juguetes mecánicos, consta de un electroimán montado sobre un eje (el *inducido*) que gira entre los polos de un imán en forma de C (Fig. 19.14). Los extremos del cable del electroimán están conectados a dos contactos (*conmutadores*) montados sobre el eje. El circuito se completa siempre que los conmutadores tocan los contactos externos (*escobillas*), que están conectados a una batería. Cuando gira el inducido, los conmutadores invierten repetidamente la conexión entre la batería y el electroimán, de modo que la dirección de la corriente en el electroimán se invierte también repetidamente.
Cuando el inducido se halla en la posición que vemos en la Fig. 19.14*a*, la corriente está dirigida de tal modo que el polo *A* del electroimán es sur y el polo *B* es norte. En consecuencia, la atracción del imán en C hace que el inducido gire en sentido inverso a las manecillas del reloj. Cuando el inducido alcanza la posición que aparece en la Fig. 19.14*b*, las escobillas ya no hacen contacto con los conmutadores, de modo que

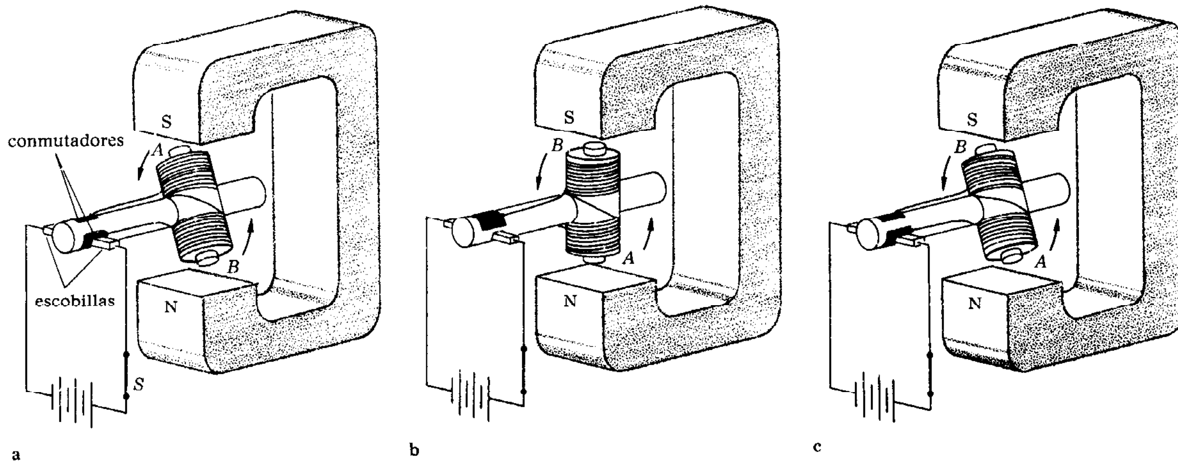


FIGURA 19.14
Un motor de corriente continua. (*a*) En esta posición los conmutadores conectan la bobina a la batería, de tal modo que el lado *A* del electroimán es un polo sur y el lado *B* es un polo norte. Como consecuencia, las fuerzas ejercidas sobre el inducido por el imán en C, hacen que éste gire en sentido inverso al de las agujas del reloj (*b*) En esta posición, los conmutadores desconectan la batería, de modo que el electroimán gira libremente entre los polos del imán. (*c*) En esta posición los conmutadores conectan la bobina a la batería, de tal modo que el lado *A* es un polo norte y el lado B es un polo sur. Como consecuencia, el inducido continúa girando en sentido inverso al de las agujas del reloj.

el electroimán queda desconectado momentáneamente y puede así girar hasta sobrepasar los polos del imán en C. Cuando el inducido alcanza la posición que vemos en la Fig. 19.14*c*, las escobillas se ponen de nuevo en contacto con los conmutadores, pero con la conexión a la batería invertida. Así, el polo *A* del electroimán es ahora norte y el polo *B* sur, y de aquí que la atracción del imán en C continúe haciendo girar el inducido en sentido inverso al de las agujas del reloj.

OBSERVACIÓN. La batería convierte la energía química en energía eléctrica, que el motor eléctrico convierte en energía mecánica del inducido.

La mayor parte de los pequeños motores eléctricos utilizados en relojes y aparatos domésticos son *motores síncronos de corriente alterna* (ca) (Fig. 19.15). En lo único que se diferencian del motor cc es en que lo que invierte la polaridad del electroimán no son los conmutadores sino la alternancia de la corriente. La Fig. 19.15 muestra que la única diferencia entre un motor síncrono y un motor cc es la forma de los conmutadores. Como el inducido de un motor síncrono debe dar una vuelta completa durante un ciclo completo de la corriente, la velocidad de un motor síncrono viene determinada únicamente por la frecuencia de la corriente.

19.3. FUERZAS MAGNÉTICAS

Fuerzas sobre una corriente

El descubrimiento de Oersted demostró que una corriente eléctrica ejerce una fuerza sobre un imán a través de su campo magnético. Por lo tanto, de acuerdo con la tercera ley de Newton (propiedad 3, apartado 2.1), un imán debe ejercer una fuerza sobre una corriente a través de su campo magnético. Dicho de un modo más general, cualquier campo magnético externo ejerce una fuerza sobre una corriente.

Consideremos, por ejemplo, un trozo de alambre de longitud l por el que pasa una corriente I (Fig. 19.16). (Este trozo de alambre es parte de un circuito mayor que no se muestra.) Si el alambre forma un ángulo θ con un campo magnético uniforme B, el módulo de la fuerza magnética F_m ejercida sobre el alambre es

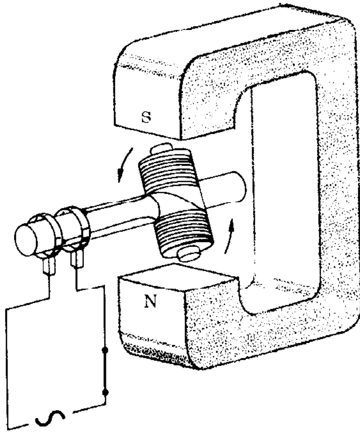


FIGURA 19.15
Motor síncrono de corriente alterna. Los conmutadores son anillos circulares que hacen contacto constante con las escobillas. Lo que invierte la polaridad del electroimán es la alternancia de la corriente del manantial exterior.

$$F_m = BIl \operatorname{sen}\theta \qquad 19.4$$

Cuando el campo es paralelo al alambre, la fuerza es cero porque resulta sen 0° = 0. Cuando el campo es perpendicular al alambre, el módulo de la fuerza es

$$F_m = BIl \qquad 19.5$$

porque sen 90° = 1. Estos son los únicos casos que habremos de considerar.

OBSERVACIÓN. Por la Ec. 19.5 vemos que el tesla, la unidad de intensidad del campo magnético, está relacionada con el newton, el ampere y el metro por medio de

$$1\ \text{T} = \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{A} \times 1\ \text{m}} = 1\ \text{N/A-m} \qquad 19.6$$

La dirección de la fuerza magnética en una corriente es perpendicular tanto al campo magnético como a la corriente; se halla utilizando la mano izquierda, tal como se muestra en la Fig. 19.16. El dedo índice de la mano izquierda señala la dirección de la corriente mientras que el pulgar apunta en dirección del campo. Entonces el dedo corazón apunta en dirección de la fuerza. Esto es lo que se llama regla de la mano izquierda.

Por supuesto que un trozo de alambre que lleve corriente no puede existir por sí mismo; tiene que ser parte de un circuito mayor. Consideremos, por lo tanto, las fuerzas ejercidas sobre el circuito completo que aparece en la Fig. 19.17. Parte del circuito consiste en un cuadro rectangular de alambre de longitud l y anchura d colocado entre los polos de un imán en forma de C. El cuadro está conectado a un generador de fem a través de hilos conductores que se hallan fuera del imán. Por consiguiente, no hay fuerza magnética sobre estos hilos exteriores y de aquí que sólo haya que tener en cuenta las fuerzas ejercidas sobre el cuadro.

Además, dos de las cuatro secciones rectas del cuadro son paralelas al campo magnético, de modo que la fuerza magnética ejercida sobre ellas es cero. Las otras dos secciones son perpendiculares al campo, de modo que el módulo de la fuerza magnética ejercida sobre cada una de ellas es BIl. Las fuerzas ejercidas sobre estas secciones tienen igual módulo pero dirección opuesta, de modo que la fuerza total ejercida sobre el cuadro es cero.

Sin embargo, existe un par total que tiende a girar el cuadro alrededor del eje. El módulo del momento del par alrededor de un punto cualquiera del eje es

$$\begin{aligned}\tau_m &= \tfrac{1}{2}dF_m + \tfrac{1}{2}dF_m = dBIl \\ &= BIA\end{aligned}$$

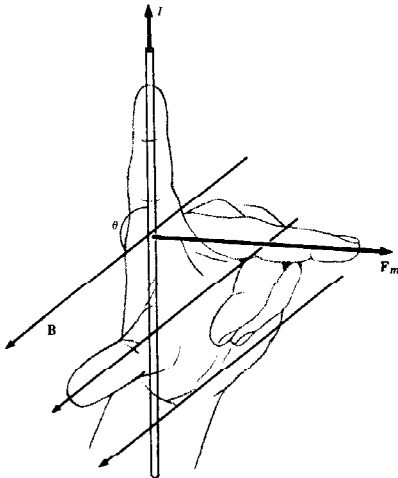


FIGURA 19.16
Fuerza sobre un trozo de alambre por el que circula una corriente en el seno de un campo magnético. Las direcciones del campo, la corriente y la fuerza están en relación unas con otras lo mismo que los dedos pulgar, índice y corazón de la mano izquierda.

en donde $A = ld$ es el área del cuadro. Si éste contiene n vueltas de alambre, el momento es

$$\tau_m = nBIA \qquad 19.7$$

Ejemplo 1. Un cuadro de 6 cm de alto por 2 cm de ancho se coloca en un campo magnético de 0,02 T. Si el cuadro contiene 200 vueltas y lleva una corriente de 50 mA, ¿cuál es el momento que actúa sobre él?

Por la Ec. 19.7, el momento es

$$\begin{aligned}\tau_m &= nBIA \\ &= (200)(0{,}02\ \text{T})(50 \times 10^{-3}\ \text{A})(12 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \\ &= 2{,}4 \times 10^{-4}\ \text{T-A-m}^2 \\ &= 2{,}4 \times 10^{-4}\ \text{N-m}\end{aligned}$$

en donde la última igualdad se obtiene utilizando la Ec. 19.6 para pasar de unidades eléctricas a mecánicas.

Aun cuando el momento magnético ejercido sobre una bobina es más bien pequeño, resulta suficiente para hacer girar una bobina suspendida cuidadosamente. Este hecho se utiliza en gran número de instrumentos que miden la corriente y la diferencia de potencial.

Un *galvanómetro*, que es un instrumento para medir corrientes muy pequeñas, consiste en una bobina de muchas vueltas, suspendida entre los polos de un imán en forma de C por medio de un hilo fino. La suspensión se hace de tal manera que cuando no hay corriente en la bobina, ésta se encuentra en la posición que aparece en la Fig. 19.17. Cuando hay una pequeña corriente en la bobina, el momento magnético τ_m sobre la bobina hace que ésta gire, retorciendo de este modo el hilo de suspensión. Al retorcerse el hilo, éste ejerce un momento de torsión antagónico τ_w proporcional al ángulo de rotación θ. Este momento se puede expresar como

$$\tau_w = k\theta$$

en donde k es una constante característica del hilo. En el equilibrio, la bobina queda en reposo formando el ángulo que hace que τ_w iguale a τ_m. Por lo tanto, la condición para que haya equilibrio, según la Ec. 19.7, es

$$k\theta = nBIA$$

de donde

$$I = \frac{k\theta}{nBA}$$

Así, pues, la corriente en el galvanómetro se determina midiendo el ángulo de rotación de la bobina. Si se utiliza un hilo de suspensión muy fino, este aparato dará desviaciones medibles con una corriente de 10^{-6} A.

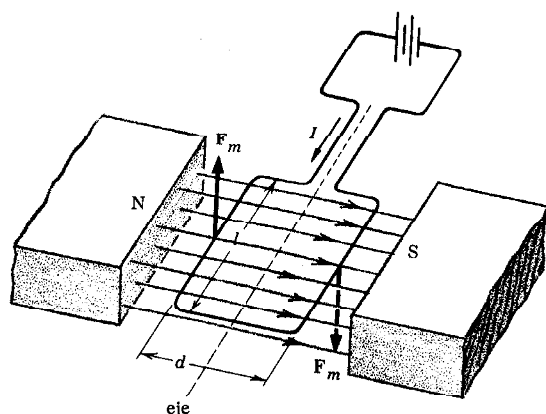


FIGURA 19.17
Cuadro rectangular en el campo magnético de un imán en C. En un galvanómetro el cuadro pende de un alambre fino.

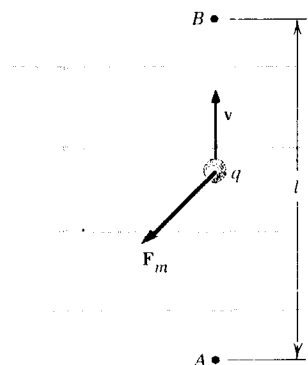


FIGURA 19.18
Fuerza sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético.

En el Apart. 20.2 se describen otros instrumentos de medida de la intensidad y del potencial.

Fuerzas sobre una carga en movimiento

Sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético se ejerce una fuerza magnética. De hecho, la fuerza magnética ejercida sobre un alambre por el que circula una corriente es precisamente la suma de las fuerzas magnéticas ejercidas sobre las cargas que fluyen por el alambre. La fuerza magnética sobre una sola partícula cargada, se puede hallar por la Ec. 19.5 considerando la intensidad media de la corriente de una partícula de carga q que se desplaza a velocidad v formando un ángulo recto con un campo magnético uniforme **B** (figura 19.18). La partícula recorre la distancia l desde el punto A hasta el B en el tiempo

$$t = \frac{l}{v}$$

de modo que la intensidad media entre A y B durante este tiempo es

$$I = \frac{q}{t} = \frac{q}{l/v} = \frac{qv}{l}$$

Pero, de acuerdo con la Ec. 19.5, la fuerza magnética ejercida sobre esta corriente durante este tiempo es

$$F_m = BIl = B\frac{qv}{l}l$$

luego la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una carga en movimiento es

$$F_m = Bqv \qquad 19.8$$

Al igual que la fuerza magnética ejercida sobre una corriente, esta fuerza es perpendicular al campo magnético y a la dirección del movimiento de la partícula.

En el Apart. 5.1 se vio que el trabajo realizado por una fuerza **F** sobre un objeto en movimiento es F_xd, en donde F_x es el módulo de la componente de **F** paralela a la dirección del movimiento del objeto y d es la distancia recorrida por el objeto. Como la fuerza magnética es siempre perpendicular a la dirección del movimiento de una partícula cargada, su componente paralela a la dirección del movimiento es cero y, por consiguiente, la fuerza magnética no realiza trabajo alguno sobre la partícula. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema trabajo-energía (Apart. 5.1), un campo magnético no puede cambiar la celeridad de la partícula, aunque sí puede cambiar la dirección de la partícula.

Los campos magnéticos se utilizan en muchos aparatos para variar y controlar la dirección de un haz de partículas cargadas. Por ejemplo, el haz de electrones en el tubo de imagen de un aparato de televisión se mueve a través de la pantalla por medio de campos magnéticos. Un tubo de televisión se diferencia en esto de un tubo de rayos catódicos, el cual utiliza campos eléctricos para desviar los electrones (Apart. 17.5).

De modo semejante, los electrones dispersados por una muestra en un microscopio electrónico son enfocados sobre una pantalla fluorescente por medio de campos magnéticos. La óptica de un microscopio electrónico se diferencia de la de un microscopio normal en que, en lugar de lentes de vidrio, se utilizan lentes magnéticas en forma de bobinas recorridas por una corriente.

El *espectrómetro de masas*, un instrumento que mide la masa de átomos y moléculas individuales, utiliza también un campo magnético para doblar un haz de partículas cargadas. En una cámara C del espectrómetro (Fig. 19.19) se coloca una muestra del material que se va a analizar; en esta cámara una corriente eléctrica forma iones arrancando electrones a algunos de los átomos de la muestra. Estos iones cargados positivamente son acelerados entonces hasta la placa P, que es mantenida a un potencial negativo grande $-V = V_P - V_C$ con respecto a C. Supongamos que cada átomo pierde solamente un electrón, de modo que la carga de un ion es $q = +e$. Entonces, si K_c es la energía cinética de un ion cuando sale de la cámara y K_p es su energía cinética cuando llega a P, la conservación de la energía (Ec. 5.13) nos da

$$K_P - K_C = U_C - U_P$$

donde $U_C = qV_C$ es la energía potencial del ion en C y $U_P = qV_P$ es su energía potencial en P. Por lo tanto tenemos

$$K_P = K_C + q(V_C - V_P) = K_C + eV$$

o, si K_c es aproximadamente nulo,

$$K_P = eV$$

Pero, por definición, $K_p = 1/2\ mv^2$, de modo que tenemos

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = eV$$

en donde m es la masa del ion y v es la velocidad del ion cuando llega a P. Así, el cuadrado de la velocidad del ion en P es

$$v^2 = \frac{2eV}{m} \qquad 19.9$$

Algunos de los iones que llegan a P, pasan por una abertura a una región en la que hay un campo magnético constante B, perpendicular a la dirección del movimiento de los iones. Este campo, que está dirigido hacia fuera del plano del diagrama de la Fig. 19.19, ejerce una fuerza magnética de módulo

$$F_m = Bqv = Bev \qquad 19.10$$

sobre cada ion. Como esta fuerza siempre es perpendicular a la dirección del movimiento del ion, el ion se mueve siguiendo una trayectoria circular de radio r y velocidad constante v. Como consecuencia, el ion tiene una aceleración centrípeta.

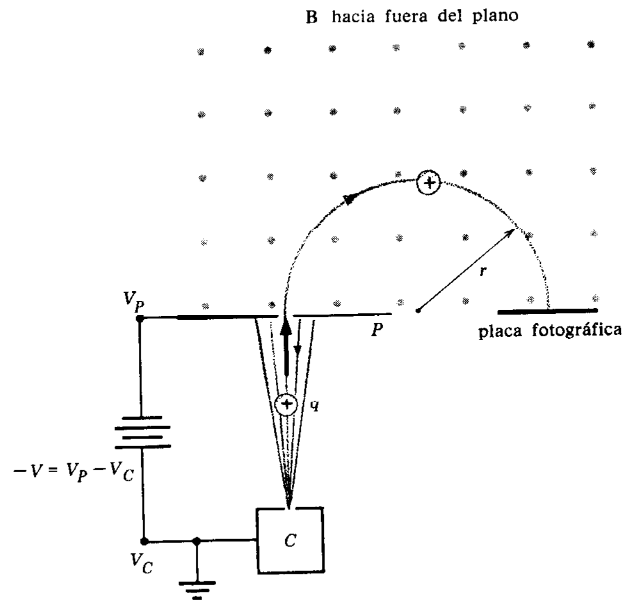


FIGURA 19.19
Espectómetro de masas. Los iones acelerados por la diferencia de potencial $-V$ se mueven en círculos de radio r en el seno del campo magnético B. El radio se determina por la posición de la huella que los iones dejan sobre la placa fotográfica.

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{19.11}$$

Por la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

vemos que las Ecs. 19.10 y 19.11 están relacionadas por medio de

$$Bev = m\frac{v^2}{r}$$

Por lo tanto, la masa del ion está relacionada con su velocidad y radio por

$$m = \frac{Ber}{v}$$

Elevando al cuadrado tenemos

$$m^2 = \frac{B^2e^2r^2}{v^2}$$

Entonces, utilizando la Ec. 19.9. para sustituir v^2 por $2eV/m$, tenemos

$$m^2 = \frac{B^2e^2r^2}{2eV/m} = \frac{B^2r^2em}{2V}$$

$$m = \frac{B^2r^2e}{2V} \tag{19.12}$$

La Ec. 19.12 da la masa m de un ion en función del potencial V, el campo magnético B y el radio r de la órbita del ion. El radio se obtiene midiendo la posición de la señal hecha por el ion cuando golpea una placa fotográfica. Aun cuando no se conozcan V y B, la Ec. 19.12 permite que la masa de un ion se mida con relación a otra.

Ejemplo 2. En un espectrómetro de masas, los iones de carbono describen un círculo de radio $r_C = 9{,}0$ cm y los de oxígeno describen un círculo de radio $r_O = 10{,}4$ cm. ¿Cuál es la masa de los iones de oxígeno? Suponemos que V y B son los mismos para ambos tipos de iones, por lo cual, según la Ec. 19.12, tenemos

$$\frac{m_O}{m_C} = \frac{r_O^2}{r_C^2} = \frac{10{,}4^2}{9{,}0^2} = 1{,}33$$

de modo que la masa de un ion de oxígeno es 1,33 veces la masa de un ion de carbono. Como la masa del carbono, por definición, es exactamente 12 u, la masa del oxígeno es†

$$m_O = 1{,}33 m_C = 1{,}33 \times 12 \text{ u} = 16 \text{ u}$$

Hay que conocer V y B, sólo si queremos relacionar las unidades de masa atómica a kilogramos.

Las masas de todos los átomos han sido determinadas con gran precisión con el espectrómetro de masas. Además, el instrumento se utiliza para detectar cantidades minúsculas de una sustancia en una muestra. El espectrómetro produce una sucesión de manchas en una placa fotográfica, cada una de las cuales corresponde a un átomo o molécula de una masa específica. Como para producir una mancha detectable sólo se necesitan unos pocos átomos, se detecta fácilmente la presencia de trazas de una sustancia de masa conocida.

19.4. INDUCCIÓN MAGNÉTICA

El descubrimiento de Oersted del electromagnetismo no sólo dio paso a la primera utilización práctica de la electricidad (telegrafía), sino que estimuló en gran medida la investigación científica en los fenómenos eléctricos y magnéticos. Michael Faraday (1791-1867), uno de los mayores científicos del siglo XIX, empezó sus investigaciones electromagnéticas tan pronto como supo del trabajo de Oersted. Faraday estaba persuadido de que si una corriente eléctrica produce un campo magnético, entonces un campo magnético debería ser capaz de producir de algún modo una corriente eléctrica. Se puso a probar sistemáticamente una combinación tras otra de alambres e imanes hasta que, en 1831, descubrió el efecto que había estado buscando.

Faraday descubrió la *inducción magnética*, que no es otra cosa que la creación de un campo eléctrico por un campo magnético. La inducción magnética, al igual que el electromagnetismo, es uno de los prin-

† Despreciamos la pequeña diferencia de 0,00055 u entre la masa de un átomo y la masa de su ion.

cipios fundamentales sobre los que está basada nuestra tecnología. Mientras que el electromagnetismo proporciona los medios por los que se puede convertir la energía eléctrica en trabajo mecánico, la inducción magnética proporciona los medios por los que el trabajo mecánico se puede convertir en energía eléctrica. Toda nuestra potencia eléctrica proviene de generadores que funcionan según el principio de la inducción magnética.

La inducción magnética se puede entender mejor por medio de una demostración de uno de los primeros experimentos de Faraday acerca de la inducción. Tal como se ve en la Fig. 19.20, se conecta una bobina de alambre a un galvanómetro sensible. Al desplazar un imán hacia la bobina, el galvanómetro se desvía, lo cual indica la presencia de una corriente en la bobina. El valor de la corriente depende de la velocidad con que se desplaza el imán y la corriente cesa siempre que el imán está en reposo. O sea, un imán en reposo cerca de una bobina no produce una corriente. Al apartarse el imán de la bobina, el galvanómetro se desvía en dirección opuesta, lo cual indica que la dirección de la corriente se ha invertido.

Otros experimentos demuestran que se induce una fem en una bobina cuando hay un cambio del flujo magnético que pasa a través de la bobina. El *flujo magnético* ϕ a través de una bobina se define como la componente B_n del campo magnético normal (perpendicular) a la bobina multiplicado por el área A de la bobina y el número de espiras n. Así, tenemos

$$\phi = nB_nA \qquad 19.13a$$

o bien

$$\phi = nBA \cos\theta \qquad 19.13b$$

donde θ es el ángulo entre el campo magnético **B** y la normal a la bobina (Fig. 19.21). Las unidades del flujo magnético son tesla-metro cuadrado ($T \cdot m^2$) o *webers* (Wb).

La ley de inducción magnética establece que cuando el flujo ϕ a través de una bobina cambia $\Delta\phi$ en el intervalo Δt, la fem inducida en

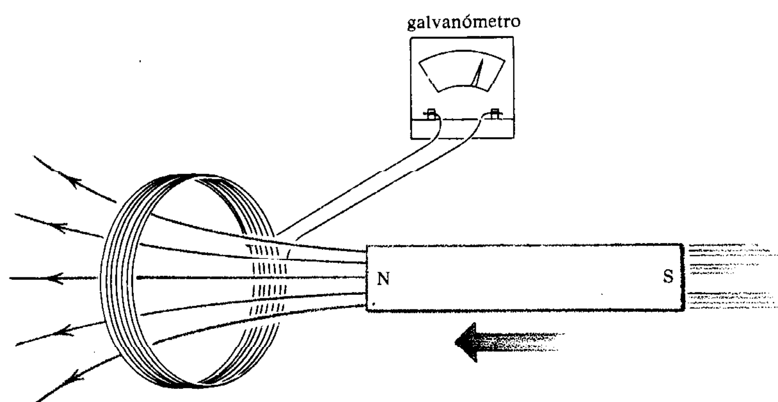


FIGURA 19.20
Inducción magnética. Se produce una corriente en la bobina cuando el imán se desplaza hacia ella.

la bobina durante este intervalo es

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \qquad 19.14$$

La fem inducida produce una corriente inducida I_i que a su vez origina un campo magnético inducido B_i y un flujo inducido ϕ_i. *La ley de Lenz establece que ϕ_i se opone siempre a $\Delta\phi$.* Es decir, si $\Delta\phi$ es negativo, indicando así una disminución del flujo a través de la bobina, ϕ_i es positivo; asimismo, si ϕ_i es positivo, indicando un aumento del flujo a través de la bobina, ϕ_i es negativo. Éste es el significado del signo menos de la Ec. 19.14.

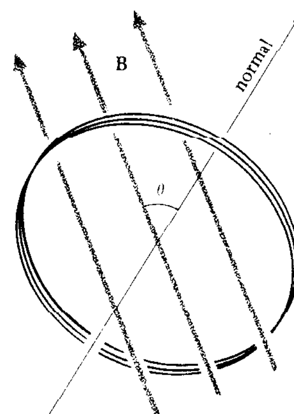


FIGURA 19.21
El flujo magnético ϕ a través de una bobina de n espiras y área A es nB_nA, donde $B_n = B \cos\theta$ es la componente del campo magnético paralela a la normal a la bobina.

Ejemplo. La componente perpendicular del campo magnético externo a través de una bobina de 10 espiras y radio 5 cm aumenta de 0 a 18 T en 3 s, tal como se muestra en la Fig. 19.22. Si la resistencia de la bobina es 2 Ω, ¿cuánto vale la intensidad inducida? ¿Cuál es el sentido de circulación de dicha corriente?
El flujo inicial ϕ_1 es cero y, según la Ec. 19.13*a*, el flujo final ϕ_2 vale

$$\phi_2 = nB_nA = (10)(18\ \text{T})(25\ \pi \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 1{,}41\ \text{Wb}$$

y por lo tanto $\qquad \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 1{,}41\ \text{Wb}$

Según la Ec. 19.14, la fem inducida es

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{1{,}41\ \text{Wb}}{3\ \text{s}} = -0{,}47\ \text{V}$$

El signo menos no tiene en este punto un significado especial, por lo cual lo suprimimos. El valor de la intensidad inducida es

$$I_i = \frac{}{R} = \frac{0{,}47\ \text{V}}{2\ \Omega} = 0{,}235\ \text{A}$$

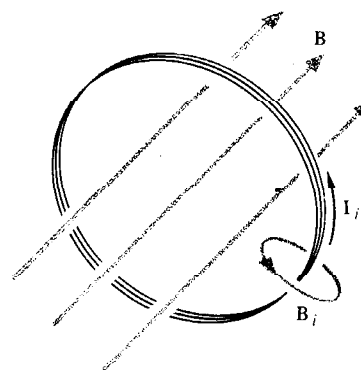


FIGURA 19.22
Cuando el campo externo **B** que pasa a través de la bobina aumenta, se induce una corriente I_i que produce a su vez un campo inducido $\mathbf{B}_i$ de dirección opuesta a la de **B** en el interior de la bobina.

Por la ley de Lenz, la corriente circula de tal modo que el campo magnético que produce se opone al cambio del flujo. Utilizando la regla de la mano derecha, vemos que si la corriente circulara en sentido contrario al de las agujas del reloj produciría un campo inducido **B** que se opondría al crecimiento del flujo externo a través de la bobina. Así pues, la corriente inducida circula en sentido contrario al de las agujas del reloj, como se muestra en la Fig. 19.22. Si el campo externo va de 18 T a 0, la corriente inducida será en el sentido de las agujas del reloj, para producir un campo magnético que se opondrá a la disminución del flujo externo.

Generadores eléctricos

En el Apart. 18.1 hablamos de cómo se puede producir una corriente eléctrica por medio de inducción eléctrica (Apart. 17.2). Sin embargo, toda la electricidad comercial se produce por medio de inducción mag-

nética. Un generador de inducción magnética, o *generador eléctrico*, es idéntico al motor de corriente alterna de la Fig. 19.15. Cuando este aparato se utiliza como motor, se conecta una fuente externa de corriente alterna a la bobina por medio de las escobillas. La alternancia de la corriente hace que la polaridad del electroimán se invierta de tal modo que las fuerzas ejercidas por el imán en C sobre el electroimán mantengan el inducido girando a velocidad constante.
Cuando el dispositivo de la Fig. 19.15 se utiliza como generador, el inducido gira gracias a una fuente externa de potencia, que normalmente es una turbina de vapor. El movimiento de la bobina dentro y fuera del campo magnético del imán en C, produce una corriente en el circuito externo. Cada vez que el inducido da media vuelta, la bobina invierte su orientación con respecto al campo magnético. Esto hace que la dirección de la corriente se invierta, de modo que, cuando gira el inducido, se produce una corriente alterna. Además, si el inducido gira a velocidad constante, la corriente variará de forma sinusoidal con el tiempo (Fig. 18.11).

OBSERVACIÓN. Un motor de corriente continua (Fig. 19.14) produce una corriente continua cuando su inducido da vueltas gracias a una fuente externa de potencia, porque el conmutador fraccionado en dos mitades invierte la conexión al circuito externo cada vez que se invierte la corriente.

Una central termoeléctrica consta de un generador de vapor, una turbina de vapor y un generador eléctrico (Fig. 22.6). El vapor es producido quemando un combustible fósil (carbón y petróleo) o por medio de un reactor nuclear (Apart. 22.3). El vapor es el medio por el que la energía del combustible, fósil o nuclear, se convierte en la energía mecánica de la turbina. La turbina mueve el inducido del generador eléctrico, el cual convierte la energía mecánica de la turbina en energía eléctrica. Así, si exceptuamos los combustibles utilizados para producir el vapor, tanto las centrales convencionales como las nucleares son idénticas por el modo de producir la electricidad.

Ondas electromagnéticas

El concepto de campo eléctrico y magnético fue desarrollado por Faraday como un modo gráfico de considerar los fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, el concepto de campo no fue empleado en general por los otros físicos hasta que Maxwell demostró como todas las leyes básicas de la electricidad y el magnetismo podían ser descritas por medio de cuatro ecuaciones en las que intervienen los campos eléctrico y magnético. Se conocen con el nombre de *ecuaciones de Maxwell* y son el punto de partida para todos los tratamientos modernos del electromagnetismo.
Tal como se formularon originalmente, cada una de las ecuaciones de Maxwell es una descripción cuantitativa de una de las cuatro leyes siguientes:

1. Las cargas eléctricas producen campos eléctricos (*ley de Coulomb*, Apart. 17.2).
2. No pueden existir polos magnéticos aislados (Apart. 19.1).
3. Las corrientes producen campos magnéticos (*electromagnetismo*,

Apart. 19.3).
4. Un campo magnético variable produce un campo eléctrico (*inducción magnética,* Apart. 19.4).

Maxwell, sin embargo, pronto se dio cuenta de que estas ecuaciones eran incompatibles con otra ley fundamental:

5. La carga total de un sistema aislado no puede variar (*conservación de la carga,* Apart. 17.2).

Maxwell pudo eliminar esta incompatibilidad con sólo adoptar otra ley más:

6. Un campo eléctrico variable produce un campo magnético.

Esta última ley, que es como la imagen de la inducción magnética, modifica una de las ecuaciones de Maxwell de tal modo que son ahora compatibles con la conservación de la carga.
Aunque el efecto de un campo eléctrico variable es demasiado pequeño para ser observado directamente, tiene profundas consecuencias. Puesto que si un campo eléctrico variable produce un campo magnético y un campo magnético variable produce un campo eléctrico, entonces existe la posibilidad de que se produzca una perturbación automantenida de campos eléctricos y magnéticos. Maxwell demostró que esa perturbación electromagnética actuaría como una onda que se propagara por el espacio a la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{4\pi K}{\mu_0}}$$

en donde $K = 9 \times 10^9$ N-m²/C² = constante eléctrica
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N-s²/C² = permeabilidad magnética

Con estos valores de las constantes, la velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{4\pi(9 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2)}{4\pi \times 10^{-7} \text{ N-s}^2/\text{C}^2}}$$
$$= \sqrt{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

que es idéntica a la velocidad de la luz.
En una onda electromagnética, los que se propagan por el espacio son los campos mismos, más que el desplazamiento de un medio. La Fig. 19.23 muestra cómo varían los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética sinusoidal. Los dos campos son perpendiculares a la dirección de propagación, de modo que la onda es transversal.
Como resultado de los trabajos de Maxwell, pronto se estableció que la luz es sólo una forma de radiación electromagnética de una cierta longitud de onda. Así, los siglos de investigación de los fenómenos eléctricos y magnéticos condujeron inesperadamente al descubrimiento de la verdadera naturaleza de la luz. Este descubrimiento es uno de los mayores triunfos de la física del siglo XIX.

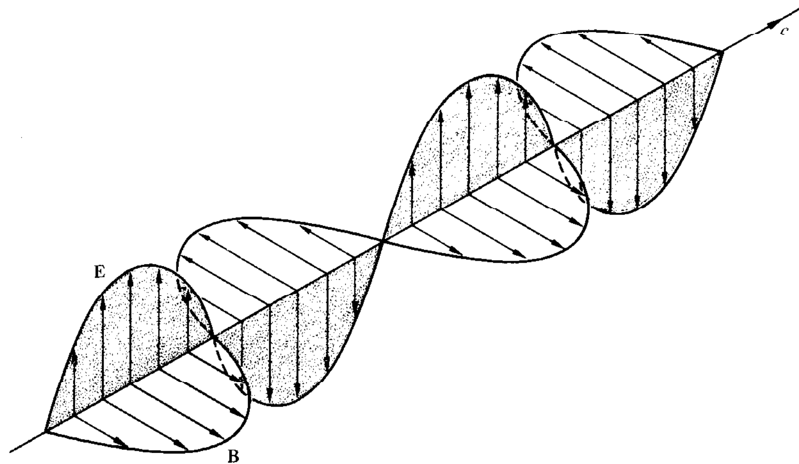


FIGURA 19.23
Una onda electromagnética. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda. Tanto E como B varían sinusoidalmente.

19.5. BIOMAGNETISMO

Hemos visto a lo largo de este libro que algunos animales pueden detectar toda una variedad de estímulos físicos nada corrientes, por ejemplo, el sonido ultrasónico, la corriente eléctrica y la polarización de la luz. Por lo tanto, parece razonable esperar que algunos animales puedan detectar un campo magnético. Esto se hace aún más probable si tenemos en cuenta que el campo magnético de la Tierra ha existido a lo largo de la historia de la evolución y que proporciona un medio seguro de determinar la dirección. Así, sería de gran utilidad para las aves migratorias el poder detectar este campo.

Estudios del comportamiento

Algunos experimentos llevados a cabo con pájaros parecen indicar que poseen la capacidad de orientarse con respecto a un campo magnético. En estos experimentos, el campo magnético terrestre se anula o se invierte mediante un par de *bobinas de Helmholtz*, que son dos bobinas circulares de radio a separadas una distancia d, tal como se muestra en la Fig. 19.24. Este dispositivo produce un campo magnético prácticamente uniforme en las proximidades del punto O, equidistante de ambas bobinas. Si la distancia d entre las bobinas es igual al diámetro $2a$ de dichas bobinas, el campo magnético en O es

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2\sqrt{2}a} \qquad 19.15$$

donde I es la intensidad de la corriente que circula por las bobinas y n es el número de espiras de cada una de tales bobinas.

En uno de estos experimentos [Wiltschko y Wiltschko (1972)], fueron capturadas aves migratorias y colocadas en jaulas. Estando en las jaulas todavía tendían por regla general a orientarse en la dirección de su vuelo migratorio, pero cuando se les colocaron grandes bobinas a cada

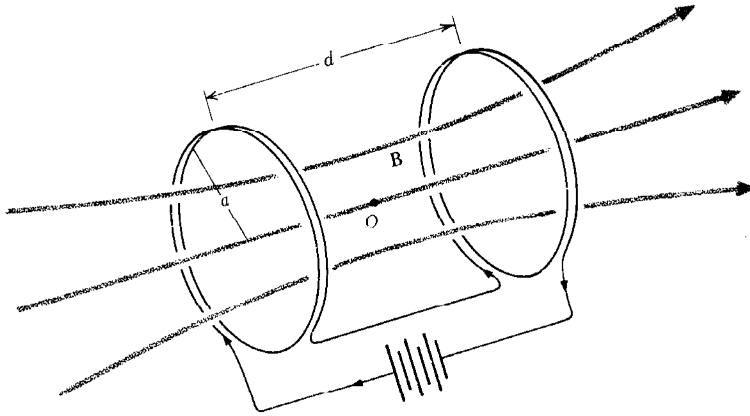


FIGURA 19.24
Un par de bobinas de Helmholtz produce un campo aproximadamente uniforme en las proximidades del punto medio O.

lado de la jaula para cambiar la dirección del campo magnético, las aves cambiaron su dirección de orientación.

Para entender completamente el problema de la orientación con respecto a un campo magnético, es importante comprender que el campo magnético no es una magnitud propiamente vectorial, con módulo y dirección, sino que es un *pseudovector*, que tiene módulo y línea de acción a lo largo de una línea sin una dirección determinada. Por ejemplo, el campo magnético en el centro de la espira circular de la Fig. 19.25 es perpendicular a la bobina, pero la dirección de dicha línea se asigna puramente por convención mediante la regla de la mano derecha y no es una propiedad intrínseca del campo. Así, un pájaro con una brújula podría determinar la línea norte-sur por la orientación de la aguja con respecto al campo magnético terrestre, pero no podría distinguir el norte del sur. Los seres humanos son capaces de hacer esta distinción una vez que han determinado el norte

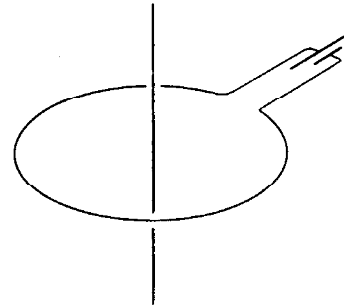


FIGURA 19.25
El campo de una espira es perpendicular al plano de la espira, pero su dirección a lo largo de la normal es puramente convencional (se determina por la regla de la mano derecha).

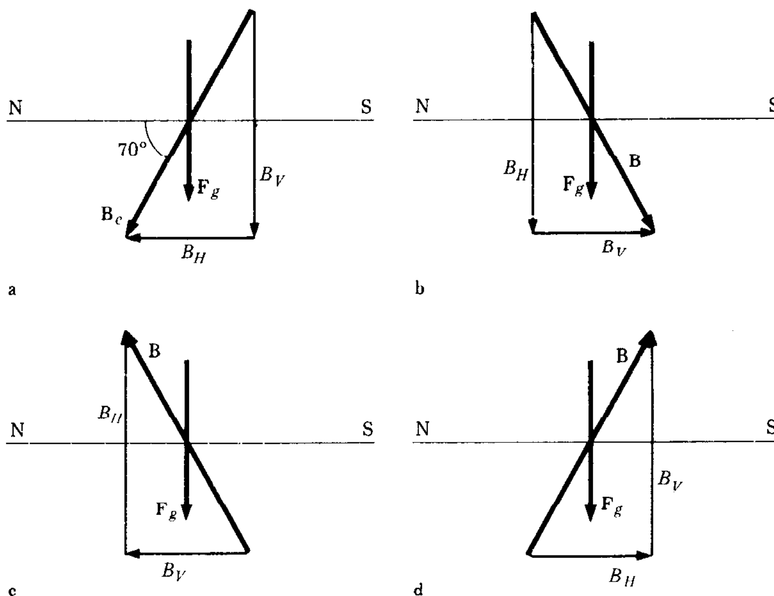


FIGURA 19.26
(*a*) El campo magnético de la Tierra $\mathbf{B}_e$ forma un ángulo de unos 70° con la horizontal en las latitudes medias. En el hemisferio norte, se inclina hacia abajo en la dirección norte. (*b*) Al invertir sólo la componente horizontal, el campo magnético se inclina hacia el sur. (*c*) Al invertir sólo la componente vertical, el campo se inclina hacia el sur. (*d*) Al invertir ambas componentes, el campo se inclina hacia el norte, tal como el campo sin perturbar (*a*).

sin una brújula, y pintando luego con un color diferente el brazo norte y el brazo sur de la aguja.

¿Cómo sabían entonces los pájaros de la jaula que la dirección del campo había sido invertida si dicho campo no tiene realmente una dirección intrínseca? El campo magnético terrestre **B**, en las latitudes medias tiene un módulo de 0,5 G aproximadamente y está a lo largo de una línea norte-sur que forma unos 70° con la horizontal (Fig. 19.26*a*). En el hemisferio norte, estas líneas se inclinan hacia abajo en la dirección norte. Los experimentos de Wiltschko y Wiltschko indican que los pájaros se sirven de este detalle para distinguir el norte del sur. Utilizando las bobinas de Helmholtz pueden invertirse por separado las componentes vertical y horizontal del campo magnético del interior de la jaula, dando lugar a las cuatro situaciones que se muestran en la Fig. 19.26. Como **B**, es un pseudovector, las puntas de las flechas de la Fig. 19.26 sólo son convencionales y, por consiguiente, los campos de las Figs. 19.26*a* y *d* son físicamente equivalentes. En efecto, se ha comprobado experimentalmente que los pájaros que se orientan hacia el norte con el campo magnético terrestre (Fig. 19.26*a*) se siguen orientando hacia el norte cuando se invierten ambas componentes del campo (Fig. 19.26*d*). Sin embargo, cuando sólo se invierte una de las componentes (Fig. 19.26*b* y *c*), los pájaros se orientan hacia el sur. Para un petirrojo europeo, al menos, el norte es la dirección en la que el campo magnético se inclina hacia el suelo.

El efecto de los campos magnéticos en la orientación de las palomas migratorias se ha investigado fijando unas bobinas de Helmholtz en el cuello y la cabeza de estas aves (Fig. 19.27) [Walcott (1974), Walcott y Green (1974)]. La corriente eléctrica que pasa por las bobinas es suministrada por una batería de poco peso atada a la espalda de las palomas. Las bobinas producen predominantemente un campo vertical que tanto puede ser paralelo como antiparalelo a la componente vertical del campo magnético terrestre, dependiendo de la dirección de la corriente. Cuando el campo de las bobinas es paralelo, el campo total en el interior de la cabeza de las palomas es como el campo de

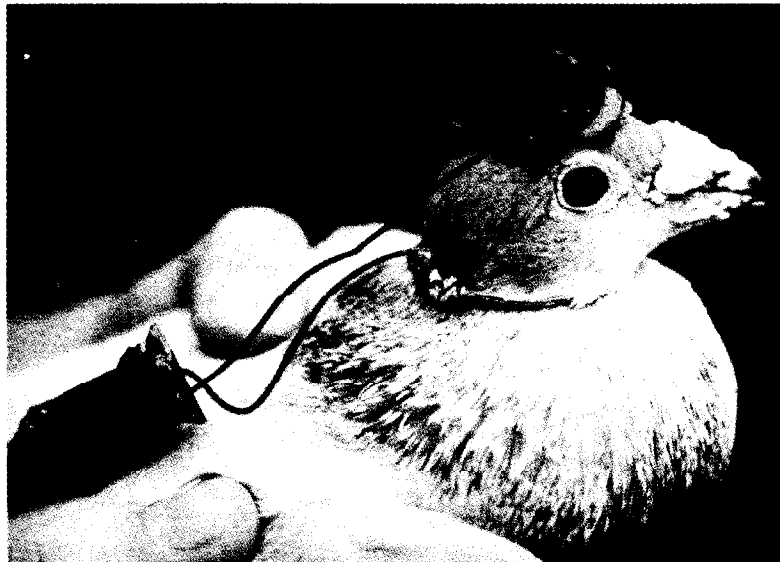


FIGURA 19.27
En experimentos con palomas libres, se fijan bobinas a la cabeza y al cuello de la paloma para modificar el campo magnético en las proximidades de la cabeza. La corriente es suministrada por una batería fijada a la espalda de la paloma.
(Por cortesía de C. Walcott.)

la Fig. 19.26*a* y las palomas vuelan hacia su destino en la forma habitual, incluso con cielo nublado. Cuando el campo de las bobinas es antiparalelo, el campo total en el interior de la cabeza de las palomas es como el de la Fig. 19.26*c* y las palomas siguen su destino habitual mientras el Sol es visible, pero invierten el sentido de su vuelo cuando el cielo se nubla.
La conclusión de estos experimentos es que las palomas migratorias, así como las abejas (Apart. 15.5) utilizan para orientarse el Sol mientras es visible, pero se sirven del campo magnético terrestre cuando no pueden ver el Sol. Así como el petirrojo europeo, la paloma migratoria parece utilizar la inclinación del campo magnético terrestre para distinguir el norte del sur.

Bases fisiológicas del biomagnetismo

El sentido magnético de los pájaros no se ha asociado por ahora a ningún tipo concreto de órganos o de células. De hecho, sin el uso de un material ferromagnético no hay explicación satisfactoria de cómo los pájaros pueden detectar un campo magnético. La fuerza magnética sobre las corrientes eléctricas de las neuronas parece demasiado pequeña para que pueda ser detectada, así como la fem inducida cuando un pájaro vuela en presencia de un campo magnético.
La posibilidad de una base ferromagnética para el sentido magnético ha de considerarse, por lo tanto, seriamente, y más aún en vista del descubrimiento reciente de magnetotaxia en cierta bacteria marina [Blakemore (1975)]. En el microscopio de contraste de fases (apartado 16.4) se observa que estas bacterias emigran hacia el lado norte de la muestra, a no ser que se invierta el campo magnético, en cuyo caso emigran en el sentido opuesto. En el microscopio electrónico se ve que cada bacteria contiene dos cadenas de partículas cristalinas opacas (Fig. 19.28), que, según los datos de la espectroscopia con rayos X, contienen un alto porcentaje de hierro. A pesar de que ciertamente es plausible que estas partículas sean la base de la magnetotaxia, no explican por sí solas cómo un organismo tan simple puede distinguir un sentido del campo magnético de su sentido opuesto.
El campo del biomagnetismo ha hecho un rápido progreso en los años recientes, pero plantea todavía más preguntas que respuestas.

Campos magnéticos del cuerpo humano

La actividad eléctrica de los nervios y los músculos origina corrientes eléctricas en el cuerpo humano (Apart. 18.5). En los sitios en que estas corrientes llegan a la superficie del cuerpo producen diferencias de potencial que pueden medirse mediante electrodos aplicados a la piel. Un electrocardiograma (ECG) es la representación gráfica en función del tiempo de la diferencia de potencial producida por el corazón, y un electroencefalograma (EEG) es la representación gráfica en función del tiempo de la diferencia de potencial producida por el cerebro. El ECG es un instrumento indispensable para la detección de las enfermedades del corazón, así como el EEG es muy útil para la detección de algunos trastornos cerebrales.

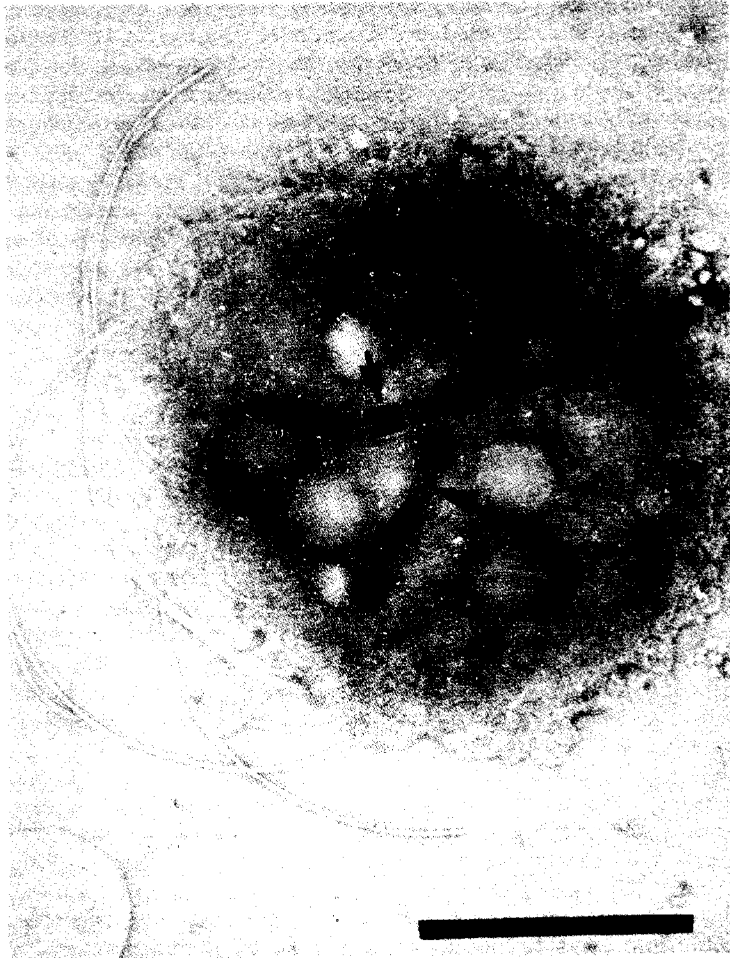


FIGURA 19.28
Fotomicrografía electrónica de una bacteria magnetotáxica que muestra dos cadenas de partículas opacas que contienen hierro. La barra tiene 0,5 μm de largo.
(Por cortesía de R. Blakemore.)

El problema de las medidas eléctricas de este tipo, sin embargo, es que los potenciales de la superficie se relacionan sólo de una manera indirecta con la actividad eléctrica de un órgano interno. Ello se debe a que la piel conduce tan mal la electricidad que sólo una pequeña fracción de la corriente generada por el órgano alcanza la superficie. Para poder estudiar más directamente la corriente de los órganos, se han desarrollado recientemente instrumentos que pueden detectar el campo magnético producido por dichas corrientes [Cohen (1975)].

La corriente relativamente intensa del corazón produce en el pecho un campo magnético de aproximadamente unos 1×10^{-6} G, y las corrientes algo menos intensas del cerebro producen en las proximidades de la cabeza un campo magnético de unos 3×10^{-8} G. Estos campos son tan débiles comparados con el de la Tierra (0,5 G) o incluso con los campos producidos por las corrientes de la instalación eléctrica de un edificio (5×10^{-4} G), que se necesitan técnicas especiales para poderlos detectar.

Una de estas técnicas es colocar al paciente en una habitación aislada de los campos magnéticos externos mediante paredes de hierro. Una

segunda técnica consiste en medir la diferencia entre los campos magnéticos en dos puntos próximos al cuerpo. Los campos de fuentes distantes serán esencialmente los mismos en ambos puntos, por lo cual se anularán al restar ambos campos, mientras que el campo del cuerpo, que varía considerablemente de un punto al otro en las proximidades del cuerpo, no se anulará en dicha sustracción. Una tercera técnica aprovecha la circunstancia de que la mayor parte del campo de fondo es constante con el tiempo, por lo cual se distingue fácilmente de la señal del cuerpo, que varía rápidamente con el tiempo.

La Fig. 19.29 muestra un magnetocardiograma (MCG) hecho en un punto situado directamente sobre el corazón, y un electrocardiograma típico. Los dos cardiogramas muestran estructuras semejantes pero con magnitudes relativas diferentes. Actualmente se están llevando a cabo comparaciones sistemáticas de los ECGs y MCGs de los individuos sanos y enfermos para determinar la utilidad clínica del MCG.

Las medidas magnetoencefalográficas (MEG) son aún más difíciles que las medidas MCG ya que el campo magnético del cerebro es mucho menor que el del corazón. El valor del campo asociado con la actividad cerebral espontánea es de unos 3×10^{-8} G y el campo provocado por el estímulo visual es de unos 5×10^{-9} G. A pesar de este valor increíblemente pequeño, los investigadores han sido capaces de detectar el campo magnético producido por el cerebro de un individuo cuando se proyecta una imagen en una pantalla [Brenner et al. (1975)].

Se espera que las técnicas de detección de campos magnéticos muy débiles puedan mejorarse mucho en los años próximos, abriendo una nueva ventana sobre las funciones del cuerpo humano.

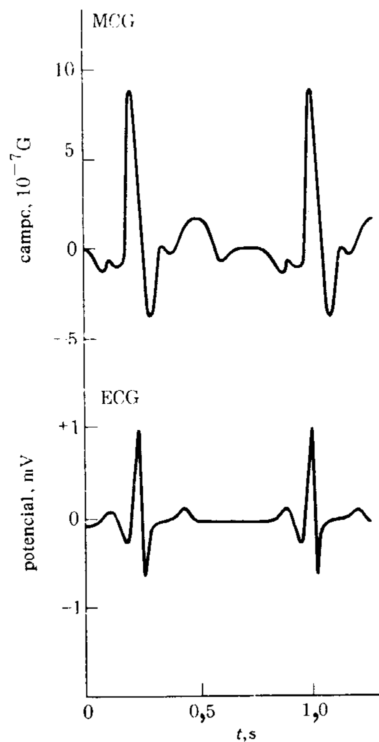


FIGURA 19.29
Un magnetocardiograma (MCG) y un electrocardiograma (ECG) de un corazón normal.

PROBLEMAS

1. ¿Cuál es el módulo del campo magnético en un punto que se halla a 2 cm de un alambre largo por el que circula una corriente de 7 A?
Resp. $0{,}7 \times 10^{-4}$ T.
2. El módulo del campo magnético en un punto situado a 8 cm de un conductor largo es $0{,}3 \times 10^{-4}$ T. (*a*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el conductor? (*b*) ¿Cuál es el módulo del campo en un punto situado a 24 cm del mismo?
3. Un alambre largo por el que circula una corriente de 15 A produce un campo magnético de $0{,}35 \times 10^{-4}$ T en un punto cercano. ¿Cuál sería el módulo del campo en este punto si la intensidad de la corriente fuese de 20 A?
Resp. $0{,}467 \times 10^{-4}$ T.

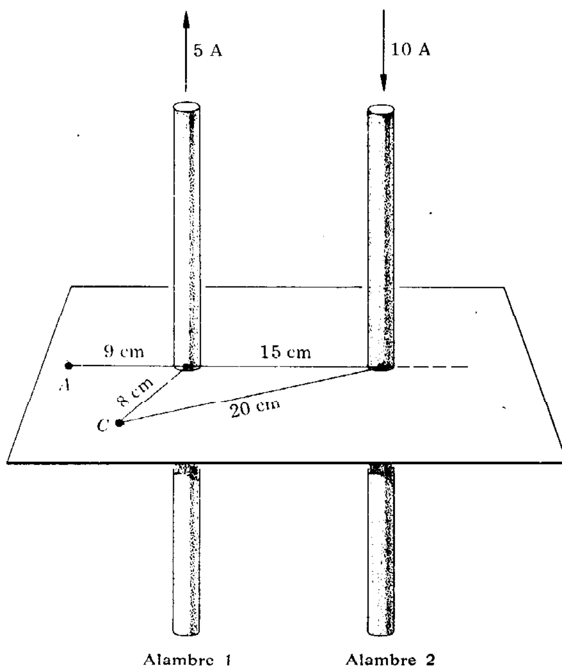


FIGURA 19.30
Problemas 5, 6 y 15.

4. (*a*) Demostrar que 1 T = 1 kg/C-s. (*b*) Demostrar que μ_0 tiene las unidades $N/A^2 = kg\text{-}m/C^2$.
5. La Fig. 19.30 muestra dos alambres largos paralelos separados una distancia de 15 cm. En el alambre 1 hay una corriente de 5 A y una corriente opuesta de 10 A en el alambre 2. (*a*) Hallar el campo magnético total en el punto *A* sobre la línea de unión de los alambres. El punto *A* está a 9 cm del alambre 1 y a 24 cm del alambre 2. (*b*) ¿En qué punto de la línea que une los alambres es nulo el campo magnético?
Resp. (*a*) $0{,}278 \times 10^{-5}$ T; (*b*) 15 cm del alambre 1.
*6. Hallar el campo magnético total en el punto *C* producido por las dos corrientes de la Fig. 19.30. El punto *C* se halla a 8 cm del alambre 1 y a 20 cm del alambre 2. (*Sugerencia:* El campo total en un punto es la suma vectorial de los campos debidos a cada alambre por separado. Hacer un dibujo a escala para determinar la dirección de estos campos.)
7. La Fig. 19.31 muestra dos largos alambres paralelos separados una distancia de 18 cm. En el alambre 1 hay una corriente de 8 A y en el alambre 2 hay otra de 12 A. (*a*) Hallar el campo magnético total en el punto *A* que se halla sobre la línea que une los alambres y a 3 cm del alambre 1 y 15 cm del alambre 2. (*b*) ¿En qué punto de la línea que une los alambres es cero el campo magnético?
Resp. (*a*) $3{,}73 \times 10^{-5}$ T; (*b*) 7,2 cm del alambre 1.
*8. Hallar el campo magnético total en el punto *C* producido por las dos corrientes de la Fig. 19.31. El punto *C* se halla a 10 cm del alambre 1 y a 22 cm del alambre 2 (ver Prob. 6).
9. Una bobina circular de 4 cm de radio tiene 250 espiras en las que la corriente es 20 mA. ¿Cuál es el campo magnético en el centro de la bobina?
Resp. 0,785 G.
*10. Una bobina de 20 cm de radio tiene que producir un campo de 0,4 G en su centro con una corriente de 0,25 A. ¿Cuántas es-

piras ha de tener la bobina?

11. La Fig. 19.32 muestra una bobina de 2 cm de radio, concéntrica con otra de 7 cm de radio. Cada bobina tiene 100 espiras. Con una corriente de 5 A en la bobina más grande, hallar las corrientes que se necesitan en la bobina pequeña para dar los siguientes valores del campo magnético total en el centro: (*a*) $9{,}0 \times 10^{-3}$ T, (*b*) $2{,}0 \times 10^{-3}$ T, (*c*) cero. En cada caso, determinar si la dirección de la corriente en la bobina pequeña es la misma que la de la corriente en la bobina grande u opuesta.
Resp. (*a*) 1,44 A misma; (*b*) 0,793 A opuesta; (c) 1,43 A opuesta.

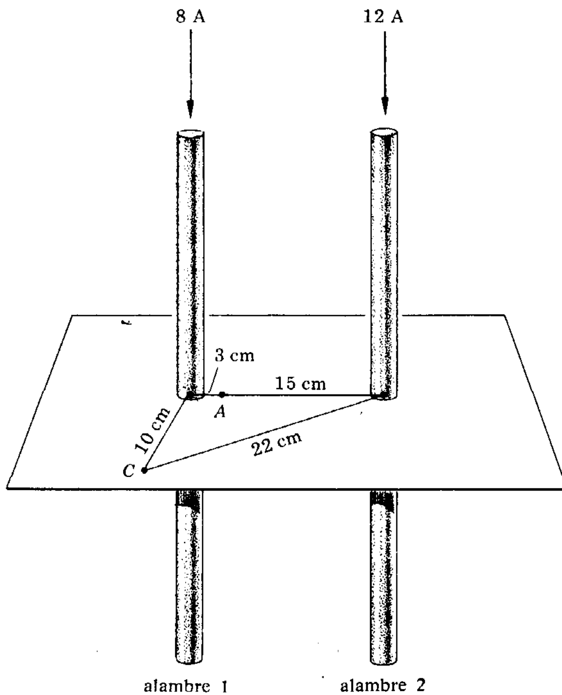


FIGURA 19.31
Problemas 7, 8 y 16.

12. La Fig. 19.32 muestra una bobina de 2 cm de radio concéntrica con una bobina de 7 cm de radio. Cada bobina tiene 100 espiras. Con una corriente de 3 A en la bobina pequeña, hallar el campo magnético total en el centro para cada una de las siguientes corrientes en la bobina grande: (*a*) + 7 A, (*b*) — 5 A, (*c*) — 12 A. El signo menos indica que la dirección de la corriente en la bobina grande es opuesta a la dirección de la corriente en la bobina pequeña.

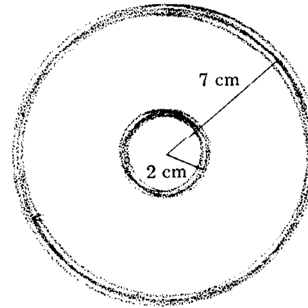


FIGURA 19.32
Problemas 11 y 12.

13. Un cuadro de alambre cuelga entre los polos de un imán, tal como aparece en la figura 19.33. La sección horizontal del cuadro tiene 8 cm de largo y el campo magnético es 3000 G. (*a*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el cuadro cuando hay en él una corriente de 5 A? (*b*) ¿Qué corriente se necesita para producir una fuerza de 2,5 N sobre el cuadro?
Rep. (*a*) 0,12 N; (*b*) 104 A.

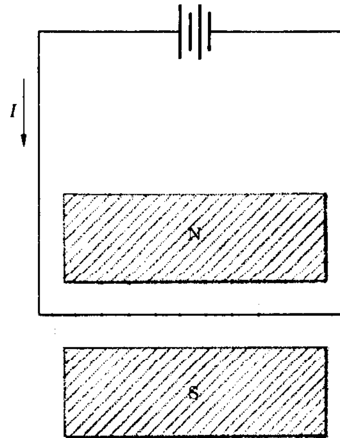


FIGURA 19.33
Problemas 13 y 14.

14. Un cuadro de alambre cuelga entre los polos de un imán, tal como aparece en la Fig. 19.33. Cuando la corriente en el cuadro es de 3 A, hay una fuerza magnética de 0,25 N en la sección horizontal del cuadro de 8 cm de longitud. (*a*) ¿Cuál es el módulo del campo magnético? (*b*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el cuadro cuando la corriente es de 35 A?
15. (*a*) Calcular la fuerza que ejerce el alambre 1 de la Fig. 19.30 sobre un trozo de 1 m de longitud del alambre 2. O sea, calcular la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre 2. (*b*) ¿Es la fuerza atractiva o repulsiva? (*Sugerencia:* Utilizar la Ec. 19.2 para hallar el campo magnético en el alambre 2 debido al alambre 1. Utilizar a continuación la Ec. 19.5 para hallar la fuerza sobre el alambre 2.)
Resp. (*a*) $6{,}67 \times 10^{-5}$ N; (*b*) repulsiva.
16. Repetir el problema 15 para los alambres de la Fig. 19.31.
17. (*a*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre un ion de carbono con una sola carga que se mueve a una velocidad de 3×10^5 m/s en ángulo recto con un campo magnético de 7500 G? (*b*) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del ion? (*c*) ¿Cuál es el radio del círculo en el que se mueve el ion?
Resp. (*a*) $3{,}6 \times 10^{-14}$ N; (*b*) $1{,}81 \times 10^{12}$ m/s^2; (*c*) 4,97 cm.
18. Un ion con una sola carga de masa desconocida se mueve en un círculo de radio 12,5 cm en un campo magnético de 12000 G. El ion fue acelerado por una diferencia de potencial de 7000 V. ¿Cuál es la masa del ion?
19. El carbono natural consta de dos tipos de átomos que tienen las mismas propiedades químicas, pero masas diferentes (estos átomos se llaman *isótopos;* ver el Apart. 22.1). La masa del isótopo más abundante del carbono es exactamente 12,0000u. Cuando se coloca carbono en un espectrómetro de masas, se forman dos líneas sobre la placa fotográfica que corresponden a estos isótopos. Supongamos que las líneas indican que el isótopo más abundante describió un círculo de 15,0 cm de radio, mientras que el isótopo más raro se movió en un círculo de 15,6 cm de radio. ¿Cuál es la masa del isótopo más raro?
Resp. 13,0 u.
20. Después de ser acelerado por una diferencia de potencial de 5000 V, un ion de carbono con una sola carga se mueve describiendo un círculo de 21 cm de radio en el campo magnético de un espectrómetro de masas. ¿Cuál es el módulo del campo?
21. Una muestra que contiene carbono (12 u), oxígeno (16 u) y un elemento desconocido se coloca en un espectrómetro de masas. Las líneas del carbono y el oxígeno están separadas por 2,250 cm sobre la placa fotográfica y el elemento desconocido produce una línea entre ellas que está a 1,160 cm de la línea del carbono. ¿Cuál es la masa del elemento desconocido?
Resp. 14 u.
22. En un espectrómetro de masas se coloca una muestra que contiene azufre (32 u), manganeso (55 u) y un elemento desconocido. Las líneas del azufre y el manganeso tienen una separación de 3,20 cm y el elemento desconocido forma una línea entre ellas a 1,07 cm de la línea del azufre. ¿Cuál es el nombre del elemento?
23. Se equipa una paloma con un par de bobinas de Helmholtz de 3,0 cm de diámetro, separadas una distancia de 3,0 cm. Cada bobina tiene 200 espiras. ¿Qué intensidad de corriente se requiere para producir un campo de 0,5 G en el punto medio entre ambas bobinas?
Resp. 8,4 mA.
24. Un par de bobinas de Helmholtz de 2 m de diámetro están separadas una distancia de 2 m. Cada bobina tiene 50 espiras. ¿Cuál es el campo magnético en el punto medio entre las bobinas cuando la corriente es de 5 A?

BIBLIOGRAFÍA

BLAKEMORE, Richard: «Magnetotactic Bacteria», *Science*, **190**:377 (1975). Informe sobre bacterias marinas que se mueven en respuesta a un campo magnético. Parece que estos organismos contienen partículas excepcionalmente ricas en hierro.

BRENNER, D., S. J. WILLIAMSON y L. KAUFMAN: «Visually Evoked Magnetic Fields of the Human Brain», *Science*, **190**:480 (1975). Observación de cambios transitorios produci-

Capítulo 20 Instrumentación

Existen instrumentos eléctricos para la medida de casi toda propiedad de un sistema físico, químico o biológico. Incluso a pesar de la gran variedad y complejidad de estos instrumentos, la mayoría de ellos están compuestos de las mismas tres unidades funcionales: un transductor, un amplificador y un medidor. Estudiando las propiedades generales de estas unidades funcionales y sus interrelaciones se puede tener una visión concisa de la instrumentación. Con esta perspectiva el diseño y manejo de un instrumento se puede comprender y valorar mejor.

20.1. PRINCIPIOS BASICOS DE LA INSTRUMENTACIÓN

Para poder medir una magnitud física, ésta debe ocasionar una cierta señal variable, habitualmente en forma de energía. Por ejemplo, para medir la fuerza ejercida por el bíceps, el brazo de una persona se engancha a una palanca de resorte, tal como se muestra en la Fig. 20.1*a*. Cuando el músculo se tensa, el resorte se desplaza y la aguja se mueve a lo largo de la escala. Como el brazo realiza trabajo sobre la balanza comprimiendo el resorte, se cede energía desde el sistema (brazo) al instrumento (balanza). La cantidad de energía cedida no tiene gran significación y se puede variar empleando resortes de diferente rigidez sin que ello afecte a la medida.

La balanza de resorte es un ejemplo de *transductor*, el cual es un dispositivo cualquiera que convierte una señal de una forma a otra. En este caso convierte el trabajo realizado por el brazo en la energía potencial del resorte comprimido. Esta energía potencial da lugar a un registro visible, a saber, la posición de la aguja a lo largo de la escala. El proceso total de almacenamiento de la información se muestra en forma de diagrama de bloques en la Fig. 20.1*b*. La línea con la punta de flecha indica el flujo de información.

Este ejemplo sencillo ilustra otros dos puntos que aparecen en la mayoría de las mediciones con instrumentos.

1. *Calibración.* La relación entre la señal de salida del transductor (lectura de la balanza) y su señal de entrada (fuerza aplicada) viene establecida por la *calibración*. Se aplican al dispositivo entradas de valor conocido y se registra la salida correspondiente. Se hace entonces una gráfica de las salidas en función de las entradas, y ésta se utiliza para marcar la escala del instrumento.
2. *Teoría.* La fuerza sobre la balanza está relacionada con la fuerza del bíceps por la teoría de la estática y la geometría de los músculos y huesos del brazo (ver Prob. 5, Cap. 3). A menudo un instrumento no mide directamente la magnitud de interés, sino que en su lugar mide una magnitud secundaria que está relacionada con

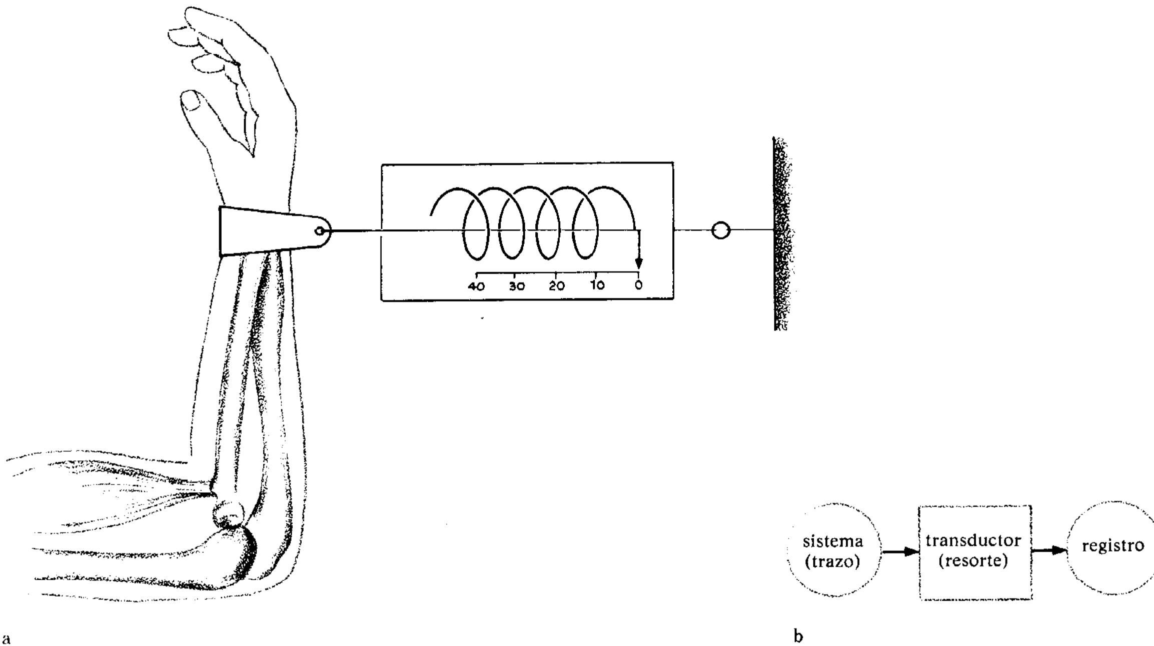


FIGURA 20.1
(a) La fuerza ejercida por el brazo se mide por la compresión del resorte. (b) Diagrama de bloques del sistema de almacenamiento de la información. El resorte es el transductor que transforma la señal procedente del brazo en un registro visible.

la magnitud que interesa por medio de una teoría más o menos bien establecida.

La tecnología para el tratamiento de señales eléctricas es mucho más avanzada y sofisticada que para las señales mecánicas, de modo que la mayoría de los transductores convierten la señal de entrada en una señal eléctrica, tal como una diferencia de potencial, o *voltaje*. A continuación el voltaje puede transformarse electrónicamente de diversas maneras, de las cuales la más importante es la *amplificación*. Un *amplificador* es un dispositivo que aumenta la intensidad de la corriente y el voltaje de la señal hasta un nivel que puede ser convenientemente medido. La amplificación, o *ganancia* g, es la razón de la señal de salida del amplificador a su señal de entrada.

La salida del amplificador puede llevarse entonces a un transductor de salida, o *medidor*, que hace que la señal pueda ser registrada, como sucede con la desviación de la aguja de un medidor. Todo este proceso aparece en forma de diagrama en la Fig. 20.2.

Las tres unidades funcionales básicas, transductor, amplificador y medidor aparecen en la mayoría de los instrumentos eléctricos. A veces las unidades son piezas diferentes del equipo, conectadas por medio de conductores, de modo que son evidentes sus distintos papeles en el proceso de almacenamiento de la información. Sin embargo, estas

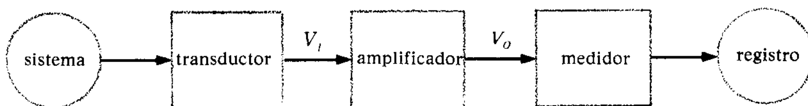


FIGURA 20.2
Diagrama de bloques de un instrumento generalizado. El transductor transforma la señal procedente de un sistema en una señal eléctrica, que es a continuación amplificada y medida.

unidades están construidas a menudo formando un solo instrumento. Estas unidades funcionales no están limitadas a los instrumentos eléctricos sino que pueden encontrarse en casi todos los instrumentos. Por ejemplo, en el termómetro clínico, el mercurio es el transductor que convierte la señal de entrada (energía interna) del sistema en su propia dilatación mecánica. El amplificador es el vástago de vidrio redondeado del termómetro, que aumenta varias veces la delgada columna de mercurio. El medidor en este caso es simplemente la escala calibrada grabada sobre el vástago.

En los apartados siguientes discutiremos el funcionamiento de algunos de los dispositivos eléctricos que sirven como unidades funcionales en instrumentos eléctricos.

20.2. MEDIDORES

Amperímetros y voltímetros

Los instrumentos que miden corriente y potencial, llamados respectivamente *amperímetros* y *voltímetros*, son *analógicos* o *digitales*. Un medidor analógico posee un indicador que se desplaza a lo largo de una escala que representa la magnitud medida. La Fig. 20.3 muestra un amperímetro analógico multiescala funcionando en la escala de 10 mA. Esto significa que la aguja se desvía completamente cuando pasa por el instrumento una corriente de 10 mA. Utilizando la escala de 10 mA, vemos que la desviación que aparece en la Fig. 20.3 representa una corriente de 3,25 mA. Si el amperímetro estuviese operando en la escala de 1 mA, emplearíamos la misma escala anterior pero dividiríamos la lectura por 10; así la desviación de la Fig. 20.3 corresponde a 0,325 mA en la escala de 1 mA. Si el amperímetro estuviese conectado a la escala de 2 mA, se podría leer directamente sobre dicha escala; la desviación de la Fig. 20.3 corresponde a 0,65 mA en la escala de 2 mA.

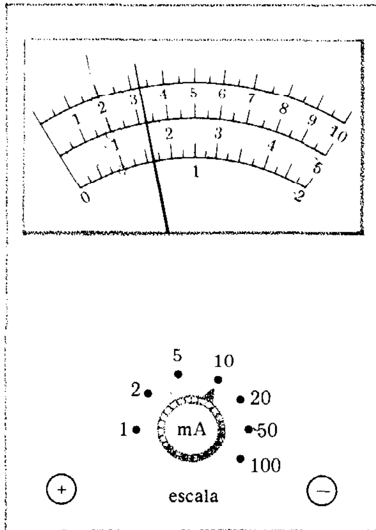


FIGURA 20.3
Amperímetro analógico multiescala. Cada cifra del dial es la corriente que producirá una desviación de toda la escala en esa posición.

Los medidores digitales son dispositivos electrónicos que representan la magnitud medida mediante números iluminados sobre una pantalla. El voltímetro digital de la Fig. 20.4 indica una diferencia de potencial de 23,7 mV. Los medidores digitales están reemplazando a los analógicos a causa de su fácil lectura y más bajo precio.

Un *galvanómetro*, descrito en el Apart. 19.3, es un amperímetro analógico sensible que consiste en una bobina de muchas vueltas suspendida por medio de un hilo fino entre los polos de un imán en *C*. Con una corriente *I* en la bobina, el campo magnético *B* ejerce sobre la bobina el momento (Ec. 19.7).

$$\tau_m = nBIA$$

donde *n* es el número de vueltas y *A* es el área de la bobina. En consecuencia, la bobina gira hasta que el par ejercido por la torsión del hilo de suspensión equilibra el momento magnético. Se ha mostrado en el Apart. 19.3 que en equilibrio el ángulo de desviación es proporcional a la corriente *I*.

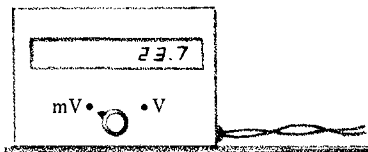


FIGURA 20.4
Voltímetro digital.

Un amperímetro portátil es un dispositivo que mide la corriente y es similar a un galvanómetro excepto en que la bobina está montada

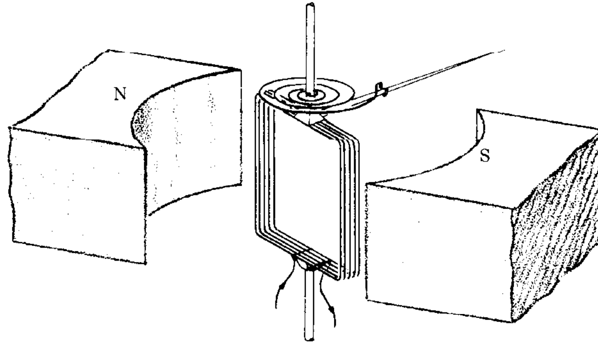


FIGURA 20.5
El mecanismo de un amperímetro. En equilibrio el resorte en espiral contrapesa el momento magnético sobre la bobina.

sobre un pivote alrededor del cual gira y en que, como se muestra en la Fig. 20.5, el par que se opone al giro lo ejerce un resorte en espiral. Cuando pasa una corriente por la bobina, ésta gira hasta que el momento magnético se hace igual al par ejercido por el resorte. Una aguja unida a la bobina indica la corriente por su posición a lo largo de una escala calibrada (Fig. 20.3).

Para medir la corriente en una rama de un circuito, se coloca un amperímetro en serie con la rama. La Fig. 20.6 indica la posición de un amperímetro que mide la corriente en la resistencia R_1. La resistencia del propio amperímetro debe ser tan pequeña como sea posible, de modo que el circuito no se vea alterado por su presencia. La escala del amperímetro puede variarse colocando una resistencia, llamada *shunt*, en paralelo con la bobina del amperímetro.

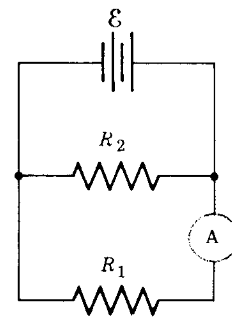


FIGURA 20.6
El amperímetro A en posición para medir la corriente en la resistencia R_1.

Ejemplo 1. La bobina de un amperímetro tiene una resistencia de 2 Ω, y el amperímetro se desvía completamente cuando pasa por la bobina una corriente de 1 mA. ¿Qué resistencia shunt se habría de utilizar para dar al amperímetro una desviación de 10 mA en toda la escala? ¿Cuál es la resistencia total del amperímetro en este caso?

En la Fig. 20.7 el amperímetro está representado por un shunt R_s en paralelo con la resistencia de la bobina R_c. Cuando la corriente total I en el amperímetro es 10 mA, queremos que la corriente I_c en la bobina sea de 1 mA. Por lo tanto, de acuerdo con la primera ley de Kirchhoff (Apart. 18.2) la corriente I_s en el shunt es

$$I_s = I - I_c = 9 \text{ mA}$$

A desviación completa la diferencia de potencial en los extremos de la bobina es

$$V = R_c I_c = (2\ \Omega)(1 \text{ mA}) = 2 \text{ mV}$$

la cual, por la segunda ley de Kirchhoff (Apart. 18.2), es también la diferencia de potencial en los extremos de R_s. Por lo tanto, tenemos.

$$V = R_s I_s \quad \text{o} \quad R_s = \frac{V}{I_s} = \frac{2 \text{ mV}}{9 \text{ mA}} = 2/9\ \Omega$$

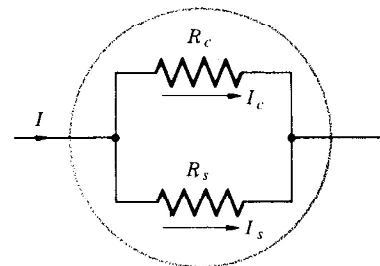


FIGURA 20.7
Una resistencia shunt R_s en paralelo con la resistencia de la bobina R_c de un amperímetro.

La resistencia total R del amperímetro viene dada por la Ec. 18.12:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_s} = \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{\frac{2}{9}\ \Omega} = \frac{10}{2\ \Omega} \qquad \text{o} \qquad R = 0{,}2\ \Omega$$

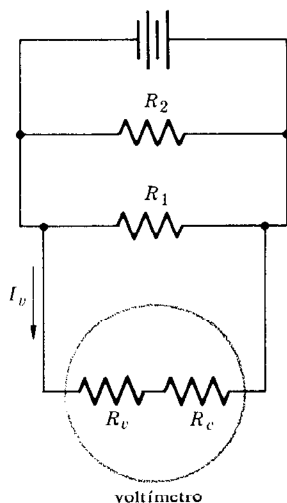


FIGURA 20.8
Un voltímetro en posición para medir el voltaje en los extremos de la resistencia R_1. El voltímetro consiste en una resistencia grande R_v en serie con la de la bobina R_c de un amperímetro.

Un *voltímetro* es un instrumento para medir la diferencia de potencial entre dos puntos. Como muestra la Fig. 20.8, consiste en un amperímetro con resistencia R_c en serie con una grande R_v. La caída de potencial V en la resistencia R_1 de la Fig. 20.8 se mide conectando el voltímetro en paralelo con R_1. Si la resistencia $R_v + R_c$ del voltímetro es muchísimo mayor que R_1, el voltímetro no modificará sensiblemente la corriente en R_1. Sin embargo, existirá a través del voltímetro una pequeña corriente

$$I_v = \frac{V}{R_v + R_c}$$

que hace que el medidor se desvíe. Como I_v es proporcional a V, la desviación del aparato de medida es proporcional a V. La escala de un voltímetro está controlada por el valor de la resistencia R_v en serie con el amperímetro.

Ejemplo 2. ¿Qué resistencia R_v se habrá de colocar en serie con el amperímetro descrito en el ejemplo 1 para dar un voltímetro con una desviación de 10 V en toda la escala?
A desviación completa habrá 1 mA en la bobina y 10 V de caída en las resistencias R_v y R_c. Por lo tanto tendremos

$$R_c + R_v = \frac{10 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 10\,000 \ \Omega$$

o sea

$$R_v = 10\,000 \ \Omega - R_c = 9998 \ \Omega$$

Osciloscopios

Voltímetros y amperímetros son los dispositivos eléctricos de medida más comunes y son muy útiles en sucesos independientes del tiempo. Sin embargo, muchas señales eléctricas varían rápidamente en el tiempo, y para medirlas se utiliza un osciloscopio.
Un osciloscopio consiste en un tubo de rayos catódicos (Apart. 17.5) en el que un haz de electrones incide sobre una pantalla fosforescente. En un instante cualquiera el haz produce sobre la pantalla una pequeña mancha luminosa, cuya posición es controlada por un par de placas perpendiculares entre sí (Fig. 17.19). Un voltaje aplicado a las placas horizontales desvía la mancha en sentido horizontal, mientras que un voltaje aplicado a las placas verticales desvía la mancha en sentido vertical.
En la mayoría de las aplicaciones la desviación horizontal está controlada por un circuito interno que obliga a la mancha a barrer la pantalla de izquierda a derecha a velocidad constante. Tan pronto como la mancha alcanza el borde derecho de la pantalla, es devuelto instantáneamente al borde izquierdo, desde donde comienza de nuevo a barrer la pantalla. La velocidad de barrido se ajusta por medio del *control de barrido*, que es un dial situado en la cara anterior del osciloscopio cuyas posiciones están indicadas en milisegundos por centímetro (ms/cm) o microsegundos por centímetro (μs/cm) (Fig. 20.9).

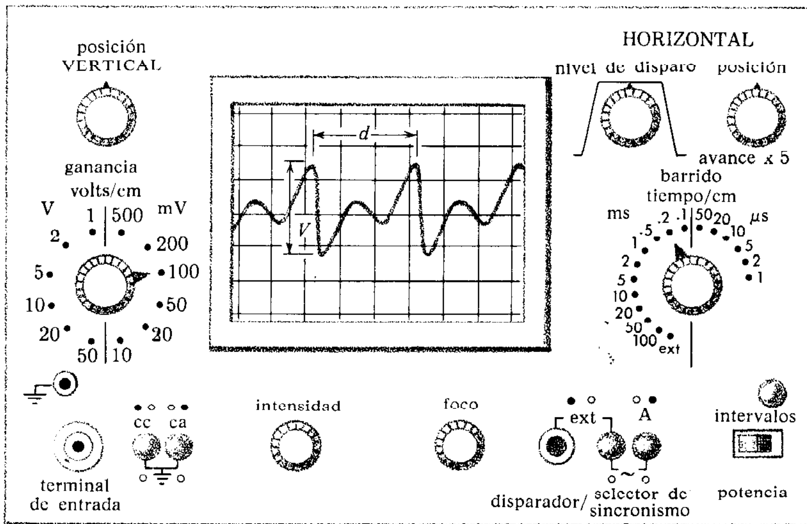


FIGURA 20.9
Vista frontal de un osciloscopio mostrando los controles principales.

Así, operando a 50 ms/cm la mancha se desplaza 1 cm en 50 ms, o sea a una velocidad de 20 cm/s.
La señal que ha de ser estudiada se conecta a las placas verticales por medio de los terminales de entrada (Fig. 20.9). Antes de llegar a las placas la señal pasa a través de un amplificador cuya ganancia es ajustada por el *control de ganancia vertical*. Las posiciones de este dial están marcadas en volts por centímetro (V/cm) o milivolts por centímetro (mV/cm). Por ejemplo, colocando 100 mV/cm, una desviación vertical de 1 cm indica una diferencia de potencial entre los terminales de entrada de 100 mV. En la posición de 20 mV/cm la misma desviación indica una diferencia de potencial de 20 mV. Así la ganancia del amplificador a 20 mV/cm es cinco veces la ganancia a 100 mV/cm.
Las líneas del retículo del tubo del osciloscopio están separadas 1 cm, de modo que operando sobre el control de barrido y el control de ganancia vertical se puede medir la frecuencia y la amplitud de una señal.

Ejemplo 3. ¿Cuáles son la frecuencia y la diferencia de potencial entre los dos picos de la señal mostrada en la Fig. 20.9?
La forma de la señal se repite cada $d = 3{,}0$ cm, y como el control de barrido está en 0,2 ms/cm, esa distancia representa un período de 0,6 ms o una frecuencia

$$f = \frac{1}{0{,}6 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 1667\ \text{Hz}$$

El voltaje entre picos V es 2,7 cm a una ganancia de 100 mV/cm, de modo que $V = 270$ mV.
Los materiales fosforescentes empleados en los tubos de rayos catódicos difieren en su persistencia, es decir, en el tiempo en que continúan brillando una vez que el haz de electrones ha dejado de incidir

sobre la pantalla. Las medidas electrónicas implican a menudo sucesos de alta frecuencia (~ 1000 Hz), y se han de usar, por tanto, altas frecuencias de barrido (~ 1 ms/cm). En este caso es necesario emplear un tubo de rayos catódicos con un fósforo de corta persistencia, de modo que cada haz se desvanezca antes de que aparezca la siguiente. Las medidas biológicas, por otro lado, implican a menudo sucesos de baja frecuencia (~ 1 Hz), y se han de usar por consiguiente bajas frecuencias de barrido (~ 1 s/cm). En este caso es necesario emplear un tubo de rayos catódicos con un fósforo de larga persistencia, de modo que la mancha al desplazarse lentamente parecerá una curva. De aquí que un osciloscopio diseñado para un fin puede no ser apropiado para otro.

20.3. AMPLIFICADORES

Un amplificador es un dispositivo que consiste en resistencias y transistores que pueden aumentar la corriente y el voltaje de una señal. Las resistencias y los transistores se puede obtener por separado y conectarlos a continuación para formar un amplificador básico, o bien se pueden obtener ya incorporados en un solo componente de estado sólido llamado *amplificador operacional*. Los componentes integrados, tales como los amplificadores operacionales, simplifican el diseño y construcción de circuitos electrónicos al reducir el número de componentes separados que intervienen. Pero para poder comprender estos dispositivos, se requiere algún conocimiento del amplificador básico.

Amplificador básico

Un *transistor* es un elemento de circuito activo de estado sólido, provisto de tres terminales que se utilizan para controlar y amplificar la corriente. Es una pieza, especialmente tratada, de germanio o silicio a la que se adosan tres terminales de hilo conductor, tal como aparece esquemáticamente en la Fig. 20.10. Cuando funciona normalmente, se mantiene una diferencia de potencial V_{CE} entre los dos terminales extremos *(emisor* y *colector)* por medio de una batería $\mathcal{E}_C$, tal como se ve en la Fig. 20.11. Cuando el terminal de en medio *(base)* se desconecta, el transistor no conduce; o sea, que no hay corriente entre el emisor y el colector. Sin embargo, si se saca de la base una pequeña corriente I_B por medio de una batería secundaria $\mathcal{E}_B$, el transistor se pone en funcionamiento y se establece una gran corriente I_C entre el emisor y el colector.* Así, la corriente entre el emisor y el colector es controlada por la corriente de la base I_B.

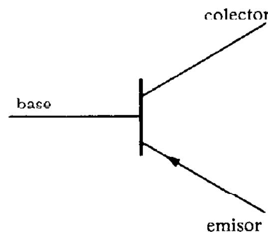


FIGURA 20.10
Diagrama esquemático de un transistor mostrando sus tres terminales.

El comportamiento de un transistor está plasmado en la Fig. 20.12. Este gráfico muestra, para diferentes valores de I_B, la corriente I_C en el colector en función de la diferencia de potencial $V_{CE} = V_E - V_C$ entre el emisor y el colector. Con $I_B = 0$, la corriente de colector I_C es esencialmente cero para todos los valores de V_{CE}; o sea, que el transistor

* El símbolo empleado para el transistor (Fig. 20.10) tiene una flecha sobre el emisor apuntando en la dirección de la corriente en estas circunstancias.

no es conductor. Para valores de I_B distintos de cero, hay una gran corriente del colector que aumenta cuando V_{CE} aumenta. Para un valor fijo de V_{CE}, la corriente de colector aumenta cuando aumenta la corriente de la base. Por ejemplo, con $V_{CE} = 7{,}5$ V e $I_B = 0{,}15$ mA, la corriente de colector es $I_C = 14{,}5$ mA. Si V_{CE} se mantiene a 7,5 V mientras se aumenta la corriente de base a 0,20 mA, la corriente de colector aumenta a 21 mA. De este modo, un cambio en la corriente de base de sólo 0,05 mA produce un cambio de 6,5 mA en la corriente de colector. Esta propiedad permite que un transistor actúe como un elemento de amplificación y de control.

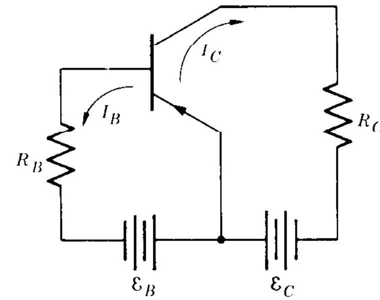


FIGURA 20.11
Circuito del amplificador básico. Una pequeña corriente en la base origina una corriente grande en el colector.

La Fig. 20.13 muestra un circuito diseñado para amplificar la salida de un generador de ca. Para entender el funcionamiento de este circuito, consideremos primeramente el circuito de la Fig. 20.11, que es semejante al de la Fig. 20.13, pero sin el generador. La resistencia R_B se elige juntamente con la batería $\mathcal{E}_B$ para dar una corriente en la base razonable, por ejemplo $I_B = 0{,}25$ mA. La corriente I_C y el potencial V_{CE} están relacionados por la curva $I_B = 0{,}25$ mA de la Fig. 20.12. Por ejemplo, si $V_{CE} = 10$ V, la intensidad de la corriente es 29 mA.

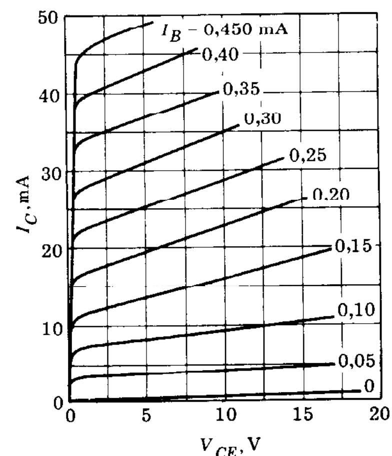


FIGURA 20.12
Características de un transistor. La variación de la corriente del colector I_C con el potencial del colector V_{CE} depende del valor de la corriente de la base I_B.

El potencial V_{CE} del transistor depende de la batería $\mathcal{E}_C$ y de la caída de potencial en la resistencia R_C. A partir de la segunda ley de Kirchhoff, se tiene

$$V_{CE} = \mathcal{E}_C - R_C I_C \qquad 20.1$$

Ésta es una segunda relación entre V_{CE} e I_C. Los valores de I_C y V_{CE} deben satisfacer simultáneamente esta ecuación y estar en la curva $I_B = 0{,}25$ mA de la Fig. 20.12.

Por ejemplo, supongamos que $\mathcal{E}_C = 16$ V y que $R_C = 400\ \Omega$. Entonces la Ec. 20.1 se convierte en

$$V_{CE} = 16\text{ V} - (400\ \Omega)I_C \qquad 20.2$$

que es la ecuación de una recta. Para determinar I_C y V_{CE}, se representa esta ecuación en una gráfica junto con las curvas $I_C V_{CE}$ del transistor (Fig. 20.14). La recta se halla fácilmente observando que cuando I_C es cero, V_{CE} es igual a 16 V y que cuando V_{CE} es cero, I_C es igual a 16 V/400 Ω = 40 mA. Así, la recta que representa la Ec. 20.2 y que recibe el nombre de *recta de carga*, une el punto de 16 V sobre el eje horizontal con el punto de 40 mA sobre el eje vertical. Todos los puntos que se hallan sobre esta recta satisfacen la Ec. 20.2 y todos los puntos que se encuentran sobre la curva $I_B = 0{,}25$ mA son posibles valores de I_C y V_{CE} cuando la corriente de base es 0,25 mA. La intersección de la recta y la curva en Q da los valores de I_C y V_{CE} que satisfacen simultáneamente estas dos condiciones. A partir de la Fig. 20.14 se obtiene que los valores de I_C y V_{CE} son 25,5 mA y 5,5 V, respectivamente. Éstos son los valores de funcionamiento *estático* del circuito.

Supongamos ahora que en los terminales de entrada del circuito de la Fig. 20.13 se aplica un voltaje alterno de la forma

$$V_i = V_{ip}\,\text{sen}\,2\pi ft$$

Este voltaje de entrada junto a la batería $\mathcal{E}_B$ producen la corriente de base

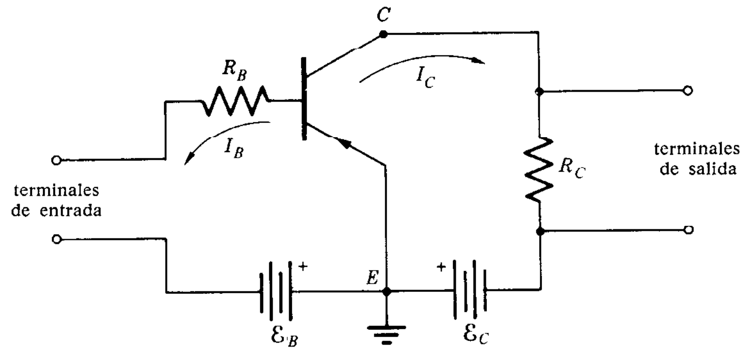


FIGURA 20.13
Amplificador básico. Cuando un potencial alterno se establece entre los terminales de entrada, un potencial alterno mucho mayor aparece en los terminales de salida.

$$i_B = I_B + I_i$$

que es la suma de la corriente de la batería I_B y la corriente de entrada

$$I_i = \frac{V_i}{R_B} = I_{ip}\,\text{sen}\,2\pi ft$$

donde la corriente máxima de entrada es

$$I_{ip} = \frac{V_{ip}}{R_B}$$

Por ejemplo, con $V_{ip} = 30$ mV y $R_B = 600\ \Omega$, la corriente máxima de entrada es

$$I_{ip} = \frac{V_{ip}}{R_B} = \frac{30\ \text{mV}}{600\ \Omega} = 0{,}05\ \text{mA}$$

Si $I_B = 0{,}25$ mA, la corriente de base total es entonces

$$i_B = 0{,}25\ \text{mA} + (0{,}05\ \text{mA})\ \text{sen}\ 2\pi ft$$

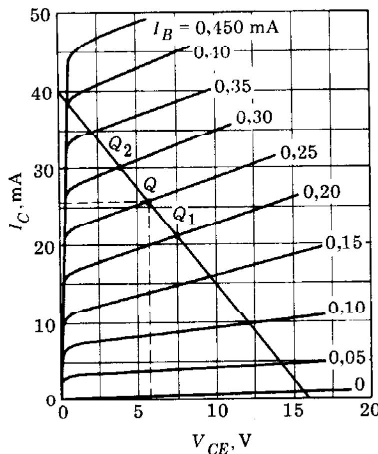


FIGURA 20.14
La recta de carga para el circuito de la Fig. 17.30 con $R_C = 400\ \Omega$ y $\mathcal{E}_C = 16$ V.

y por tanto oscila entre 0,20 y 0,30 mA. La Fig. 20.14 muestra que como consecuencia de esta oscilación el punto de funcionamiento varía entre Q_1 y Q_2 a lo largo de la recta de carga, y la corriente de colector varía entre 21 y 30 mA.

La corriente de colector es una mezcla de una corriente continua de 25,5 mA y una corriente alterna con un valor máximo de 4,5 mA:

$$i_C = 25{,}5\ \text{mA} + (4{,}5\ \text{mA})\ \text{sen}\ 2\pi ft$$

Por tanto, como una corriente máxima de entrada de 0,05 mA produce una corriente máxima de salida de 4,5 mA, la ganancia de corriente del amplificador es 4,5 mA/0,05 mA = 90. Del mismo modo, como el voltaje máximo de entrada es 30 mV y el de salida a través de R_C es

$$(400\ \Omega)(4{,}5\ \text{mA}) = 1800\ \text{mV}$$

la ganancia de voltaje es 1800 mV/30 mV = 60. Conectando la salida

de un amplificador a la entrada de otro se pueden obtener ganancias de hasta 10^5.

OBSERVACIÓN. Como la ganancia de voltaje es 60 y la de corriente es 90, la ganancia de potencia es (60)(90) = 5400. Los amplificadores difieren de los transformadores en que aumentan la potencia así como el voltaje de la señal de entrada. Un transformador sólo puede aumentar el voltaje de una señal si disminuye la corriente en una cantidad igual, de modo que no hay ganancia neta de potencia.

Amplificador diferencial

El amplificador básico (Fig. 20.13) tiene un voltaje constante $V_C = I_C R_C$ a través de sus terminales de salida aun cuando el voltaje en los terminales de entrada sea cero. Además, si el potencial de cada terminal de entrada se eleva en la misma cantidad por encima del potencial de tierra, la corriente de base variará y por consiguiente también lo hará el voltaje de salida. Es decir, el voltaje de salida responde a un cambio común en los potenciales de los terminales de entrada y no precisamente a la diferencia en sus potenciales.

Para muchos fines es conveniente disponer de lo que se llama un *amplificador diferencial*, el cual es sensible sólo a la diferencia en los potenciales de sus terminales de entrada y no a su potencial común. Un amplificador de este tipo se construye con dos transistores idénticos conectados en la forma indicada en la Fig. 20.15. La resistencia variable R se ajusta de tal manera que el voltaje en los terminales de salida (3 y 4) es cero cuando el voltaje en los de entrada (1 y 2) es cero.

Si se aplica una diferencia de potencial a los terminales de entrada, la mitad de la diferencia se aplica a la base de cada transistor pero con signo opuesto. Cada transistor amplifica su propio voltaje de base, produciendo voltajes amplificados de signo opuesto. Pero como los transistores están conectados a las resistencias R_{C1} y R_{C2} con polaridad opuesta, el potencial en los terminales de salida es la suma de los voltajes amplificados por cada transistor.

Por otro lado, si se aplica a los terminales de entrada 1 y 2 el mismo potencial, los potenciales de base tienen el mismo signo y los dos transistores producen voltajes opuestos a través de R_{C1} y R_{C2}. Si los transistores fuesen idénticos, la diferencia de potencial en los termi-

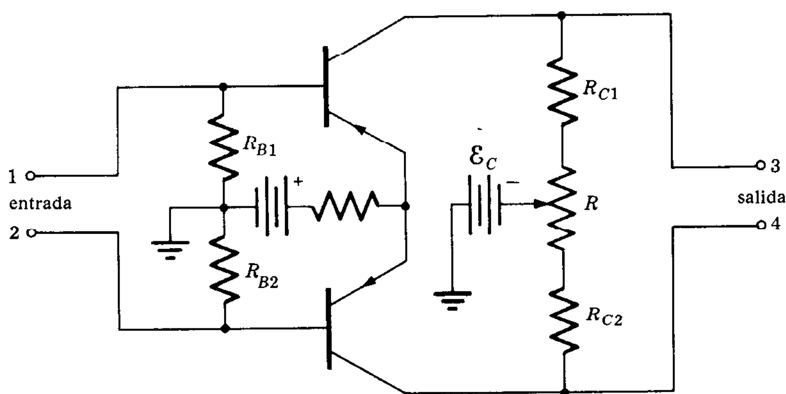


FIGURA 20.15
Circuito del amplificador diferencial. El potencial de salida es proporcional a la diferencia de potencial entre los terminales de entrada.

nales de salida sería cero. Como los transistores son muy similares pero no idénticos, el potencial de salida será pequeño pero no cero. La razón del potencial de entrada común al potencial de salida real se llama *razón de rechazo del modo normal* que habrá de ser tan grande como sea posible.

Los amplificadores diferenciales son esenciales en la mayoría de las medidas biológicas debido a que la señal de interés es habitualmente una diferencia de potencial muy pequeña sobrepuesta en un gran potencial común. Por ejemplo, en una medida ECG estamos interesados en la diferencia de potencial entre un punto del pecho del paciente y un punto de su brazo. Esta diferencia de potencial es de unos 20 mV y varía con una frecuencia de 1 Hz. Al mismo tiempo, a causa de la captación eléctrica proveniente de la instalación de la habitación, el potencial del cuerpo del paciente será alterno con una amplitud de 10 V y una frecuencia de 60 Hz. Para medir una diferencia de potencial de 20 mV en presencia de un potencial alterno común de 10 V, se debe utilizar un amplificador diferencial con una razón de rechazo del modo común superior a 1000.

Amplificador operacional

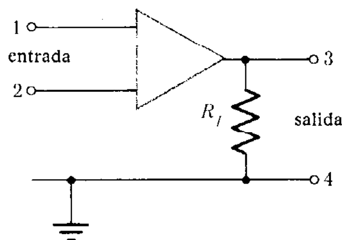


FIGURA 20.16
Diagrama esquemático de un circuito amplificador operacional.

Un *amplificador operacional* es un elemento de circuito de estado sólido que funciona como un amplificador diferencial completo. Se utiliza como un componente en la construcción de sofisticados dispositivos electrónicos.

En diagramas tales como el que muestra la Fig. 20.16 un amplificador operacional se simboliza por medio de un triángulo con dos terminales de entrada y uno de salida. El segundo terminal de salida está a menudo conectado a tierra, en cuyo caso o bien se dibuja aparte, como en la Fig. 20.16, o bien se omite por completo. El dispositivo real posee un cierto número de otros terminales para conectar las fuentes de alimentación necesarias (baterías), pero éstos se omiten habitualmente en los diagramas de circuitos.

La Fig. 20.17 muestra cómo el voltaje de entrada V_o (con respecto a tierra) varía con la diferencia de potencial $V_i = V_1 - V_2$ en los terminales de entrada. Para valores de V_i comprendidos entre $-V_{is}$ y $+V_{is}$ la respuesta es lineal, con una ganancia igual a la pendiente de la recta. Para valores de V_i superiores a V_{is} o inferiores a $-V_{is}$ el voltaje de salida se satura en los valores constantes V_{os} y $-V_{os}$, respectivamente. Es decir, un amplificador operacional no puede suministrar un potencial de salida mayor que V_{os} o menor que $-V_{os}$, cualquiera que sea el voltaje de entrada.

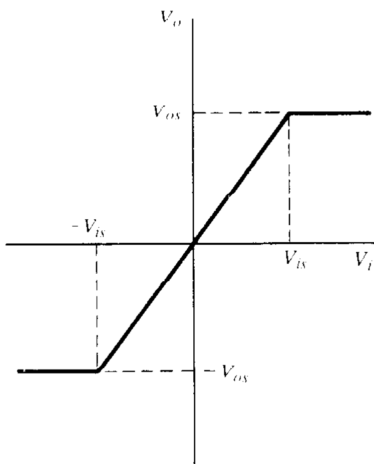


FIGURA 20.17
Características de entrada-salida de un amplificador operacional.

20.4. TRANSDUCTORES

Un *transductor* es un dispositivo que convierte una señal de una forma a otra. Para ser empleados en instrumentación eléctrica, la señal del transductor debe ser una señal eléctrica, tal como un potencial, que puede ser amplificada y medida con un voltímetro o presentada en un osciloscopio.

Los transductores utilizan todo un conjunto de fenómenos físicos para convertir señales de entrada acústicas, químicas, mecánicas, ópticas

y térmicas en señales de salida eléctricas. Aquí describimos tres de tales dispositivos, que deben servir de ejemplos de todos los otros.

Transductores de velocidad

La balistocardiografía (Apart. 6.2) mide el ligero retroceso del cuerpo humano que resulta del bombeo de la sangre por el corazón. El individuo yace sobre una plataforma sostenida por aire (Fig. 6.5) que se mueve con el cuerpo del individuo. La velocidad de la plataforma se mide con el dispositivo mostrado en la Fig. 20.18, que es precisamente un imán capaz de desplazarse por el interior de una bobina. El imán está unido a la plataforma, de modo que cuando ésta se desplaza, varía el flujo magnético a través de la bobina y se induce un voltaje en los extremos de la misma, de acuerdo con la Ec. 19.14. Este voltaje, que es proporcional a la velocidad del imán, es amplificado a continuación y llevado a un osciloscopio, que suministra el balistocardiograma mostrado en la Fig. 6.6.

Un micrófono magnético es un transductor de velocidad para transformar una señal acústica en una eléctrica. Consiste en una cinta metálica suspendida entre los polos de un imán, como muestra la Fig. 20.19. La cinta vibra, en respuesta a las ondas sonoras que inciden sobre ella, produciendo una diferencia de potencial entre sus extremos que es proporcional a su velocidad.

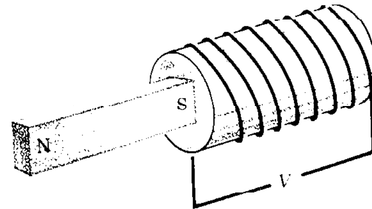


FIGURA 20.18
Transductor de velocidad. El movimiento del imán indica un voltaje entre los extremos de la bobina.

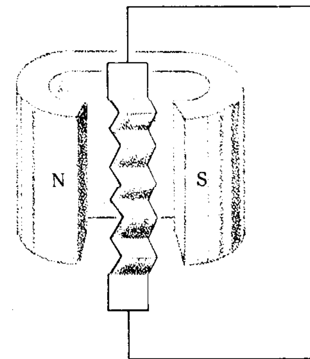


FIGURA 20.19
Micrófono magnético. La vibración de la cinta metálica produce un voltaje entre sus extremos.

Fototransductor

Un fototransductor produce una señal eléctrica en respuesta a la intensidad de la luz que incide sobre él. Un tipo de fototransductor, la *célula fotoconductora*, utiliza un material fotoconductivo, tal como el sulfuro de cadmio, que tiene la propiedad de que su resistencia disminuye al aumentar la intensidad de la luz.

En ausencia de luz, un material fotoconductivo es un aislador, lo que significa que todos sus electrones están ligados a los átomos y por tanto, son incapaces de establecer una corriente. La luz que incide sobre el material disocia parte de los electrones, que pueden entonces establecer una corriente. Cuando se imprime la luz, los electrones se reúnen pronto con sus átomos y el material vuelve de nuevo a ser no conductor.

Una célula fotoconductora consiste en un depósito de material fotoconductivo sobre una base cerámica, con electrodos en forma de cinta depositados en la parte superior del material fotoconductivo (figura 20.20). En la oscuridad total la resistencia de la célula puede llegar hasta 10^{13} Ω, pero en la luz ambiente normal la resistencia es de unos 10^{3} Ω.

Para medir la intensidad luminosa la célula fotoconductora se conecta a una batería y un amperímetro, como muestra la Fig. 20.21. Cuando aumenta la intensidad de la luz, la resistencia de la célula disminuye y aumenta la corriente en el circuito. Por tanto, la corriente aumenta al aumentar la intensidad luminosa.

Las células fotoconductoras se emplean en medidores fotográficos de luz que miden la intensidad de la luz reflejada por un individuo y en

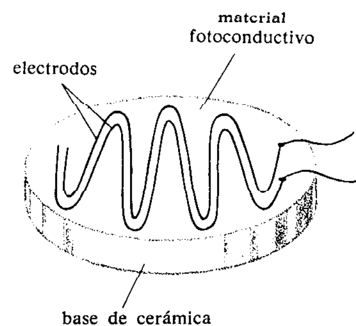


FIGURA 20.20
Célula fotoconductora. La resistencia entre los conductores depende de la intensidad de la luz incidente sobre el material fotoconductivo.

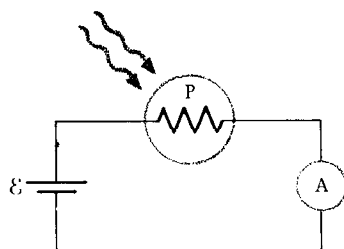


FIGURA 20.21
Célula fotoconductora en un circuito. La luz que incide sobre la célula P controla la corriente en el amperímetro A.

instrumentos que miden la concentración de una disolución por la cantidad de luz transmitida a través de ella.

Transductor térmico

La resistencia de la mayoría de los conductores varía con la temperatura. En un intervalo reducido de temperaturas la resistencia R_T a temperatura T puede escribirse

$$R_T = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

donde R_0 es la resistencia a temperatura T_0 y α es el *coeficiente de temperatura*, que es característico del material. Para metales, α es de unos 4×10^{-3}, mientras que para ciertos óxidos metálicos α es del orden de -50×10^{-3}. Es decir, para metales la resistencia aumenta ligeramente con la temperatura, en tanto que para óxidos metálicos disminuye marcadamente con la temperatura.
Un *termistor* es un transductor construido a partir de un óxido metálico. El transductor puede tener la forma de un alambre para medir la temperatura media de un volumen extenso, o la forma de una perla pequeña para medir la temperatura en un punto. El circuito es similar al de un fototransductor (Fig. 20.21): la variación en la temperatura del transductor origina una variación en la resistencia del circuito y, por tanto, una variación en la corriente que circula por el mismo.

PROBLEMAS

1. ¿Cuál sería la corriente en el amperímetro de la Fig. 20.3 si la aguja estuviese en la posición indicada pero con el dial en la escala de 50 mA?
Resp. 16,25 mA.
2. ¿Cuál sería la indicación de la aguja del amperímetro de la Fig. 20.3 si el dial estuviese en la posición 5 sin haber variado la corriente?
3. La resistencia de la bobina de un amperímetro es 5 Ω, y su aguja se desvía completamente cuando pasa por la bobina una corriente de 2 mA. (*a*) ¿Qué resistencia shunt se habrá de emplear para que la desviación de toda la escala del amperímetro corresponda a 50 mA? (*b*) ¿Cuál será la resistencia total del amperímetro en este caso?
Resp. (*a*) 0,208 Ω; (*b*) 0,200 Ω.

*4. Para proteger un amperímetro de los daños que puede ocasionar una corriente excesiva en la bobina, se coloca a veces una gran resistencia de protección R_p en serie con la resistencia de la bobina, del modo indicado en la Fig. 20.22. La resistencia shunt R_s está fabricada de un material que funde cuando la corriente que pasa por ella supera un cierto valor crítico I_s. Supongamos que $I_s = 2$ A, $R_c = 2$ Ω y que la aguja del amperímetro aparece completamente desviada cuando pasa por la bobina una corriente de 5 mA. (*a*) Hallar los valores de R_p y R_s que hacen que la aguja del amperímetro se desvíe por completo con una corriente de 100 mA y

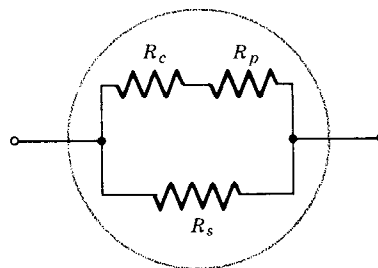


FIGURA 20.22
Problema 4.

que hacen que la resistencia shunt funda cuando se establece una diferencia de potencial de 10 V o más en los bornes del amperímetro. (*b*) Si el amperímetro se conecta accidentalmente a una diferencia de potencial de 100 V, ¿cuál será la corriente en la bobina?

OBSERVACION. Sin la resistencia de protección la bobina se quemaría si entre los terminales del amperímetro se estableciese un voltaje elevado.

5. La resistencia de la bobina de un amperímetro es de 3 Ω, y la aguja del instrumento sufre una desviación de toda la escala cuando pasa por la bobina una corriente de 6 mA. ¿Qué resistencia R_v se habrá de poner en serie con la bobina para hacer un voltímetro con una desviación de toda la escala de 50 V?
Resp. 8330 Ω.

*6. Una batería de 10 V está conectada a las resistencias R_1 y R_2 en la forma indicada en la Fig. 20.23. (*a*) Si $R_1 = R_2 = 500$ Ω, ¿cuál será la diferencia de potencial en los extremos de R_2? (*b*) Un voltímetro con una resistencia total de 5000 Ω se utiliza para medir la diferencia de potencial en R_2. ¿Qué marca el voltímetro?

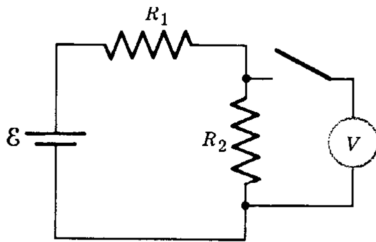


FIGURA 20.23
Problema 6.

OBSERVACIÓN. Como la resistencia de un voltímetro no es infinita, éste modifica hasta cierto punto el circuito que está midiendo.

7. ¿Cuál es el voltaje entre picos V y el período τ de la señal de osciloscopio que aparece en la Fig. 20.24 si la ganancia es de 200 mV/cm y el barrido de 50 ms/cm?
Resp. 0,42 V, 0,17 s.

8. Un potencial alterno con un voltaje máximo de 3 V y una frecuencia de 500 Hz se establece entre los terminales de entrada de un osciloscopio. Dibujar la traza de esta señal sobre la pantalla del osciloscopio cuando la ganancia es de 2 V/cm y el barrido de 0,5 ms/cm.

OBSERVACIÓN. Los cuatro problemas siguientes tratan del transistor con las características dadas en la Fig. 20.12.

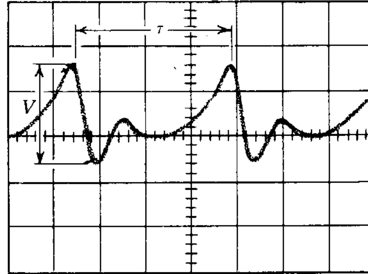


FIGURA 20.24
Problema 7.

9. ¿Cuál es la corriente de colector en un transistor cuando el potencial de colector V_{CE} es 7,5 V y la corriente de base es 0,40 mA?
Resp. 45 mA.

10. ¿Cuál debe ser la corriente de fase en un transistor para dar una corriente de colector de 25 mA cuando el potencial de colector V_{CE} es 10 V?

11. Hallar la diferencia de potencial (*a*) máxima y (*b*) mínima en los extremos de la resistencia R_c de 400 Ω del circuito de la Fig. 20.13 cuando el circuito está funcionando entre los puntos Q_1 y Q_2 de la figura 20.14.
Resp. (*a*) 8,4 V; (*b*) 12 V.

12. Trazar sobre la Fig. 20.14 la recta de carga para el circuito amplificador de la figura 20.13 con $\mathcal{E}_C = 18$ V y $R_C = 400$ Ω. Hallar el punto de funcionamiento estático cuando $I_B = 0{,}30$ mA. ¿Cuál es la ganancia de

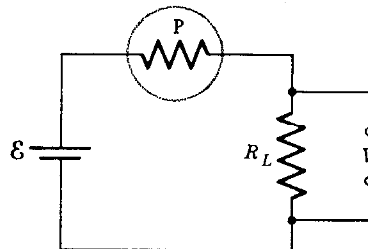


FIGURA 20.25
Problema 13.

una corriente alterna de entrada cuyo máximo es de 0,05 mA?

13. La señal de salida del circuito de célula fotoconductiva de la Fig. 20.25 es el potencial V en los extremos de la resistencia de carga R_L. Demostrar que V es inversamente proporcional a la resistencia R_p de la célula fotoconductiva dado que $R_L \ll R_p$.

BIBLIOGRAFÍA

LION, Kurts S.: «Elements of Electrical and Electronic Instrumentation», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1975. Una descripción simplificada y, sin embargo, completa de todo el campo de la instrumentación eléctrica y electrónica apropiado pada químicos, biólogos e investigadores biomédicos.

Parte 6: Fisica Moderna

FISICA MODERNA VI

Ya en 1875 se creía que la física se había desarrollado por completo. Las leyes de la mecánica (Parte I), la termodinámica (Parte III) y el electromagnetismo (Parte V) formaban un cuerpo coherente de conocimientos fundamentales que parecían incluir todas las leyes básicas del universo. Este conocimiento, llamado ahora *física clásica,* según el sentir de la época era capaz de explicar todos los fenómenos físicos, de tal modo que cuando Max Planck entró en la Universidad de Munich en 1875 alguien intentó desanimarle para que no siguiera la carrera de físicas porque «todos los descubrimientos importantes en física ya se habían hecho».

Contrariamente a esta apreciación, los 50 años siguientes demostraron ser los más interesantes y fructíferos en la historia de la física. Se llevaron a cabo descubrimientos extraordinarios en los campos de la física atómica y nuclear que no se podían entender con la física clásica. Se vio que se necesitaban nuevos principios y conceptos para reconciliar el comportamiento de electrones y átomos con el de objetos de tamaño ordinario. Las teorías que surgieron durante este período —relatividad y mecánica cuántica— constituyen la *física moderna,* que es un cuerpo coherente de conocimientos fundamentales que sustituye a la física clásica al discutir los fenómenos atómicos y nucleares, pero que es equivalente a la física clásica al tratar los fenómenos macroscópicos.

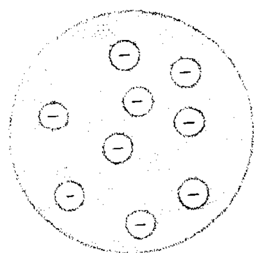


FIGURA 21.1
Modelo «budín de pasas» del átomo, anterior a 1911.

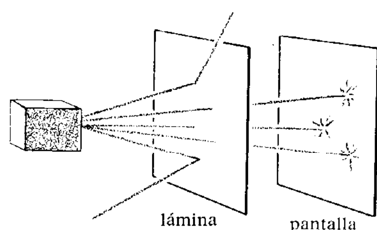


FIGURA 21.2
Experimento de dispersión de Rutherford. Las partículas alfa que parten de una fuente radiactiva apuntan en dirección a una delgada lámina de oro.
Las partículas desviadas son detectadas por la luz emitida al chocar con una pantalla fluorescente.

21.2. EL MODELO DE BOHR DEL ÁTOMO

Experimento de dispersión de Rutherford

A principios del siglo XX ya se sabía que un átomo tiene un diámetro de unos 10^{-10} m y que contiene un cierto número de electrones cargados negativamente. Como el átomo en su totalidad es neutro, se dedujo que debía contener una cantidad igual de carga positiva. Además se sabía que la masa de un átomo es miles de veces mayor que la masa de un electrón, de modo que la carga positiva debe constituir casi toda la masa de un átomo. Un modelo de átomo primitivo daba a entender que la carga positiva formaba un fluido continuo que llenaba el volumen del átomo en el que flotaban los electrones como «las pasas en un budín» (Fig. 21.1).

En 1911, Ernest Rutherford (1871-1937) experimentó este modelo bombardeando una delgada lámina de oro con partículas alfa, que son las partículas de alta velocidad cargadas positivamente emitidas por elementos radiactivos, como, por ejemplo, el radio (Apart. 22.2). Las partículas alfa, la mayoría de las cuales pasaron a través de la lámina sin desviación apreciable, fueron detectadas por la luz producida cuando chocaron con una pantalla fluorescente (Fig. 21.2). De vez en cuando, sin embargo, una partícula se desviaba con un gran ángulo y más o menos 1 partícula de cada 20 000 se desviaba en más de 90°. Esto era muy inesperado, ya que las partículas alfa son demasiado pesadas y demasiado rápidas para ser desviadas apreciablemente por un átomo compuesto de electrones y un fluido difuso cargado positivamente.

Rutherford sólo pudo explicar el número observado de desviaciones de gran ángulo suponiendo que casi toda la masa del átomo se concentra en un núcleo central de 10^{-15} m de radio. Este *núcleo* se halla cargado positivamente y, por lo tanto, ejerce una fuerza eléctrica repulsiva sobre una partícula alfa que pase cerca de él. Como el radio del núcleo es sólo 1/100 000 del radio del átomo, casi todas las partículas alfa pasan a través del átomo sin acercarse lo suficiente al núcleo, como para experimentar una fuerza apreciable. Sin embargo, las pocas que se acercan suficientemente al núcleo, experimentan una fuerza muy intensa y por consiguiente sufren una desviación de gran ángulo (Fig. 21.3).

En el modelo de átomo diseñado según el trabajo de Rutherford, se pensaba que los electrones daban vueltas en órbitas alrededor del núcleo, al igual que los planetas dan vueltas alrededor del Sol. La mayor parte del volumen de un átomo está lleno de electrones que dan vueltas, los cuales son demasiado ligeros para desviar una partícula alfa incidente. Los electrones se mantienen en órbitas alrededor del núcleo por la fuerza eléctrica de atracción ejercida sobre ellos por el núcleo, lo mismo que los planetas se mantienen en órbita alrededor del Sol por la fuerza de gravitación atractiva ejercida sobre ellos por el Sol.

El átomo más simple, el hidrógeno, sólo tiene un electrón en órbita alrededor del núcleo. Resulta atractivo tratar este caso como tratamos el caso de un satélite en órbita alrededor de la Tierra (Apart. 4.5, ejemplo 6). Supongamos que el electrón da vueltas alrededor del núcleo en una órbita circular de radio r (Fig. 21.4). La fuerza ejercida sobre el electrón es la fuerza eléctrica (Ec. 17.2)

$$F_e = K\frac{q_e q_n}{r^2}$$

en donde q_e y q_n son las cargas del electrón y del núcleo, respectivamente. La carga del electrón se designa como —e y el núcleo tiene la carga opuesta $+e$, por lo tanto

$$F_e = -K\frac{e^2}{r^2}$$

El signo menos indica que ésta es una fuerza atractiva dirigida hacia el núcleo, tal como se ve en la Fig. 21.4.

Un electrón que se mueve a velocidad constante v en una órbita circular tiene la aceleración centrípeta (Ec. 4.6)

$$a = \frac{v^2}{r}$$

dirigida hacia el núcleo. Por la segunda ley de Newton (Ec. 4.10), la fuerza sobre el electrón es igual a su masa multiplicada por su aceleración, por lo tanto

$$K\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

o también

$$mv^2 = K\frac{e^2}{r} \qquad 21.4$$

Esta ecuación da la velocidad v del electrón para cualquier radio orbital r.

La energía del electrón es la suma de su energía cinética y su energía potencial

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + U$$

La energía potencial es

$$U = q_e V = -eV$$

en donde V es el potencial eléctrico a una distancia r del núcleo. Según la Ec. 17.11, este potencial es

$$V = K\frac{q_n}{r} = K\frac{e}{r}$$

por lo que la energía potencial se puede expresar

$$U = -eV = -K\frac{e^2}{r}$$

El signo menos indica que la energía potencial de un electrón a una distancia r del núcleo es menor que su energía potencial en el infinito.

La energía cinética K del electrón es $1/2\,mv^2$. De acuerdo con la ecuación 21.4, la energía cinética se puede expresar

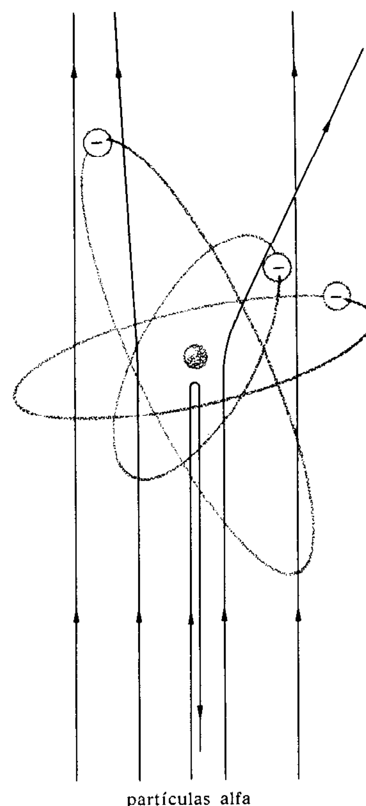


FIGURA 21.3
Partículas alfa moviéndose a través del átomo. Las únicas partículas que son desviadas con gran ángulo son las que se acercan al pequeño núcleo de masa.

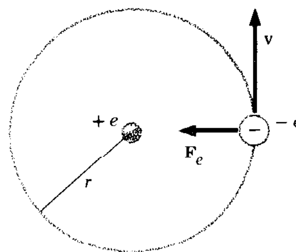


FIGURA 21.4
Un electrón en movimiento en órbita circular alrededor de un núcleo de hidrógeno.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}K\frac{e^2}{r}$$

por lo que la energía total del electrón es

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + U = \tfrac{1}{2}K\frac{e^2}{r} - K\frac{e^2}{r}$$
$$= -\tfrac{1}{2}K\frac{e^2}{r} \qquad 21.5$$

El signo menos indica de nuevo que la energía de un electrón en órbita alrededor del núcleo es menor que la energía que tendría si estuviese en reposo e infinitamente lejos del núcleo. Así, $-E$ es la energía que se necesita para separar completamente el electrón del núcleo, o sea, para *ionizar* el átomo.

Condición cuántica de Bohr

Así estaban las cosas en 1912 cuando Niels Bohr (1885-1962) era un discípulo de Rutherford en la Universidad de Manchester. Bohr comprendió que este modelo orbital, aunque muy atrayente, no podía ser del todo correcto porque no explicaba, por ejemplo, por qué todos los átomos de hidrógeno tienen propiedades químicas idénticas. De acuerdo con la física clásica, el electrón puede estar en una órbita de radio cualquiera y, por lo tanto, hay una gama continua de posibles energías para el electrón. Sin embargo, el hidrógeno se comporta como si todos sus átomos tuvieran la misma energía. Además, aun cuando el electrón de cada átomo se hallase originalmente en una órbita de especial preferencia, esta órbita cambiaría con el tiempo por las colisiones entre los átomos.

Una objeción aún más seria a este modelo proviene de la teoría electromagnética que establece que una partícula cargada emite radiación electromagnética siempre que es acelerada. En particular, un electrón que da vueltas se espera que emita radiación electromagnética a expensas de su propia energía. Como consecuencia, el movimiento orbital de un electrón sería inestable porque el electrón iría girando en espiral cada vez más cerca del núcleo, a medida que fuese irradiando su energía.

Bohr trabajó en estos problemas de vuelta a Copenhague en 1913, intentando introducir las nuevas ideas cuánticas de Planck y Einstein en el modelo. Lo que se necesitaba era alguna restricción en la Ec. 21.4 que limitase las posibles órbitas. Logró esta restricción y obtuvo así, por primera vez, una descripción cuantitativa del átomo.

La condición de Bohr se entiende hoy mejor en función de la naturaleza ondulatoria del electrón, aunque esto se descubrió 10 años después del trabajo original de Bohr. Recuérdese (Apart. 13.5) que una onda estacionaria sobre una cuerda fija por los dos extremos, sólo puede tener ciertas longitudes de onda que vienen determinadas por la condición de que debe haber un número entero de semilongitudes de onda sobre la cuerda (Fig. 21.5). Supongamos, de modo semejante, que en el átomo sólo existen ondas electrónicas estacionarias. La Fig. 21.6 muestra que solamente un número entero de longitudes de onda completas puede existir sobre una cuerda circular porque una onda con

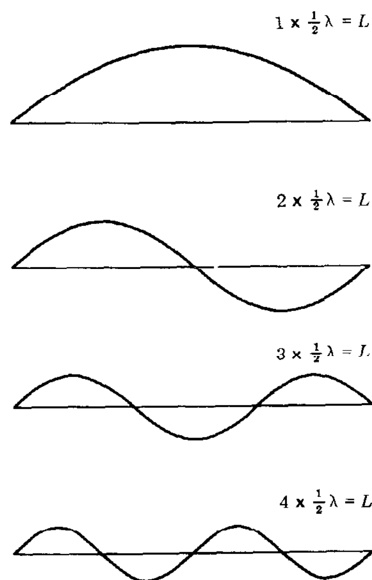


FIGURA 21.5
Ondas estacionarias que se pueden formar sobre una cuerda fija por los dos extremos.

un número impar de semilongitudes de onda no se une suavemente (Fig. 21.6*b*). Así, la condición para una onda estacionaria sobre un círculo de radio *r* es

$$n\lambda = 2\pi r$$

en la que *n* es un número entero ($n = 1, 2, 3, \ldots$) y $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia. Esta condición, junto con la Ec. 21.3 para la longitud de onda de una onda electrónica, da

$$mv = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi r/n} = \frac{nh}{2\pi r}$$

que es una ecuación no clásica que relaciona la velocidad del electrón y el radio de la órbita. Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación tenemos

$$m^2v^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2r^2}$$

o también

$$mv^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2mr^2} \qquad \text{condición cuántica de Bohr} \qquad 21.6$$

Ésta es la restricción adicional necesaria para limitar las posibles órbitas dadas por la Ec. 21.4. Combinando las Ecs. 21.4 y 21.6 tenemos

$$K\frac{e^2}{r} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2mr^2}$$

o bien

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2Kme^2} \qquad 21.7$$

Según Bohr, las únicas órbitas de un electrón permitidas son las obtenidas por la Ec. 21.7 con valores enteros de *n*.

Ejemplo. ¿Cuál es el radio de la menor órbita permitida en el hidrógeno?
La menor órbita tiene lugar con $n = 1$. Sustituyendo los valores conocidos de *h*, *m*, *e* y *K* en la Ec. 21.7, obtenemos el radio

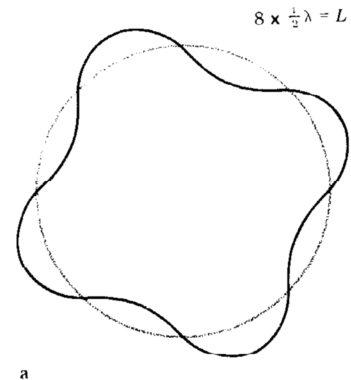
$$r = \frac{(1^2)(6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J-s})^2}{4\pi^2(9{,}0 \times 10^9\ \text{N-m}^2/\text{C}^2)(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}$$

$$= 0{,}0053 \times 10^{-8}\ \frac{\text{J}^2\text{-s}^2}{\text{N-m}^2\text{-kg}}$$

$$= 0{,}53 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

Esta magnitud, conocida como el *radio de Bohr*, es compatible con lo que se sabía en 1913 acerca del tamaño de un átomo de hidrógeno. La siguiente órbita ocurre cuando $n = 2$, y su radio es 4 (2^2) veces el radio de Bohr; el radio de la órbita $n = 3$ es 9 (3^2) veces el radio de Bohr, y así sucesivamente.
Las energías permitidas E_n de un electrón en un átomo de hidrógeno se obtienen aplicando los radios permitidos de la Ec. 21.7 en la Ec. 21.5

$$E_n = -\tfrac{1}{2}K\frac{e^2}{r} = -\frac{2\pi^2K^2me^4}{n^2h^2} \qquad 21.8$$



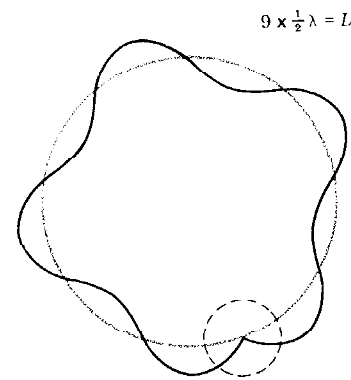


FIGURA 21.6
(*a*) Onda estacionaria posible sobre una cuerda circular.
(*b*) Una onda con un número impar de semilongitudes de onda no coincide uniformemente sobre una cuerda circular.

La energía más baja E_1 viene dada por la Ec. 21.8 con $n = 1$:

$$E_1 = -\frac{2\pi^2(9{,}0\times 10^9\ \text{N-m}^2/\text{C}^2)^2(9{,}11\times 10^{-31}\ \text{kg})(1{,}60\times 10^{-19}\ \text{C})^4}{(1^2)(6{,}63\times 10^{-34}\ \text{J-s})^2}$$
$$= -2170\times 10^{-21}\ \text{m}^2\text{-kg/s}^2 = -2{,}17\times 10^{-18}\ \text{J}$$

A partir de la Ec. 21.8 vemos que la n-sima energía E_n es

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{2{,}17\times 10^{-18}\ \text{J}}{n^2}$$

Por ejemplo, con $n = 2$, la energía es

$$E_2 = -\frac{2{,}17\times 10^{-18}\ \text{J}}{2^2} = -0{,}542\times 10^{-18}\ \text{J}$$

que es mayor que E_1 puesto que es menos negativa.

En física atómica es conveniente medir las *energías en electronvolts*. Un electronvolt es la energía ganada por un electrón al pasar a través de una diferencia de potencial de 1 V (Apart. 17.5), de modo que la conversión entre electronvolts y joules es

$$1\ \text{eV} = e\times 1\ \text{V} = 1{,}60\times 10^{-19}\ \text{J}$$

o bien

$$1\ \text{J} = 6{,}25\times 10^{18}\ \text{eV}$$

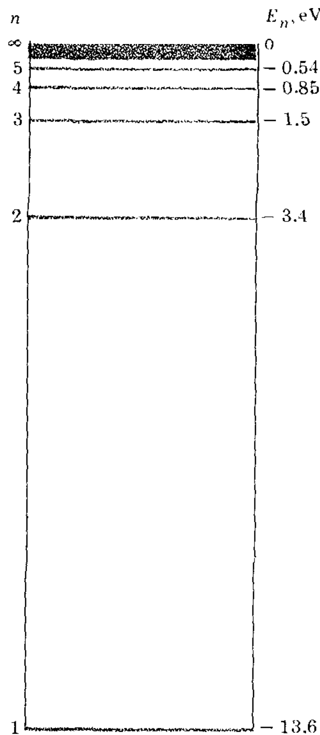


FIGURA 21.7
Niveles de energía de un átomo de hidrógeno.

Por ejemplo, la energía más baja E_1 del hidrógeno es

$$E_1 = (-2{,}17\times 10^{-18}\ \text{J})(6{,}25\times 10^{18}\ \text{eV/J})$$
$$= -13{,}6\ \text{eV}$$

y la n-sima energía es

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2} \qquad 21.9$$

OBSERVACIÓN. Conviene expresar la constante de Planck en electrovolts más que en joules. La conversión es

$$h = (6{,}63\times 10^{-34}\ \text{J-s})(6{,}25\times 10^{18}\ \text{eV/J})$$
$$= 4{,}14\times 10^{-15}\ \text{eV-s}$$

Las energías permitidas del electrón en un átomo de hidrógeno forman una serie creciente que empieza con la energía más baja ($E_1 = -13{,}6$ eV) y termina con la energía más alta ($E_\infty = 0$). Esto es lo que se muestra en la Fig. 21.7, donde cada energía permitida viene representada por una *línea horizontal*. Un electrón sólo puede estar en una órbita, o *estado*, correspondiente a una energía permitida. Normalmente el electrón está en el estado más bajo, o estado *fundamental*, desde el cual no puede irradiar energía ya que tiene su más baja energía posible.

Además, como hay una diferencia de 10,2 eV entre el estado fundamental del hidrógeno y el estado siguiente más alto, un átomo de hidrógeno en su estado fundamental debe absorber al menos 10,2 eV para cambiar su estado. La energía cinética de una molécula a temperatura ambiente es solamente de unos 0,02 eV, de modo que un átomo de hidrógeno no se ve afectado por las colisiones con otras

moléculas del gas. Así, un átomo en su estado fundamental es completamente estable comparado con la energía de emisión y es relativamente estable en comparación con la energía de absorción. Normalmente todos los átomos de hidrógeno tienen propiedades idénticas porque todos ellos se encuentran en su estado fundamental.

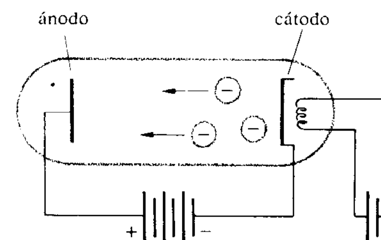


FIGURA 21.8
Tubo de descarga de gases.

Espectros atómicos

Los átomos de hidrógeno pueden ser excitados a estados de energía más altos bombardeándolos con un haz de electrones energéticos. Esto se lleva a cabo de la mejor manera en un tubo de descarga de gases (Fig. 21.8), que es parecido a los tubos de vacío que vimos en el apartado 17.5, salvo que contiene hidrógeno (o algún otro gas) a muy baja presión. Las placas de metal, o electrodos, se hallan montados dentro del tubo cerrado y los conductores unidos a los electrodos pasan por la pared del tubo. Un electrodo (el cátodo) se calienta para que emita electrones, y estos electrones son atraídos por el otro electrodo (el ánodo) que se mantiene a un potencial positivo con respecto al cátodo. Los electrones adquieren energía cinética al moverse hacia el ánodo y de vez en cuando chocan con un átomo de hidrógeno. En el proceso de choque parte de la energía cinética del electrón puede pasar al átomo llevando al electrón del átomo a un estado de energía más alto. Para excitar un átomo al estado $n = 2$ se debe absorber por lo menos 10,2 eV, y un átomo que absorbe más de 13,6 eV se ioniza, estando su electrón separado permanentemente de su núcleo. Como resultado de las colisiones entre electrones y átomos, los átomos del gas de un tubo de descarga se hallan en todos los estados posibles.

Un átomo en un estado excitado pronto irradia algo de su exceso de energía y cae en un estado de energía más bajo. Bohr demostró que esta radiación consta de un solo fotón cuya frecuencia f está relacionada con el cambio de energía por la Ec. 21.1. O sea, si el átomo hace una transición directamente de un estado de energía E_n a un estado de energía $E_{n'}$, se emite un solo fotón de frecuencia

$$f = \frac{E_n - E_{n'}}{h} \qquad 21.10$$

Por ejemplo, si el átomo hace una transición del estado $n = 3$ al estado fundamental ($n = 1$), el cambio de energía es

$$\begin{aligned} E_n - E_{n'} &= -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2} - \left(-\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n'^2}\right) \\ &= -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{3^2} - \left(-\frac{13{,}6\ \text{eV}}{1^2}\right) \\ &= -1{,}51\ \text{eV} - (-13{,}6\ \text{eV}) \\ &= 12{,}1\ \text{eV} \end{aligned}$$

y la frecuencia del fotón emitido es

$$\begin{aligned} f &= \frac{E_n - E_{n'}}{h} = \frac{12{,}1\ \text{eV}}{4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{eV-s}} \\ &= 2{,}92 \times 10^{15}\ \text{Hz} \end{aligned}$$

que es radiación ultravioleta (ver Fig. 15.1). Esta transición viene representada en la Fig. 21.9 por la flecha dibujada desde el estado $n = 3$ al estado $n = 1$.

Por otro lado, un átomo en el estado $n = 3$ puede pasar primero al estado $n = 2$, emitiendo un fotón de frecuencia

$$f = \frac{-1{,}51 \text{ eV} - (-3{,}40 \text{ eV})}{h}$$
$$= \frac{1{,}89 \text{ eV}}{4{,}14 \times 10^{-15} \text{ eV-s}}$$
$$= 4{,}56 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

y entonces hacer una transición desde el estado $n = 2$ al estado $n = 1$ emitiendo un fotón de frecuencia

$$f = \frac{-3{,}40 \text{ eV} - (-13{,}6 \text{ eV})}{4{,}14 \times 10^{-15} \text{ eV-s}}$$
$$= 2{,}46 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

En este proceso de dos pasos se emiten dos fotones, uno en la región visible y otro en la región ultravioleta. Estas transiciones se hallan representadas en la Fig. 21.9 por las flechas que van desde el estado $n = 3$ al estado $n = 2$ y desde el estado $n = 2$ al estado $n = 1$.

El espectro de la radiación que sale de un tubo de descarga de gas contiene todas las frecuencias que se pueden obtener de las transiciones entre dos estados de energía cualesquiera. Se han medido cientos de frecuencias calculadas a partir de las Ecs. 21.9 y 21.10 Así, el espectro de radiación emitida por un gas en un tubo de descarga da información directa sobre los niveles de energía de un átomo. El átomo de hidrógeno es el más sencillo de analizar y su espectro fue utilizado para probar el modelo de estructura atómica de Bohr. Los niveles de energía de átomos complejos no se pueden calcular de modo tan fácil como los del hidrógeno por lo que se determinan experimentalmente a partir de sus espectros.

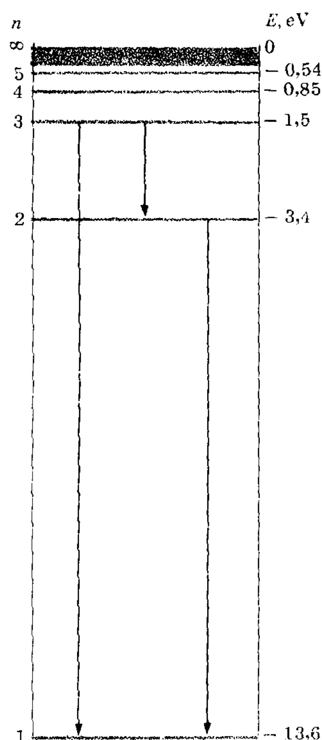


FIGURA 21.9
Un átomo de hidrógeno en el estado $n = 3$ puede pasar al estado fundamental efectuando una transición de uno o dos pasos.

21.3. MECANICA CUANTICA

El modelo de Bohr, aunque describe correctamente el átomo y predice el espectro de radiación emitido por el hidrógeno, está basado en conceptos intrínsecamente contradictorios. De manera específica, la mecánica newtoniana, utilizada para deducir la Ec. 21.4, permite que una partícula esté en una órbita de radio cualquiera, mientras que la Ec. 21.6 restringe los radios permitidos con una condición extraña a la mecánica newtoniana. Esta contradicción sólo se resolvió con el desarrollo de la mecánica cuántica, que es una amplia teoría del movimiento de las partículas de tamaño atómico. Para partículas de tamaño ordinario, la mecánica cuántica es equivalente a la mecánica newtoniana, o sea, la mecánica cuántica es más general que la newtoniana y se reduce a ella cuando la masa de la partícula es grande.

En 1925, Erwin Schrödinger (1887-1961) desarrolló una forma de mecánica cuántica por medio de una ecuación para la onda electrónica que De Broglie había propuesto el año anterior (Apart. 21.1). Esta ecuación es análoga a las ecuaciones clásicas de las ondas sobre una cuerda y de las ondas electromagnéticas, pero se diferencia en algunos detalles fundamentales. Supone, al igual que estas ecuaciones clásicas, que la onda material obedece el principio de superposiciones (Apart. 13.3) Sin embargo, a diferencia de estas otras ecuaciones, la onda misma no representa ni el desplazamiento de un medio ni el módulo de una magnitud física. Por el contrario, la onda tiene que ser interpretada como una *amplitud de probabilidad*.

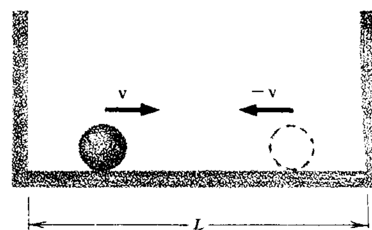


FIGURA 21.10
Descripción clásica de una partícula en una caja.

Para entender esto consideremos una partícula de masa m que se mueve en una caja de paredes perfectamente rígidas, tal como se ve en la Fig. 21.10. De acuerdo con la mecánica newtoniana, la partícula se mueve en línea recta a velocidad constante v hasta que choca con una pared de la caja. Entonces rebota en la pared y se mueve en dirección opuesta con la misma velocidad v hasta que choca con la otra pared. En cualquier instante de tiempo la partícula tiene una posición definida en la caja y en el transcurso del tiempo se mueve hacia adelante y hacia atrás en ella. La partícula puede tener cualquier velocidad v y cualquier energía cinética $K = 1/2\ mv^2$.

La mecánica cuántica de Schrödinger representa la partícula por medio de una onda ψ.* Como la onda está encerrada en un espacio finito, sólo son posibles las ondas estacionarias con ciertas longitudes de onda. Al igual que una onda que se produce sobre una cuerda fija por los dos extremos, la onda material debe ser cero en cada pared de la caja y, por lo tanto, una onda estacionaria debe contener un número entero de semilongitudes de onda (Fig. 21.11). Si la caja tiene una longitud L, la longitud de onda cumple la condición

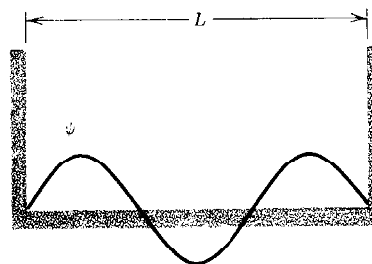


FIGURA 21.11
Descripción mecánico-cuántica de una partícula en una caja.

$$n\frac{\lambda}{2} = L$$

o también

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

en donde n es un número entero. Esta ecuación es idéntica a la ecuación 13.9. Sin embargo, la onda ψ tiene una interpretación muy diferente.

En un punto cualquiera de la caja la magnitud ψ^2, el cuadrado de la onda, da la probabilidad de encontrar la partícula en ese punto. La Fig. 21.12 muestra el cuadrado de la onda de la Fig. 21.11. En la figura 21.12 vemos que lo más probable es encontrar la partícula en los puntos A, B y C y nunca se encontrará en los puntos W, X, Y, y Z. Por lo tanto, la partícula no puede concebirse como si tuviera una posición definida en cualquier instante de tiempo. Todo lo que se puede decir acerca de la partícula es que, en cualquier instante de tiempo, existe una probabilidad definida de ser encontrada en cualquier punto de la caja.

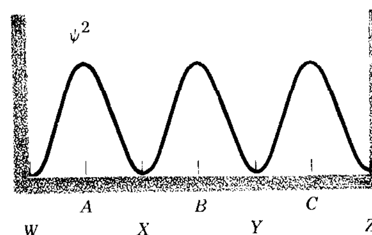


FIGURA 21.12
El cuadrado de la onda mecánico-cuántica da la probabilidad de hallar la partícula en varios puntos de la caja.

* Es la letra griega *psi*.

$$v = \frac{h}{2Lm} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J-s}}{(2)(6 \times 10^{-3}\ \text{m})(10^{-2}\ \text{kg})}$$
$$= 5{,}5 \times 10^{-30}\ \text{m/s}$$

A esta velocidad la canica tardaría un billón de años en recorrer una distancia de un diámetro atómico. Una velocidad así de pequeña no se puede distinguir de cero. El pequeño tamaño de h es lo que asegura que los efectos cuánticos especiales, como la energía en el punto cero, sólo tengan sentido para partículas de tamaño atómico. Para los objetos de tamaño ordinario, todavía se aplica con buena aproximación la mecánica newtoniana.

21.4. ATOMOS COMPLEJOS Y TABLA PERIÓDICA

Estados cuánticos de un átomo

Cuando se resuelve la ecuación de onda de Schrödinger para un electrón ligado a un núcleo cargado positivamente, se ve que (como en el caso de una partícula dentro de una caja) sólo son posibles ciertos estados. Las energías de estos estados son idénticas a las energías que halló Bohr con anterioridad utilizando su sencillo modelo. Sin embargo, la mecánica cuántica abandona la imagen de los electrones dando vueltas en órbitas alrededor del núcleo y la sustituye por distribuciones de la probabilidad de hallar los electrones en cada punto alrededor del núcleo.

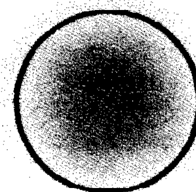


FIGURA 21.13
Distribución de probabilidad de un electrón en el estado fundamental ($n = 1$) del hidrógeno. La órbita de Bohr aparece a efectos de comparación.

Por ejemplo, la Fig. 21.13 muestra la distribución de probabilidad de un electrón en el estado más bajo $n = 1$, a la que se ha superpuesto para comparar la vieja órbita de Bohr. Ésta es una distribución esférica, y la probabilidad de encontrar el electrón es máxima en el núcleo y disminuye rápidamente al alejarse de él. Aunque esta distribución no se parece al modelo de Bohr de un electrón dando vueltas, la figura muestra que la órbita de Bohr da el tamaño correcto del átomo.

OBSERVACIÓN. A veces se dice que un electrón en un átomo forma una nube alrededor del núcleo. La palabra describe la poco definida distribución de probabilidad que aparece en la Fig. 21.13 y no implica que el mismo electrón esté como difuminado. Cualquier medida de un electrón en un átomo revela siempre un electrón completo con toda la carga $-e$, y nunca una fracción de electrón o una distribución continua de carga.

La ecuación de Schrödinger da cuatro ondas diferentes para $n = 2$ y nueve ondas diferentes para $n = 3$. Esto significa que hay cuatro estados con la energía E_2 y nueve estados con la energía E_3. Los estados del átomo de hidrógeno se designan por los tres *números cuánticos n, l, m*. El *número cuántico principal n* corresponde a las órbitas de Bohr y determina la energía del estado; el *número cuántico orbital l* determina la simetría general de la onda y el *número cuántico magnético m* determina la orientación espacial de la onda. Por ejemplo, $l = 0$ es una onda de simetría esférica que tiene una distribución de probabilidad como la que se ve en la Fig. 21.13. Así, l es cero en el estado único $n = 1$. Además, como la orientación no tiene importancia para una distribución esférica, m también es cero. Por lo tanto, los números cuánticos del estado $n = 1$ son:

n	l	m
1	0	0

Uno de los estados $n = 2$ tiene también $l = 0$, $m = 0$ y los otros tres tienen $l = 1$. Las ondas $l = 1$ son anillos en forma de rosquilla en dos orientaciones ($m = \pm 1$) y forman dos gotas aisladas en la tercera orientación ($m = 0$). En la Fig. 21.14 aparecen estas distribuciones con la órbita de Bohr $n = 1$ superpuesta para mostrar que las distribuciones de $n = 2$ se extienden mucho más allá que la distribución de $n = 1$. Las distribuciones con $m = +1$ y $m = -1$ son idénticas, pero las ondas que les corresponden tienen signo diferente. Esencialmente $m = +1$ describe un electrón que da vueltas alrededor del núcleo si-

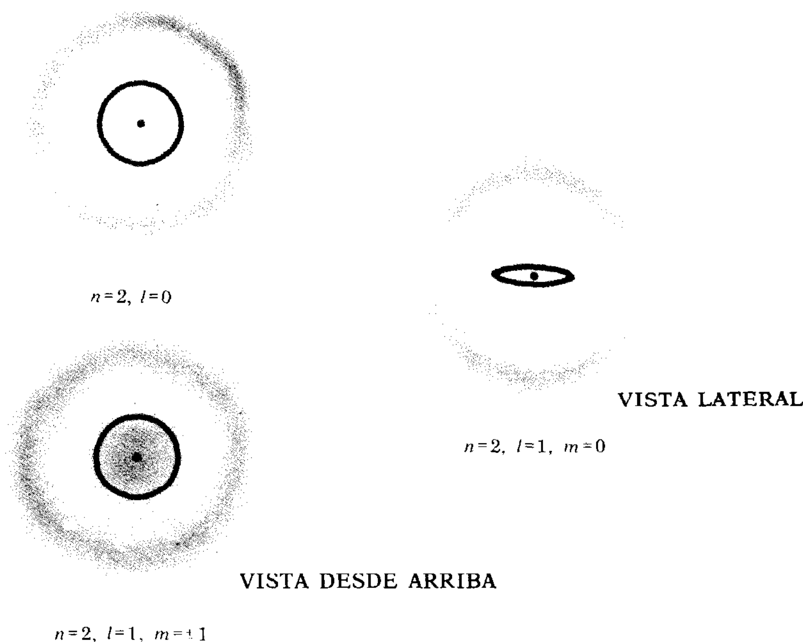


FIGURA 21.14
Distribuciones de probabilidad de un electrón en los primeros estados excitados del hidrógeno ($n = 2$). La órbita de Bohr aparece como referencia. (*a*) El estado $n = 2$, $l = 0$ es de simetría esférica. Tiene dos regiones con probabilidad apreciable, una de las cuales se halla dentro de la órbita de Bohr. (*b*) Los estados $n = 2$, $l = 1$, $m = \pm 1$ tienen forma de rosquilla y se parecen mucho al dibujo original de Bohr de los electrones en órbita. (*c*) El estado $n = 2$, $l = 1$, $m = 0$ consta de dos gotas aisladas a cada lado del núcleo.

La ecuación de Schrödinger da cuatro ondas diferentes para $n = 2$ y nueve ondas diferentes para $n = 3$. Esto significa que hay cuatro estados con la energía E_2 y nueve estados con la energía E_3. Los estados del átomo de hidrógeno se designan por los tres *números cuánticos n, l, m*. El *número cuántico principal n* corresponde a las órbitas de Bohr y determina la energía del estado; el *número cuántico orbital l* determina la simetría general de la onda y el *número cuántico magnético m* determina la orientación espacial de la onda. Por ejemplo, $l = 0$ es una onda de simetría esférica que tiene una distribución de probabilidad como la que se ve en la Fig. 21.13. Así, l es cero en el estado único $n = 1$. Además, como la orientación no tiene importancia para una distribución esférica, m también es cero. Por lo tanto, los números cuánticos del estado $n = 1$ son:

n	l	m
1	0	0

Uno de los estados $n = 2$ tiene también $l = 0$, $m = 0$ y los otros tres tienen $l = 1$. Las ondas $l = 1$ son anillos en forma de rosquilla en dos orientaciones ($m = \pm 1$) y forman dos gotas aisladas en la tercera orientación ($m = 0$). En la Fig. 21.14 aparecen estas distribuciones con la órbita de Bohr $n = 1$ superpuesta para mostrar que las distribuciones de $n = 2$ se extienden mucho más allá que la distribución de $n = 1$. Las distribuciones con $m = +1$ y $m = -1$ son idénticas, pero las ondas que les corresponden tienen signo diferente. Esencialmente $m = +1$ describe un electrón que da vueltas alrededor del núcleo si-

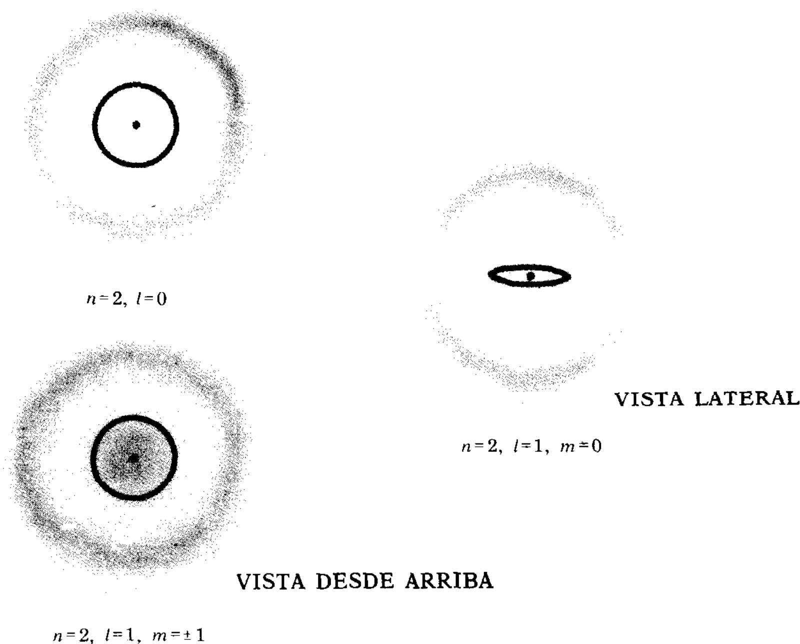


FIGURA 21.14
Distribuciones de probabilidad de un electrón en los primeros estados excitados del hidrógeno ($n = 2$). La órbita de Bohr aparece como referencia. (a) El estado $n = 2$, $l = 0$ es de simetría esférica. Tiene dos regiones con probabilidad apreciable, una de las cuales se halla dentro de la órbita de Bohr. (b) Los estados $n = 2$, $l = 1$, $m = \pm 1$ tienen forma de rosquilla y se parecen mucho al dibujo original de Bohr de los electrones en órbita. (c) El estado $n = 2$, $l = 1$, $m = 0$ consta de dos gotas aisladas a cada lado del núcleo.

guiendo las manecillas del reloj y $m = -1$ describe un electrón que da vueltas alrededor del núcleo en sentido inverso al de las agujas del reloj. Una distribución de $l = 1$ está en su mayor parte fuera de la órbita de Bohr, mientras que una distribución de $l = 0$ tiene una parte importante dentro de la órbita. Estos hechos son de gran importancia para entender la estructura atómica. Los números cuánticos de los cuatro estados $n = 2$ son:

n	l	m
2	0	0
	1	−1, 0, 1

En general, para un valor dado del número cuántico principal n, existen estados con números cuánticos orbitales l que varían en pasos enteros de 0 a $n - 1$, y para cada valor de l existen estados con números cuánticos magnéticos m que varían en pasos enteros desde $-l$ a $+l$. Así, los números cuánticos de los nueve estados $n = 3$ son:

n	l	m
3	0	0
	1	−1, 0, 1
	2	−2, −1, 0, 1, 2

Un grupo de estados con el mismo valor de n es una *capa* y un grupo de estados con los mismos valores de n y l es una *subcapa*. La tabla 21.1. es una lista de todas las capas y subcapas con números cuánticos principales de 1 a 6, junto con el número de estados de cada subcapa. (Obsérvese que hay $2l + 1$ estados en una subcapa con número cuántico orbital l.) Una subcapa se designa por su número cuántico principal n y una letra clave para su número cuántico orbital l. Las letras clave para $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ son s, p, d, f, g, h, respectivamente, tal como se indica en la tabla 21.1. Así, la subcapa $n = 3$, $l = 2$ se designa por $3d$.

Las propiedades de átomos complejos (de muchos electrones) y la estructura de la tabla periódica se determinan por los números cuánticos n, l, m junto con otros dos descubrimientos hechos en el año crítico de 1925.

Spin. Del análisis de los espectros atómicos se obtuvo que los átomos poseen doble número de estados cuánticos que los que se dan en la tabla 21.1. S. A. Goudsmit y G. E. Uhlenbeck demostraron que esto era debido a que el electrón tiene dos estados intrínsecos. Se puede imaginar el electrón como girando sobre un eje,* y los dos estados corresponden a un eje de giro hacia arriba o hacia abajo con respecto a una línea de referencia arbitraria. Estos estados son designados por

* El eje de spin de un electrón coincide con el eje de su dipolo magnético (Apart. 19.2).

TABLA 21.1. **Estados de un electrón ligado a un núcleo cargado positivamente.** Se da la notación utilizada para designar cada subcapa y también el número de estados de la subcapa. Este número se debe multiplicar por 2 para incluir las dos posibles orientaciones del spin del electrón.

n	l	Símbolo de la subcapa	m	Número de estados
1	0	1*s*	0	1
2	0	2*s*	0	1
	1	2*p*	−1,0,1	3
3	0	3*s*	0	1
	1	3*p*	−1,0,1	3
	2	3*d*	−2, −1,0,1,2	5
4	0	4*s*	0	1
	1	4*p*	−1,0,1	3
	2	4*d*	−2, −1,0,1,2	5
	3	4*f*	−3, −2, −1,0,1,2,3	7
5	0	5*s*	0	1
	1	5*p*	−1,0,1	3
	2	5*d*	−2, −1,0,1,2	5
	3	5*f*	−3, −2, −1,0,1,2,3	7
	4	5*g*	−4, −3, −2, −1,0,1,2,3,4	9

el *número cuántico de spin* m_s, que tiene sólo dos valores posibles: $m_s = +\frac{1}{2}$ para el spin hacia arriba y $m_s = -\frac{1}{2}$ para el spin hacia abajo. Así, pues, existen dos estados para cada conjunto de números cuánticos n, l, m, uno con $m_s = +\frac{1}{2}$, y otro con $m_s = -\frac{1}{2}$.

Principio de exclusión. *Este principio, formulado por Wolfgang Pauli* (1900-1958), *establece que dos o más electrones en un átomo no pueden ocupar el mismo estado al mismo tiempo.* En consecuencia, todos los electrones de un átomo formado por muchos electrones están en estados diferentes. Dos estados se diferencian si uno cualquiera de sus cuatro números cuánticos (n, l, m, m_s) son diferentes.

Tabla periódica

Un átomo consta de Z electrones ligados a un núcleo de carga $+Ze$, en donde Z es un número entero, llamado *número atómico*. Los átomos de cada elemento químico tienen un valor específico de Z. Por ejemplo, los átomos de hidrógeno tienen $Z = 1$, los átomos de carbono tienen $Z = 6$, y los átomos de uranio tienen $Z = 92$. La tabla periódica de los elementos (tabla 21.2) se obtiene colocando los elementos en orden creciente de Z, con los elementos de propiedades químicas semejantes colocados unos debajo de otros. Dmitri Mendeleiev (1834-1907) descubrió empíricamente, en 1869, que con tal disposición los elementos con propiedades semejantes vuelven a aparecer a intervalos regulares (periódicos). Obsérvese que en la tabla 21.2 el número atómico Z aumenta a través de cada fila (período), y que los elementos de la misma columna (grupo) tienen propiedades semejantes. Por ejemplo, el grupo I contiene los metales alcalinos, elementos (como el sodio y el potasio)

TABLA 21.2. **Tabla periódica de los elementos.**
Como se ve en la clave cada anotación da el número atómico *Z*, el símbolo químico, la masa atómica y la configuración electrónica. Un número entre paréntesis es el número másico del isótopo más estable de aquel elemento. Las configuraciones electrónicas son el número de electrones en las tres o cuatro últimas subcapas. En la tabla 21.3 se puede ver el orden en el que se llenan las subcapas.

Clave: 88.91 (Masa atómica) / **Y** (Símbolo) / 39 (Número atómico) / 6,2,1 (Configuración electrónica)

Elementos de transición

Período	Grupo I	Grupo II											Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
1	1,008 **H** 1 1																	4,00 **He** 2 2
2	6,94 **Li** 3 2,1	9,01 **Be** 4 2,2											10,81 **B** 5 2,2,1	12,01 **C** 6 2,2,2	14,01 **N** 7 2,2,3	16,00 **O** 8 2,2,4	19,00 **F** 9 2,2,5	20,18 **Ne** 10 2,2,6
3	22,99 **Na** 11 2,6,1	24,31 **Mg** 12 2,6,2											26,98 **Al** 13 6,2,1	28,09 **Si** 14 6,2,2	30,97 **P** 15 6,2,3	32,06 **S** 16 6,2,4	35,45 **Cl** 17 6,2,5	39,95 **Ar** 18 6,2,6
4	39,10 **K** 19 2,6,1	40,08 **Ca** 20 2,6,2	44,96 **Sc** 21 6,2,1	47,90 **Ti** 22 6,2,2	50,94 **V** 23 6,2,3	52,00 **Cr** 24 6,1,5	54,94 **Mn** 25 6,2,5	55,85 **Fe** 26 6,2,6	58,93 **Co** 27 6,2,7	58,71 **Ni** 28 6,2,8	63,54 **Cu** 29 6,1,10	65,37 **Zn** 30 6,2,10	69,72 **Ga** 31 2,10,1	72,59 **Ge** 32 2,10,2	74,92 **As** 33 2,10,3	78,96 **Se** 34 2,10,4	79,90 **Br** 35 2,10,5	83,80 **Kr** 36 2,10,6
5	85,47 **Rb** 37 10,6,1	87,62 **Sr** 38 10,6,2	88,91 **Y** 39 6,2,1	91,22 **Zr** 40 6,2,2	92,91 **Nb** 41 6,1,4	95,94 **Mo** 42 6,1,5	(97) **Tc** 43 6,2,5	101,1 **Ru** 44 6,1,7	102,91 **Rh** 45 6,1,8	106,4 **Pd** 46 6,0,10	107,87 **Ag** 47 6,1,10	112,40 **Cd** 48 6,2,10	114,82 **In** 49 2,10,1	118,69 **Sn** 50 2,10,2	121,75 **Sb** 51 2,10,3	127,60 **Te** 52 2,10,4	126,90 **I** 53 2,10,5	131,30 **Xe** 54 2,10,6
6	132,91 **Cs** 55 10,6,1	137,34 **Ba** 56 10,6,2	57-71 †	178,49 **Hf** 72 2,14,2	180,95 **Ta** 73 2,14,3	183,85 **W** 74 2,14,4	186,2 **Re** 75 2,14,5	190,2 **Os** 76 2,14,6	192,2 **Ir** 77 2,14,7	195,09 **Pt** 78 1,14,9	196,97 **Au** 79 1,14,10	200,59 **Hg** 80 2,14,10	204,37 **Tl** 81 14,10,1	207,19 **Pb** 82 14,10,2	208,98 **Bi** 83 14,10,3	(209) **Po** 84 14,10,4	(210) **At** 85 14,10,5	222 **Rn** 86 14,10,6
7	(223) **Fr** 87 10,6,1	(226) **Ra** 88 10,6,2	89-103 ‡															

† *Lantánidos*	138,91 **La** 57 6,2,0,1	140,12 **Ce** 58 6,2,2	140,91 **Pr** 59 6,2,3	144,24 **Nd** 60 6,2,4	(145) **Pm** 61 6,2,5	150,35 **Sm** 62 6,2,6	151,96 **Eu** 63 6,2,7	157,25 **Gd** 64 6,2,7,1	158,92 **Tb** 65 6,2,9	162,50 **Dy** 66 6,2,10	164,93 **Ho** 67 6,2,11	167,26 **Er** 68 6,2,12	168,93 **Tm** 69 6,2,13	173,04 **Yb** 70 6,2,14	174,97 **Lu** 71 2,14,1
‡ *Actínidos*	(227) **Ac** 89 6,2,0,1	(232) **Th** 90 6,2,0,2	(231) **Pa** 91 6,2,2,1	(238) **U** 92 6,2,3,1	(237) **Np** 93 6,2,4,1	(244) **Pu** 94 6,2,5,1	(243) **Am** 95 6,2,6,1	(247) **Cm** 96 6,2,7,1	(247) **Bk** 97 6,2,8,1	(251) **Cf** 98 6,2,10	(254) **Es** 99 6,2,11	(257) **Fm** 100 6,2,12	(256) **Md** 101 6,2,13	(254) **No** 102 6,2,14	(-) **Lw** 103 2,14,1

que forman fácilmente iones positivos cargados individualmente, mientras que el grupo VII contiene los halógenos, elementos (tales como el cloro y el flúor) que forman fácilmente iones con una sola carga negativa.

Ahora deduciremos la tabla periódica de los principios de mecánica cuántica. En esta construcción suponemos que los electrones en el estado fundamental de un átomo ocupan los niveles de energía más bajos compatibles con el principio de exclusión.

Período 1. La tabla periódica empieza con el hidrógeno ($Z = 1$) cuyo electrón ocupa la subcapa más baja $1s$. El hidrógeno está colocado en el grupo I porque forma fácilmente un ion de carga $+e$. El principio de exclusión permite que los dos electrones de helio ($Z = 2$) ocupen la subcapa $1s$ si sus spines tienen orientaciones opuestas. Esta disposición tiene la energía más baja y, por lo tanto, es la configuración del estado fundamental del helio. Como el núcleo de helio tiene dos veces la carga del núcleo de hidrógeno, cada electrón del helio está más fuertemente ligado que el electrón del hidrógeno. Como consecuencia, los átomos de helio no tienen tendencia a ganar o perder electrones y no reaccionan con otros átomos para formar moléculas. El helio es un gas inerte que pertenece al grupo 0 de la tabla periódica. Un gas inerte se forma siempre que los electrones de un átomo llenan completamente la última capa ocupada.

Período 2. El principio de exclusión permite solamente que dos de los tres electrones del litio ($Z = 3$) ocupen el estado $1s$. El tercero debe ir a la siguiente capa más alta ($n = 2$). En un átomo de un electrón todos los estados $n = 2$ tienen la misma energía, pero en un átomo en el que la subcapa $1s$ está llena, los estados $2s$ tienen una energía ligeramente más baja que los estados $2p$ porque los electrones de la subcapa $1s$ neutralizan parcialmente la carga del núcleo para los electrones que se hallan fuera de la nube $1s$. Un electrón $2p$, que se halla completamente fuera de la distribución $1s$ (Fig. 21.14), es atraído por una carga efectiva de sólo $+e$, mientras que un electrón $2s$, que se halla parcialmente dentro de la distribución $1s$, a veces es atraído por toda la carga $+3e$ del núcleo. Como consecuencia, el estado $2s$ tiene una energía más baja (se halla más fuertemente ligado) que el estado $2p$ y, por lo tanto, el tercer electrón del litio se encuentra en el estado $2s$. El litio está colocado en el grupo I porque puede perder fácilmente su electrón $2s$ para formar un ion de carga $+e$.

Los cuatro electrones del berilio ($Z = 4$) llenan las subcapas $1s$ y $2s$. El berilio está en el grupo II porque puede perder fácilmente los dos electrones $2s$.

Los seis elementos siguientes ($Z = 5$ a $Z = 10$) se forman añadiendo electrones a la subcapa $2p$. La tabla 21.3 muestra cómo la subcapa $2p$ puede contener hasta seis electrones con spines convenientemente orientados. El flúor ($Z = 9$), al que falta un electrón para llenar la capa $2p$, tiene una fuerte tendencia a llenar la última posición tomando un electrón adicional para formar un ion de carga $-e$. Por lo tanto, el flúor está en el grupo VII. El gas inerte neón ($Z = 10$) llena la capa $2p$ y completa el período 2.

Período 3. Los ocho elementos siguientes ($Z = 11$ a $Z = 18$) se forman

de manera análoga a los ocho precedentes añadiendo electrones por turno a las subcapas $3s$ y $3p$ (tabla 21.3). Así, el sodio ($Z = 11$), que tiene un electrón en el estado $3s$, posee propiedades semejantes al litio, mientras que el cloro ($Z = 17$), al que le falta un electrón para llenar la subcapa $3p$, tiene propiedades semejantes al flúor. El gas inerte argón ($Z = 18$) llena la capa $3p$, y completa así el período 3.

El orden en el que se llenan las subcapas siguientes está regido por dos factores en competencia. Por una parte, una subcapa con un número cuántico principal n más pequeño tiende a tener una energía más baja que una subcapa con mayor n. Por otra parte, una subcapa con un número cuántico orbital l más pequeño tiende a tener una energía más baja que una subcapa con mayor l. Así, la subcapa $2s$ es más baja que la $3s$ y la $3s$ más baja que la $3p$. Sin embargo, hay casos

TABLA 21.3 **Orden de relleno de las subcapas de los átomos.** Cada flecha representa un estado cuántico, con la punta indicando la orientación del spin del electrón. El número que hay debajo de cada flecha es el número atómico del elemento que tiene llenos todos los anteriores estados. Un asterisco junto a un número indica una irregularidad en el relleno de la subcapa. En estos casos se puede encontrar el orden real a partir de la tabla 21.2. Por ejemplo, la tabla 21.2 muestra que el niobio ($Z = 41$) tiene cuatro electrones en la subcapa $4d$ y un electrón en la $5s$, en contraste con la disposición esperada (tres en la $4d$ y dos en la $5s$) que aparece en esta tabla.

Período	Secuencia	Subcapa	Estados cuánticos													
7	Transición	$6d$	↑ 103	↑	↑	↑	↑	↓	↓	↓	↓	↓				
	Actínidos	$5f$	↑ 89*	↑ 90*	↑ 91*	↑ 92*	↑ 93*	↑ 94*	↑ 95*	↓ 96*	↓ 97*	↓ 98	↓ 99	↓ 100	↓ 101	↓ 102
		$7s$	↑ 87	↓ 88												
6		$6p$	↑ 81	↑ 82	↑ 83	↓ 84	↓ 85	↓ 86								
	Transición	$5d$	↑ 71	↑ 72	↑ 73	↑ 74	↑ 75	↓ 76	↓ 77	↓ 78*	↓ 79*	↓ 80				
	Lantánidos	$4f$	↑ 57*	↑ 58	↑ 59	↑ 60	↑ 61	↑ 62	↑ 63	↓ 64	↓ 65	↓ 66	↓ 67	↓ 68	↓ 69	↓ 70
		$6s$	↑ 55	↓ 56												
5		$5p$	↑ 49	↑ 50	↑ 51	↓ 52	↓ 53	↓ 54								
	Transición	$4d$	↑ 39	↑ 40	↑ 41*	↑ 42*	↑ 43	↓ 44*	↓ 45*	↓ 46*	↓ 47*	↓ 48				
		$5s$	↑ 37	↓ 38												
4		$4p$	↑ 31	↑ 32	↑ 33	↓ 34	↓ 35	↓ 36								
	Transición	$3d$	↑ 21	↑ 22	↑ 23	↑ 24*	↑ 25	↓ 26	↓ 27	↓ 28	↓ 29*	↓ 30				
		$4s$	↑ 19	↓ 20												
3		$3p$	↑ 13	↑ 14	↑ 15	↓ 16	↓ 17	↓ 18								
		$3s$	↑ 11	↓ 12												
2		$2p$	↑ 5	↑ 6	↑ 7	↓ 8	↓ 9	↓ 10								
		$2s$	↑ 3	↓ 4												
1		$1s$	↑ 1	↓ 2												

competitivos como las capas $2p$ y $3s$ en las que n es menor para una subcapa mientras que l lo es para la otra. En tal caso, la subcapa con el n más pequeño tiene la energía más baja, a no ser que la diferencia en los valores de l sea mayor que la diferencia en los valores de n. Así, la subcapa $2p$ es más baja que la $3s$, pero la $4s$ es más baja que la $3d$. La $4s$ tiene energía más baja a pesar de que su valor de n sea mayor, debido a que su valor de l es 2 unidades más bajo que el valor de l de la subcapa $3d$. Esta peculiar inversión del orden de las subcapas se muestra en la tabla 21.3. Tiene como resultado la existencia de un grupo de elementos de transición que tienen propiedades semejantes pero no pertenecen a ninguno de los grupos estándar de la tabla periódica. Estos elementos aparecen por primera vez en el período 4.

Período 4. Los dos primeros elementos ($Z = 19$ y $Z = 20$) del período 4 se forman añadiendo electrones a la subcapa $4s$ y por lo tanto pertenecen a los grupos I y II. Después de eso se añaden electrones a la subcapa $3d$ formando una serie de 10 elementos de transición ($Z = 21$ a $Z = 30$) entre los grupos II y III. Estos elementos tienen propiedades semejantes porque todos ellos tienen dos electrones en la subcapa $4s$.* Después de llenar la subcapa $3d$, los electrones van a la subcapa $4p$ y los elementos formados se parecen a los elementos $2p$ y $3p$ de los períodos precedentes. El gas inerte criptón ($Z = 36$) llena la subcapa $4p$ completando así el período 4.

Período 5. Este período tiene idéntica forma que el período 4. Los electrones llenan las subcapas $5s$, $4d$ y $5p$ del período 5, del mismo modo que llenan las capas $4s$, $3d$ y $4p$ del período 4.

Período 6. Los dos primeros elementos ($Z = 55$ y $Z = 56$) del período 6 se forman llenando la subcapa $6s$. Después de eso se llena la subcapa $4f$ porque tiene energía más baja que la subcapa $5d$. Como los electrones $4f$ están dentro de los electrones $6s$, tienen poco efecto sobre las propiedades químicas de estos elementos. En consecuencia, los 14 elementos siguientes ($Z = 57$ a $Z = 70$) forman una serie con propiedades químicas casi idénticas. Esta serie, formada por *lantánidos* (o tierras raras), no se corresponde con ninguna serie previa de elementos, por lo que se le asigna un lugar especial en la tabla periódica. La capa $4f$ se llena en $Z = 70$. A continuación los electrones van a la subcapa $5d$ dando lugar a una serie de 10 elementos de transición análogos a los de los períodos 4 y 5. El primer miembro de la serie de transición ($Z = 71$) se considera también como el último miembro de la serie lantánida. El gas inerte radón llena la subcapa $6p$ y completa el período 6.

Período 7. Este período empieza lo mismo que el anterior con el relleno de las subcapas $7s$ y $5f$. El relleno de la subcapa $5f$ forma una nueva serie de elementos ($Z = 89$ hasta $Z = 102$) llamados *actínidos*.

* Hay algunas irregularidades en el relleno de la subcapa $3d$. Algunos elementos de transición sólo tienen un electrón $4s$, estando el otro electrón en la subcapa $3d$. Éstas y otras irregularidades menores se pueden ver estudiando las configuraciones electrónicas que se muestran en la tabla 21.2.

El último elemento que se da en la naturaleza es el uranio ($Z = 92$), pero los elementos con Z hasta 103 han sido producidos artificialmente en reacciones nucleares. Este último elemento tiene un electrón en la subcapa $6d$ y, por lo tanto, es el primer miembro de la serie de transición del período 7 y el último miembro de los actínidos.

OBSERVACIÓN. De los elementos que tienen Z mayor que 103 se ha hablado pero todavía no han sido confirmados. La existencia de elementos con Z elevado está limitada por la capacidad de sus núcleos para mantenerse unidos. Si se obtuviesen elementos con Z superior, es de esperar que llenasen el período 7 de manera regular.

La construcción de la tabla periódica a partir de principios físicos fundamentales es uno de los grandes logros de la mecánica cuántica. En esta construcción se ve que las propiedades de los elementos no son caprichos de la naturaleza sino que se deducen de las leyes fundamentales de manera ordenada y comprensible.

21.5. ENLACES QUÍMICOS

Una molécula consta de dos o más átomos unidos por fuerzas atractivas entre los átomos. Estas fuerzas interatómicas de enlace, o *enlaces químicos*, son de origen eléctrico pero tienen características diferentes en moléculas distintas. Discutiremos los tipos extremos de enlace químico, *iónico* (o heterepolar) y *covalente* (u homopolar), porque son los más fáciles de entender. Sin embargo, en la mayoría de las moléculas, el tipo de enlace es intermedio entre estos dos extremos.

En enlace iónico puro se da en moléculas sencillas, como NaCl y KF, que están compuestas de un átomo del grupo I y otro del grupo VII. Los átomos del grupo I sólo tienen un electrón en su subcapa exterior s y $Z-1$ electrones internos. Estos electrones internos tienden a neutralizar la mayor parte de la carga del núcleo, de modo que el electrón exterior está enlazado al átomo por una carga efectiva mucho menor que la carga total ($+Ze$) del núcleo. En consecuencia, el electrón exterior es fácilmente desplazado de un átomo del grupo I, quedando un ion cargado positivamente. A los átomos del grupo VII, por otro lado, les falta un electrón para completar su subcapa exterior p, por lo que tienden a atraer a un electrón extra formando un ion cargado negativamente.

Se forma un enlace iónico cuando el electrón exterior abandona un átomo del grupo I y se une a un átomo del grupo VII, dando lugar a dos iones de carga opuesta. Cuando estos iones están muy separados, la fuerza eléctrica entre ellos es atractiva y se mueven el uno hacia el otro. Sin embargo, cuando se hallan cerca, sus nubes electrónicas empiezan a repelerse mutuamente y, a cierta distancia, la fuerza atractiva se hace igual a la fuerza repulsiva. Ésta es la separación de equilibrio para los iones en un enlace iónico. A esta distancia la repulsión de las nubes electrónicas de los iones impide a éstos acercarse más y la atracción de sus cargas opuestas les impide separarse. Así se forma una molécula estable con una distancia fija entre los iones.

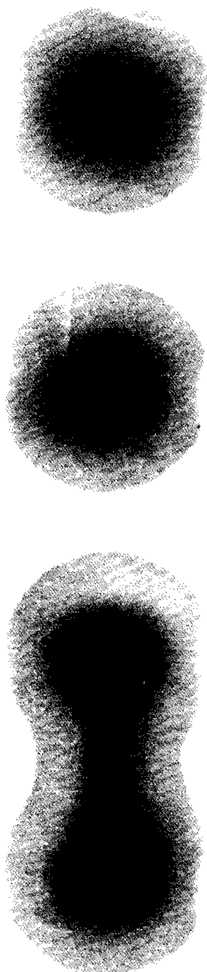


FIGURA 21.15
Distribuciones de probabilidad de los electrones en dos átomos de hidrógeno antes y después de que los átomos se unan para formar una molécula de hidrógeno H_2.

Dos átomos que comparten más que intercambian electrones, dan lugar a un enlace covalente. La Fig. 21.15 muestra cómo las distribuciones de probabilidad de los electrones en dos átomos de hidrógeno separados se vuelven a disponer para formar una molécula de hidrógeno unida por enlace covalente, H_2, en la que los dos electrones son compartidos igualmente por cada núcleo. La distribución de probabilidad

es más densa entre los núcleos que fuera de ellos, lo cual quiere decir que un electrón es más probable que esté entre los núcleos que en cualquier otra parte. Lo que mantiene a la molécula unida es esta concentración de carga negativa entre los dos núcleos. A partir de la ecuación de Schrödinger se puede demostrar que esta distribución constituye una molecula estable.

PROBLEMAS

OBSERVACIÓN. Expresar todas las energías en electrón volts.

1. ¿Cuál es la energía de un fotón de longitud de onda $4{,}0 \times 10^{-7}$ m?
   Resp. 3,1 eV.
2. Hallar la longitud de onda y la frecuencia de un fotón de 100 eV.
3. La frecuencia crítica f_0 de la plata es $1{,}04 \times 10^{15}$ Hz. ¿Cuál es la energía mínima E_{min} que se necesita para arrancar un electrón de la plata?
   Resp. 4,35 eV.
4. La energía mínima que se necesita para arrancar un electrón del cesio es 2,6 eV. ¿Cuál es el fotón de más larga longitud de onda que expulsará un electrón del cesio?
5. ¿Cuál es el rayo X de longitud de onda más corta producido por un aparato de rayos X de 220 kV?
   Resp. $6{,}21 \times 10^{-12}$ m
6. ¿Qué diferencia de potencial se necesita para producir rayos X con una longitud de onda mínima de $4{,}5 \times 10^{-11}$ m?
7. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón con una velocidad de 5×10^7 m/s? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de un protón con la misma velocidad?
   Resp. (*a*) $1{,}46 \times 10^{-11}$ m; (*b*) $7{,}94 \times 10^{-15}$ m.
8. ¿Cuál es la energía cinética de un electrón con una longitud de onda de 5×10^{-10} m?
9. La energía cinética de un electrón es 100 eV. (*a*) ¿Cuál es su longitud de onda? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de un protón de 100 eV?
   Resp. (*a*) $1{,}23 \times 10^{-10}$ m; (*b*) $2{,}87 \times 10^{-12}$ m.
10. ¿Cuáles son las longitudes de onda de un fotón de 1 eV y un electrón de 1 eV, respectivamente?
11. Un microscopio electrónico puede resolver (o separar) estructuras que son 10 o más veces el tamaño de la longitud de onda del electrón. ¿Cuál es la estructura más pequeña que se puede resolver en un microscopio electrónico utilizando electrones de 10 000 eV? Comparar esto con el poder separador de un microscopio óptico.
    Resp. 0,123 nm.
12. Las Ecs. 21.1 y 21.3 dan la frecuencia f y la longitud de onda λ de una partícula de energía $E = 1/2\ mv^2$. Demostrar que $f\lambda$ *no* es igual a la velocidad v de la partícula.
13. ¿Cuál es la velocidad de un electrón en la órbita de Bohr más baja del hidrógeno?
    Resp. $2{,}18 \times 10^6$ m/s.
14. ¿Cuál es el radio de la órbita de Bohr del hidrógeno correspondiente a $n = 20$?
15. Hallar la longitud de onda de la radiación emitida cuando un átomo de hidrógeno efectúa una transición desde el estado $n = 6$ al estado $n = 3$.
    Resp. $1{,}096 \times 10^{-6}$ m.
16. ¿Cuánta energía se necesita para ionizar un átomo de hidrógeno en el estado $n = 2$?
17. El espectro del hidrógeno contiene cuatro longitudes de onda en la región visible. Hallar las transiciones que emiten estas longitudes de onda y determinar las longitudes de onda.
    Resp. 411, 435, 487 y 657 nm.
18. Todas las transiciones que van directamente al estado fundamental del hidrógeno producen una secuencia de longitudes de onda llamada *serie de Lyman*. (*a*) ¿Cuáles son las longitudes de onda más larga y más corta de la serie de Lyman. (*b*) ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta radiación?
19. Todas las transiciones que van directamente al estado $n = 2$ del hidrógeno producen una secuencia de longitudes de onda llamada *serie de Balmer*. ¿Cuál es (*a*) la longitud de onda más larga y (*b*) más corta en la serie de Balmer? (*c*) ¿A qué re-

giones del espectro pertenecen estas radiaciones?
Resp. (*a*) 657 nm; (*b*) 365 nm; (*c*) visible y ultravioleta.

20. La Fig. 21.16 muestra los seis primeros niveles de energía del electrón exterior del sodio. (*a*) ¿Cuál es la energía de ionización del sodio? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida en la transición del estado $3d$ al $3p$? (*c*) ¿Cuál es la transición que da lugar a la luz amarilla característica del sodio a 589 nm?

estado	E, eV
	0
$5s$	−1.1
$4p$	−1.4
$3d$	−1.6
$4s$	−1.9
$3p$	−3.0
$3s$	−5.1

FIGURA 21.16
Problema 20.

21. ¿Cuál es la energía cinética mínima de un electrón confinado en una región del tamaño del núcleo (10^{-15} m)?
22. Una canica de 10 g se mueve hacia adelante y hacia atrás en una caja de 10 cm de longitud a una velocidad de 10 cm/s. (*a*) ¿Cuál es el número n del estado cuántico de la canica? (*b*) ¿Por qué se puede variar la energía de la canica de manera continua aunque su energía sólo pueda cambiar en cantidades discretas?
Resp. (*a*) 3×10^{29}.
23. Hacer una lista de todas las subcapas de la capa $n = 7$. ¿Cuántos estados hay en esta capa?
24. Hacer una lista de las subcapas con $n \leq 6$ que no están ocupadas en ningún átomo.

BIBLIOGRAFÍA

BARROW, Gordon M.: «Physical Chemistry» 3.ª ed. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973. Se utilizan gráficos esquemáticos en lugar de desarrollos matemáticos extensos para describir los orbitales electrónicos en átomos y moléculas.

BEISER, Arthur: «Concepts of Modern Physics», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963. Para estudiantes que ya han manejado el cálculo este libro proporciona una excelente introducción al tratamiento matemático de la mecánica cuántica.

BOHR, Niels: «Atomic Physics and Human Knowledge», John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1958. Una colección de ensayos sobre la importancia de la mecánica cuántica para la biología, la cultura humana y la epistemología. Tiene especial importancia un ensayo que cuenta las discusiones de Bohr con Einstein acerca de la mecánica cuántica.

CLINE, Barbara Lovett: «Men Who made a New Physics», The New American Library, Nueva York, 1969. Un relato escrito con sencillez acerca del desarrollo de la física moderna; hace especial hincapié en las ideas y personalidades de los hombres a los que se refiere.

GAMOW, George: «Mr. Tomkins in Wonderland: Stories of c, G and h», The Macmillan Company, Nueva York, 1940. Mr. Tomkins visita un mundo en el que la h es tan grande que los efectos cuánticos son sucesos corrientes.

REICHENBACH, Hans: «The Rise of Scientific Philosophy», University of California Press, Berkeley, 1951. Relato claro a nivel estudiantil de las implicaciones de la mecánica cuántica en la filosofía moderna.

SHAMOS, Morris H. (ed): «Great Experiments in Physics», Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1959. Contiene fragmentos del artículo de Einstein de 1905 sobre el efecto fotoeléctrico y del de Bohr de 1913 sobre la estructura del átomo.

Núcleos Capítulo 22

Las únicas propiedades del núcleo que utiliza la teoría atómica son su pequeño tamaño (comparado con el de un átomo), su gran masa (comparada con la masa de un electrón) y su carga positiva. Aunque el núcleo tiene de por sí una compleja estructura interna, esta estructura no tiene casi ningún efecto sobre las órbitas electrónicas debido a que el núcleo es mucho más pequeño que las órbitas. Por esta razón todas las propiedades del átomo, incluyendo las propiedades químicas de los elementos, son en gran parte independientes de la estructura interna del núcleo. Éste es un hecho afortunado porque de lo contrario la física nuclear habría tenido que desarrollarse antes que la física atómica.

Antes de 1930 se sabía mucho empíricamente acerca del núcleo, pero hasta el descubrimiento del neutrón por James Chadwick (1891-1974) en 1932 no se consiguió un conocimiento sistemático de la estructura interna del núcleo. Mientras la física atómica ha proporcionado una más profunda comprensión de las propiedades conocidas de los átomos y moléculas, la física nuclear ha descubierto nuevas e inesperadas propiedades de la materia. Estos descubrimientos han tenido enormes consecuencias, que se han traducido tanto en grandes avances en la diagnosis médica, en la radioterapia y en la producción de energía como en las armas militares de gran capacidad de destrucción.

22.1. LA ESTRUCTURA DEL NÚCLEO

El núcleo está compuesto de dos clases de partículas, *protones y neutrones*, unidos por fuerzas nucleares. El protón es una partícula elemental (Apart. 17.1) de carga $+e$; el *número atómico* Z del elemento es igual al número de protones que existen en el núcleo. Por ejemplo, un núcleo de carbono ($Z = 6$) contiene 6 protones y un núcleo de uranio ($Z = 92$) contiene 92 protones. El neutrón es una partícula elemental sin carga y con una masa ligeramente mayor que la masa del protón. El *número másico* A de un núcleo es la suma del número de protones Z y del número de neutrones N:

$$A = Z + N$$

El número másico es el número total de *nucleones* (neutrones y protones) que hay en el núcleo.

Todos los núcleos con el mismo valor de Z se designan por el símbolo químico del elemento correspondiente. Todos los núcleos con los mismos valores de Z y A constituyen una especie nuclear particular o *núclido*. Un determinado núclido se designa por medio del número másico A colocado como superíndice del símbolo químico. Por ejemplo, el núclido compuesto de seis protones y seis neutrones se escribe ^{12}C, el núclido compuesto de seis protones y ocho neutrones se

escribe ^{14}C y el núclido compuesto de siete protones y siete neutrones se escribe ^{14}N. Esta notación especifica completamente al núclido, si se conocen los números atómicos y los símbolos de los elementos. No obstante, y para evitar posibles confusiones, se suele colocar el número atómico Z como subíndice del símbolo, por ejemplo, $^{12}_{6}C$, $^{14}_{6}C$, $^{14}_{7}N$.

Los nucleones permanecen unidos en el núcleo por una fuerza fundamental (Apart. 17.1) distinta de la fuerza eléctrica y la gravitatoria. A pequeñas distancias la fuerza nuclear es mucho más intensa que la fuerza eléctrica, pero disminuye rápidamente al aumentar la distancia entre los nucleones. La fuerza nuclear puede ilustrarse mejor representando la energía potencial nuclear U_n entre dos nucleones en función de la distancia r entre ellos. La Fig. 22.1 muestra los potenciales neutrón-protón (*n-p*) y neutrón-neutrón (*n-n*). Ambos potenciales tienden rápidamente a cero cuando r aumenta y son mínimos en torno a $1{,}0 \times 10^{-15}$ m. La energía potencial negativa indica una fuerza atractiva entre los nucleones ya que se debe realizar trabajo positivo para separarlos. La fuerza *n-p* es más atractiva que la *n-n* porque su potencial es más negativo. La subida abrupta en la energía potencial a distancias menores que $1{,}0 \times 10^{-15}$ m indica una intensa fuerza repulsiva a pequeñas distancias. Los nucleones se comportan como si tuviesen un núcleo duro que les impidiese aproximarse más allá de $0{,}5 \times 10^{-15}$ m.

La fuerza nuclear entre dos protones es la misma que la fuerza *n-n*, pero además existe la repulsión eléctrica entre los protones. La figura 22.2 representa las energías potenciales nuclear y eléctrica entre dos protones y la energía potencial combinada.

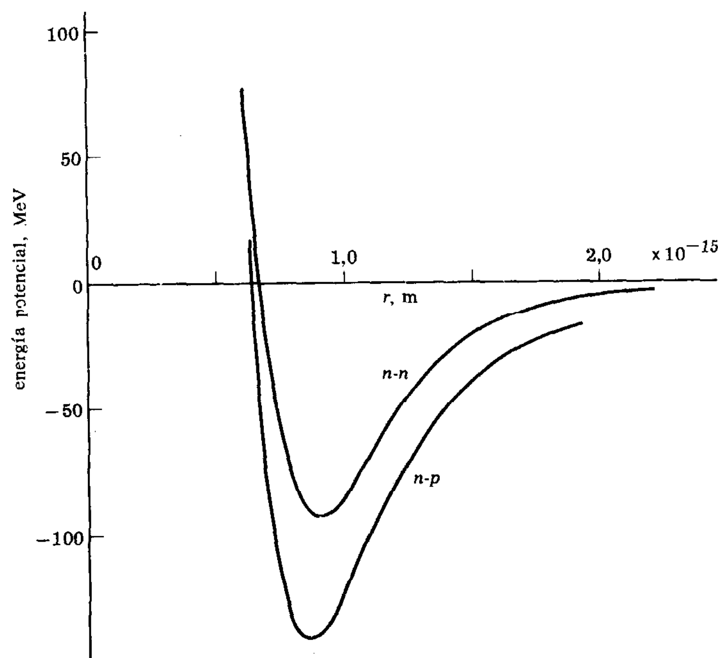


FIGURA 22.1
Energía potencial nuclear U_n entre dos neutrones (*n-n*) y entre un neutrón y un protón (*n-p*) en función de la distancia r entre ellos.

Dos factores gobiernan la razón de neutrones a protones en un núcleo: (1) La fuerza *n-p*, que es la más atractiva, favorece un número igual de neutrones y protones. (2) La fuerza eléctrica repulsiva entre los protones, que aumenta con el número de protones, favorece un exceso de neutrones. En los núclidos ligeros ($A \leq 40$) domina el primer factor, y los núclidos estables tienen aproximadamente igual número de protones y neutrones. Sin embargo, el segundo factor domina en los núclidos más pesados, y N supera a Z. Esto se muestra en la Fig. 22.3 que es un gráfico de N en función de Z para núclidos estables. A modo de comparación se ha representado la recta $Z = N$. Como no existen núclidos estables con $Z > 84$, los puntos con $Z \geq 85$ representan los núclidos radiactivos de vida más larga (Apart. 22.2).

Los núclidos con el mismo Z pero diferente A se llaman *isótopos*. Los isótopos forman átomos con idénticas propiedades químicas pero con propiedades nucleares muy diferentes. Por cada Z existen de 10 a 20 isótopos, aunque sólo unos cuantos son estables y se dan en la naturaleza. Los demás son radiactivos y normalmente deben producirse de manera artificial por medio de una reacción nuclear. La tabla 22.1 es una selección de algunos isótopos importantes. En el «Handbook of Chemistry and Physics» se puede hallar una tabla completa de las propiedades de todos los isótopos conocidos.

La masa de un átomo se mide en unidades de masa atómica (u). Una unidad de masa atómica se define como un doceavo de la masa de un átomo de ^{12}C:

$$1\ u = \tfrac{1}{12} m_{^{12}C}$$

o sea

$$m_{^{12}C} = 12{,}00000\ u$$

En la tabla 22.1 se dan las masas de algunos núclidos corrientes. Éstas son las masas del átomo completo, es decir, incluyendo los electrones. Por ejemplo, la masa del ^1H es la masa combinada de un protón y un electrón. La tabla 22.1 da también las masas del protón, neutrón y electrón en unidades de masa atómica.

La masa de un átomo es aproximadamente igual a la masa de Z átomos de hidrógeno y N neutrones. Como las masas del ^1H y del neu-

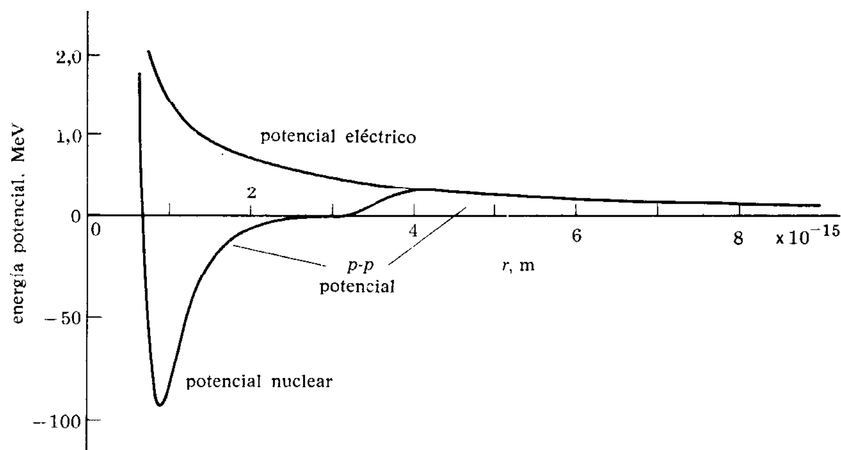


FIGURA 22.2
Energía potencial entre dos protones en función de la distancia r entre ellos. La energía potencial es la suma de la energía potencial nuclear negativa y la energía potencial eléctrica positiva. Obsérvese que la escala positiva es diferente de la negativa.

trón son aproximadamente de 1,0 u, todas las masas atómicas son aproximadamente iguales al número másico A. Por ejemplo, la masa de ocho átomos de ^{1}H y ocho neutrones es

$$8 \times 1{,}007825 \text{ u} + 8 \times 1{,}008665 \text{ u} = 16{,}1319 \text{ u}$$

que excede en 0,137 u a la masa del ^{16}O dada en la tabla 22.1. En realidad la masa de cada átomo es *ligeramente menor que la suma* de las masas de las distintas partes constituyentes. El *defecto de masa* Δm

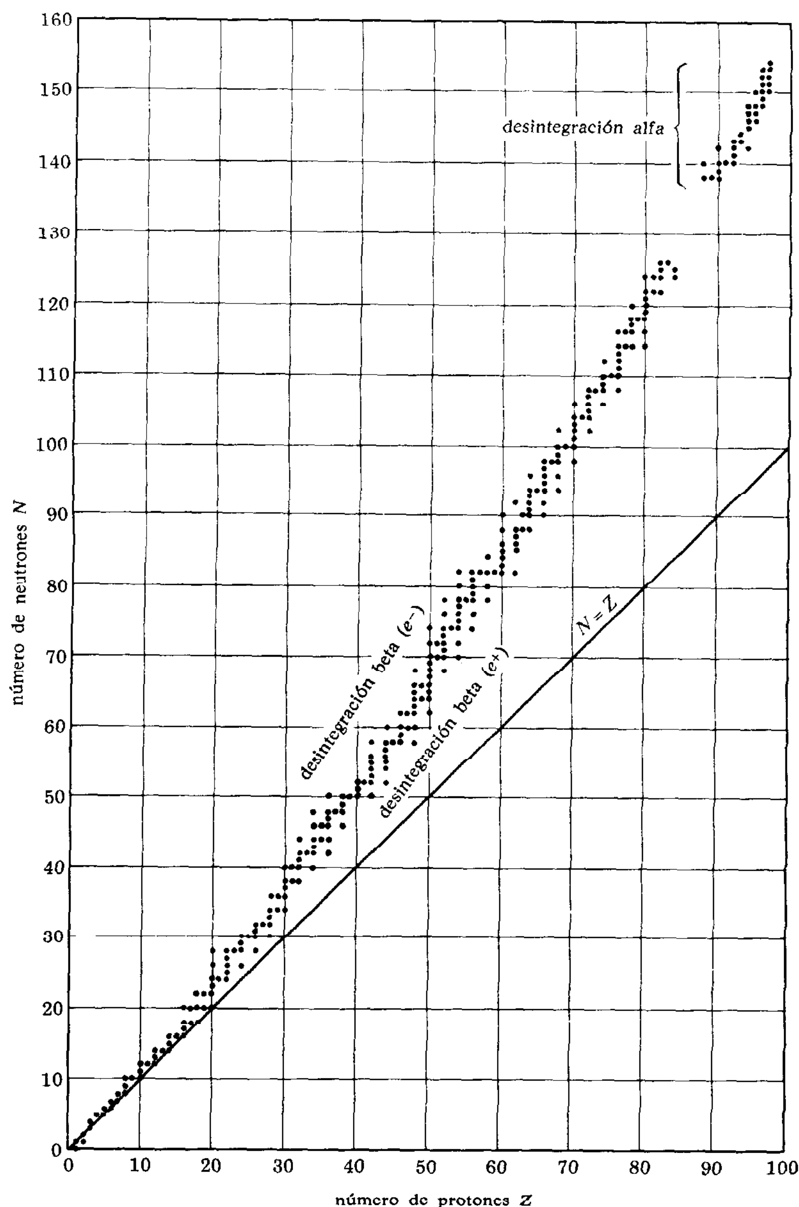


FIGURA 22.3
Gráfico del número de neutrones N en función del número de protones Z de los núclidos estables. Los puntos con $Z \geq 85$ representan núclidos radiactivos de vida larga. Para comparar se ha dibujado la recta $N = Z$.

de un átomo se define como la diferencia entre las masas de sus partes y la masa del átomo. Por ejemplo, el defecto de masa del ^{16}O es $\Delta^{16}O = 0{,}137$ u.

Ejemplo 1. ¿Cuál es el defecto de masa del ^{32}S?
Según la tabla de los elementos de la contraportada posterior, vemos que el número atómico del azufre (S) es $Z = 16$. Por consiguiente, el número de neutrones del ^{32}S es

$$N = A - Z = 32 - 16 = 16$$

La masa por separado de los nucleones es

$$Zm_{^1H} + Nm_n = (16)(1{,}007825 \text{ u}) + (16)(1{,}008665 \text{ u}) = 32{,}26384 \text{ u}$$

Según la tabla 22.1, la masa del ^{32}S es 31,97207 u, por lo que el defecto de masa es

$$\Delta^{32}S = 32{,}26384 \text{ u} - 31{,}97207 \text{ u} = 0{,}292 \text{ u}$$

La *energía de enlace* ΔE de un sistema ligado es la energía de las partes del sistema por separado menos la energía del sistema ligado. Su valor equivale al trabajo requerido para separar el sistema en sus partes.

Por ejemplo, un átomo de hidrógeno tiene 13,6 eV menos energía que un protón y un electrón por separado, lo que significa que se necesitan 13,6 eV para ionizar el hidrógeno. Del mismo modo, un núcleo de oxígeno posee 127,6 MeV (1 MeV = 10^6 eV) menos de energía que sus constituyentes por separado, lo que quiere decir que se necesitan 127,6 MeV para romper un núcleo de ^{16}O en sus 16 nucleones. La escala del enlace nuclear es un millón de veces mayor que la del enlace atómico, pero el principio es el mismo.
De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa es una forma de la energía. En consecuencia, un sistema ligado, que tiene menos energía que sus partes por separado, tiene menos masa también. Así el defecto de masa es una manifestación de la más baja energía del sistema ligado. Einstein demostró que el defecto de masa Δm está relacionado con la energía de enlace ΔE por medio de

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad 22.1$$

donde c es la velocidad de la luz. Para hacer uso de esta ecuación, m, E y c deben estar en unidades SI. Sin embargo, en física nuclear se acostumbra a dar la masa en unidades de masa atómica y la energía en millones de electron-volt (MeV). Las conversiones entre estas unidades y las SI son

$$1 \text{ u} = 1{,}66053 \times 10^{-27} \text{ kg}$$
$$1 \text{ MeV} = 1{,}60219 \times 10^{-13} \text{ J}$$

de modo que si Δm y ΔE se expresan en unidades de masa atómica y MeV, respectivamente, la Ec. 22.1 se convierte en

$$\Delta m(1{,}66053 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = \frac{\Delta E(1{,}60219 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}{(2{,}99792 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2}$$

o sea

$$\Delta m = 1{,}07356 \times 10^{-3}\ \text{u/MeV}\ \Delta E$$

$$\Delta E = 931{,}48\ \text{MeV/u}\ \Delta m \qquad 22.2$$

TABLA 22.1. **Propiedades de algunos núclidos.** Además del número atómico, el número másico y la masa atómica de ciertos núclidos seleccionados, la tabla recoge el porcentaje de abundancia de los núclidos que se dan en la naturaleza así como la semivida y el modo de desintegración de los núclidos radiactivos.

Z	A	Símbolo	Masa atómica	Porcentaje de abundancia	Semivida	Modo de desintegración
		e	0,0005486			
0	1	n	1,008665		12 min	e^-
1	1	p	1,007277			
1	1	$^{1}_{1}H$	1,007825	99,985		
1	2	$^{2}_{1}H$	2,01402	0,015		
1	3	$^{3}_{1}H$	3,01605	†	12,26 a	e^-
2	4	$^{4}_{2}He$	4,00260	100		
6	12	$^{12}_{6}C$	12,00000	98,89		
6	13	$^{13}_{6}C$	13,00335	1,11		
6	14	$^{14}_{6}C$	14,00324	†	5730 a	e^-
7	13	$^{13}_{7}N$	13,00574		10 min	e^+
7	14	$^{14}_{7}N$	14,00307	99,63		
7	15	$^{15}_{7}N$	15,00011	0,37		
8	16	$^{16}_{8}O$	15,99491	99,759		
8	17	$^{17}_{8}O$	16,99913	0,037		
8	18	$^{18}_{8}O$	17,99916	0,204		
15	31	$^{31}_{15}P$	30,97376	100		
15	32	$^{32}_{15}P$	31,97391		14,3 d	e^-
16	32	$^{32}_{16}S$	31,97207	95,0		
19	39	$^{39}_{19}K$	38,96371	93,70		
19	40	$^{40}_{19}K$	39,97400	0,00118	$1{,}28 \times 10^{9}$ a	e^-, e^+
19	41	$^{41}_{19}K$	40,96183	6,88		
27	59	$^{59}_{27}Co$	58,93319	100		
27	60	$^{60}_{27}Co$	59,93381		5,26 a	e^-
38	88	$^{88}_{38}Sr$	87,90564	82,56		
38	90	$^{90}_{38}Sr$	89,90775		28,1 a	e^-
43	99	$^{99}_{43}Tc^{m}$	98,90625		6,0 h	γ
43	99	$^{99}_{43}Tc$	98,90625		$2{,}12 \times 10^{5}$ a	e^-
83	209	$^{209}_{83}Bi$	208,98039	100		
83	214	$^{214}_{83}Bi$	213,99869		19,7 min	e^-, α
92	235	$^{235}_{92}U$	239,04392	0,7	$7{,}1 \times 10^{8}$ a	α
92	238	$^{238}_{92}U$	238,05077	99,3	$4{,}51 \times 10^{9}$ a	α
92	239	$^{239}_{92}U$	239,05430		23,5 min	e^-
93	239	$^{239}_{93}Np$	239,05292		2,35 d	e^-
94	239	$^{239}_{94}Pu$	239,05215		$2{,}44 \times 10^{4}$ a	α

† Se da en la naturaleza en vestigios.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la energía de enlace del ^{32}S? ¿Cuál es la energía de enlace media por nucleón en el ^{32}S?
Según la Ec. 22.2 y el defecto de masa hallado en el ejemplo 1, la energía de enlace es

$$\Delta E = (931{,}48\ \text{MeV/u})\ \Delta m = (931{,}48\ \text{MeV/u})(0{,}292\ \text{u}) = 272{,}0\ \text{MeV}$$

La energía media de enlace por nucleón en el ^{32}S es

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{272{,}0\ \text{MeV}}{32} = 8{,}5\ \text{MeV}$$

la cual es un valor típico para la mayoría de los núcleos. Ésta es la energía media necesaria para arrancar un nucleón del núcleo.
Con espectrómetros de masas(Apart. 19.3) se han hecho medidas muy precisas de las masas de los núclidos. A partir de estos datos se puede determinar el defecto de masa Δm y la energía media de enlace por nucleón $\Delta E/A$. Los resultados de muchas de estas medidas se han resumido en la Fig. 22.4, que es un gráfico de $\Delta E/A$ en función de A. Se observa que aunque $\Delta E/A$ es aproximadamente 8 MeV para casi todos los núcleos, aumenta con A de manera gradual hasta un máximo de 8,8 MeV en torno a $A = 58$ y disminuye después también gradualmente hasta 7,6 MeV para $A = 238$. Este comportamiento es de importancia crítica para la producción de energía a partir de procesos nucleares (Apart. 22.3).

OBSERVACIÓN. Como la energía de un átomo de hidrógeno es 13,6 eV menor que la energía de un protón y un electrón separados, la masa de un átomo de hidrógeno es menor que la masa de un protón más la de un electrón. Según la Ec. 22.2, esta diferencia de masa es

$$\Delta m = (1{,}073 \times 10^{-3}\ \text{u/MeV})(13{,}6 \times 10^{-6}\ \text{MeV}) = 1{,}46 \times 10^{-9}\ \text{u}$$

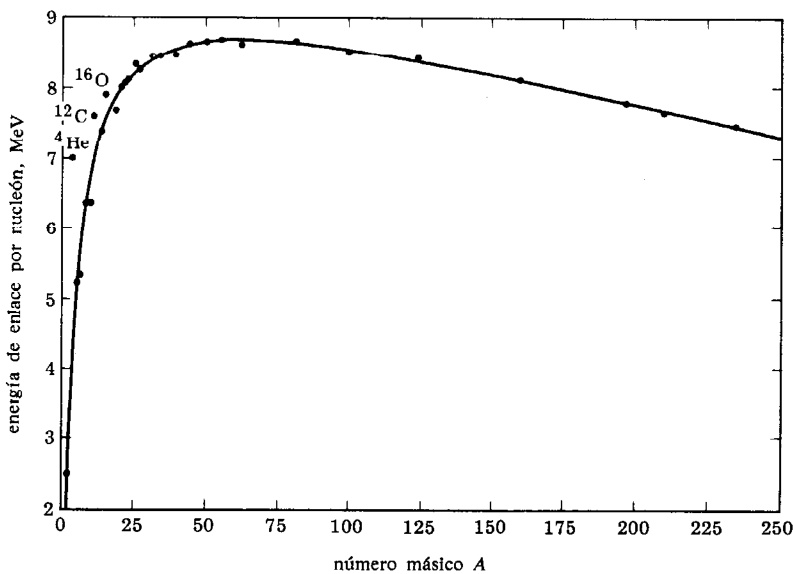


FIGURA 22.4
La energía de enlace por nucleón $\Delta E/A$ en función del número másico A para los núclidos estables.

Como esta diferencia de masas es menor que la incertidumbre en la medida de las masas, no es detectable. En general las variaciones de energía en las reacciones químicas son demasiado pequeñas para producir cambios de masa mensurables.

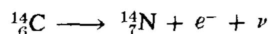
22.2. RADIACTIVIDAD

De los miles de núclidos conocidos sólo son estables unos cuantos centenares. Un núclido inestable, o *radiactivo*, es uno que se transforma espontáneamente (se desintegra) en otro núclido. Si el núclido hijo es también radiactivo, se desintegra a su vez hasta que se forma un núclido estable (no radiactivo). Aunque el proceso de desintegración es en sí instantáneo, un núcleo radiactivo puede sobrevivir horas, días o años antes de desintegrarse de repente. Los núclidos radiactivos de vida suficientemente larga han encontrado importantes aplicaciones en tecnología, medicina y en la investigación biológica.

Modos de desintegración

Los dos modos principales de desintegración son las llamadas *desintegraciones alfa* y *beta*. Cada núclido radiactivo tiene un modo de desintegración característico, como se indica en la tabla 22.1, aunque unos pocos núclidos, como el ^{214}Bi, se desintegran según uno y otro modo. La desintegración alfa se limita principalmente a los isótopos de los elementos más pesados ($Z \geq 78$), en tanto que la desintegración beta se da en isótopos de todos los elementos. A modo de regla diremos que la desintegración alfa ocurre en núclidos próximos a la línea señalada como «alfa-radiactivos» en la Fig. 22.3 y la desintegración beta se da en los núclidos situados por encima y por debajo de la línea de núclidos estables.

La *desintegración beta* es un proceso en el que un neutrón de dentro del núcleo se convierte espontáneamente en un protón, emitiendo un electrón e^- y una partícula sin masa ni carga llamada *neutrino* ν. Por ejemplo, la desintegración del ^{14}C es



$$^{14}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^- + \nu$$

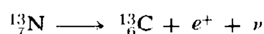
Los electrones producidos de este modo reciben el nombre de *rayos beta*. Obsérvese que la carga total ($+6e$) y el número total de nucleones (14) no varían en esta reacción. Es un resultado general, válido para cualquier reacción nuclear, el que *permanezca constante la carga total y el número total de nucleones de un sistema*. Éste es un enunciado de las leyes de *conservación de la carga* (Apart. 17.2) y de *conservación del número de nucleones*. Se ha comprobado que estas leyes se cumplen sin excepción en todos los procesos físicos.

En la tabla 22.1 se ve que la masa del ^{14}C es mayor que la del ^{14}N en 0,00017 u. En el proceso de desintegración este exceso de masa se convierte en 0,156 MeV de energía, que aparece en forma de energía cinética del electrón y del neutrino.* En una determinada desintegra-

* La masa del rayo beta está ya incluida en la masa del $^{14}_{7}$N porque las masas atómicas incluyen la masa de los Z electrones orbitales además de la masa del núcleo. Es decir, la masa del $^{14}_{7}$N incluye la masa de un electrón más que la del $^{14}_{6}$C.

ción, el electrón tiene una energía cinética que varía entre 0 y 0,156 MeV mientras el neutrino se queda con el resto. El neutrino difícilmente interacciona con otra materia una vez producido, de modo que carece de efectos fisiológicos. No obstante, es importante en astronomía porque constituye una de las vías por las que pierde energía una estrella.

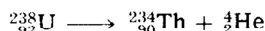
La desintegración beta es el proceso mediante el cual un núclido que está situado por encima de la línea de estabilidad, es decir, un núclido con un exceso de neutrones, se convierte en un núclido estable. Un núclido que está situado por debajo de la línea de estabilidad, o sea, un núclido con un exceso de protones, sufre un proceso de desintegración análogo en el que un protón se convierte en un neutrón emitiendo un positrón e^+ y un neutrino. Un *positrón* es una partícula idéntica a un electrón bajo todos los puntos de vista excepto en que está cargada positivamente. Por ejemplo, la desintegración del ^{13}N es



$$^{13}_{7}N \longrightarrow {}^{13}_{6}C + e^+ + \nu$$

Obsérvese de nuevo que la carga y el número de nucleones se conservan. Los positrones se discuten con más detalle en el Apart. 22.5, en el que se considera su uso en medicina nuclear.

La *desintegración alfa* es un proceso en el que un núcleo pesado emite espontáneamente un núcleo ^4He. Por ejemplo, la desintegración del ^{238}U es



$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$$

Los núcleos de helio producidos de este modo reciben el nombre de *partículas alfa*. Las partículas alfa utilizadas por Rutherford en su famoso experimento de dispersión (Apart. 21.2) se obtuvieron de la desintegración del ^{214}Bi. La diferencia de masa entre el núclido padre y la suma de las masas del ^4He y del núclido hijo aparece en forma de energía cinética de la partícula alfa. Cuando una partícula alfa se desplaza a través de la materia, transfiere rápidamente esta energía a los átomos que la rodean incrementando su energía térmica.

Los *rayos gamma* son fotones de corta longitud de onda que acompañan a veces a una desintegración alfa o beta. El movimiento de los nucleones en el interior de un núcleo está regido por las mismas leyes mecanocuánticas que gobiernan el movimiento de los electrones en un átomo; de aquí que un núcleo, lo mismo que un átomo, sólo puede existir en ciertos estados cuánticos discretos. Cuando se desintegra un núcleo radiactivo, el núcleo hijo no es producido necesariamente en el estado de más baja energía *(estado fundamental)*. Sin embargo, un núcleo, al igual que un átomo, en un estado excitado decae rápidamente al estado fundamental mediante la emisión de fotones. Los fotones producidos de este modo se llaman rayos gamma. Dado que la diferencia de energía entre estados cuánticos de un núcleo es a menudo de millones de electronvolts, los rayos gamma tienen muy alta energía y longitudes de onda muy cortas. Los rayos gamma son físicamente los mismos que los rayos X de corta longitud de onda y tienen el mismo uso en radioterapia.

Semivida

La transición de un estado excitado al estado fundamental de un núcleo por emisión de un rayo gamma es generalmente instantánea. No obstante, un núcleo radiactivo puede existir durante mucho tiempo antes de sufrir una desintegración alfa o beta. De acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica, es completamente indeterminado saber cuándo se va a desintegrar un núcleo concreto. Todo lo que se puede predecir es la probabilidad de que un núcleo se desintegre dentro de un período dado. Esto se expresa corrientemente dando el período τ dentro del cual un núcleo tiene una probabilidad del 50 por ciento de sufrir una desintegración. Este período, que recibe el nombre de *semivida*, es característico de cada núclido.

Por ejemplo, en la tabla 22.1 vemos que el ^{13}N tiene una semivida de 10 min. Esto quiere decir que en una muestra de 1000 núcleos de ^{13}N, 500 se desintegrarán en los 10 primeros minutos; de los 500 restantes, 250 se desintegrarán en los 10 minutos siguientes y de los 250 núcleos que quedan después de 20 min, 125 se desintegrarán en los 10 min siguientes. Un núcleo ^{13}N que sobrevive 30 min tiene la misma probabilidad del 50 por ciento de desintegrarse en el siguiente período de 10 min que tuvo en el primer período de 10 min.

El número de núcleos que se desintegran en un período de tiempo dado (la *velocidad de desintegración R*) es proporcional al número N de núcleos presentes. Para períodos cortos comparados con una semivida, la velocidad de desintegración es

$$R = \frac{0{,}693}{\tau} N \tag{22.3}$$

Por ejemplo, con una semivida de 10 min, la velocidad de desintegración es

$$R = \frac{0{,}693}{10 \text{ min}} N = 0{,}0693N \text{ min}^{-1}$$

Si inicialmente hay en la muestra 1000 núcleos, entonces

$$R = 69{,}3 \text{ min}^{-1}$$

que significa que tienen lugar 69,3 desintegraciones por minuto. Sin embargo, pasados 10 min sólo hay en la muestra 500 núcleos, de modo que la velocidad de desintegración es solamente de 34,6 min^{-1}. La velocidad de desintegración tiene especial importancia porque puede medirse directamente con un contador Geiger (Apart. 22.4), en tanto que el número de núcleos que hay en la muestra no es observable.

OBSERVACIÓN. Si N es el número de núcleos presentes en el instante $t = 0$, la velocidad de desintegración en cualquier instante posterior viene dada por la ecuación

$$\log R = \log \frac{0{,}693N}{\tau} - 0{,}301\frac{t}{\tau} \tag{22.4}$$

Por ello, si se mide R en varios instantes, el gráfico de $\log R$ con respecto a t da una línea recta de pendiente $-0{,}301/\tau$, por la cual puede ser determinada la semivida τ del núclido en cuestión.

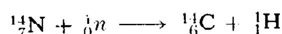
Las semividas de los núclidos varían desde una fracción de segundo hasta miles de millones de años. Por ejemplo, el ^{238}U tiene una semivida de 4,5 miles de millones de años, que es más o menos la edad del sistema solar. Esto quiere decir que de todos los ^{238}U presentes cuando se formó el sistema solar, alrededor de la mitad existen todavía. Por otro lado, el isótopo ^{235}U tiene una semivida de sólo 0,7 miles de millones de años, de modo que han transcurrido unas 6 semividas desde la formación del sistema solar. Por consiguiente, del ^{235}U original sólo existe aún la fracción

$$\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0{,}0156$$

En la actualidad el ^{235}U constituye solamente el 0,7 por ciento del uranio natural, mientras que el ^{238}U constituye el otro 99,3 por ciento.
Los núclidos con semividas inferiores a 100 millones de años no habrán sobrevivido a su formación original en cantidades detectables. Los de vida más corta que aparecen en la naturaleza se han formado recientemente por uno de los dos procesos siguientes:

Desintegración de un núcleo padre de vida larga. Por ejemplo, el ^{238}U es el miembro de vida más larga de una larga cadena de desintegraciones que termina con el isótopo estable ^{206}Pb. Los núclidos de esta cadena, junto con sus semividas y modos de desintegración, se muestran en la gráfica de A en función de Z de la Fig. 22.5. En una muestra de uranio natural, todos los productos de desintegración están presentes en proporción a sus semividas. Obsérvese que a partir del ^{238}U sólo se pueden formar por desintegración alfa y beta núclidos con $A = 238 - 4n$. Existen otras cadenas que parten del ^{235}U, ^{232}Th y ^{237}Np.

Producción por rayos cósmicos. Los rayos cósmicos son partículas de alta energía, en su mayoría electrones y protones, que bombardean la Tierra desde el espacio exterior. Las colisiones de los protones de la radiación cósmica con los núcleos de la atmósfera superior, si son lo suficientemente violentas, producen por rotura del núcleo varios protones secundarios, neutrones y alfas. Los neutrones secundarios originan a su vez núclidos radiactivos en colisiones con otros núcleos. Una de las más importantes reacciones de este tipo es



$$^{14}_{7}N + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{14}_{6}C + ^{1}_{1}H$$

en la que un neutrón convierte el ^{14}N en ^{14}C intercambiándose con un protón. Este proceso ocurre continuamente en la atmósfera y existe un equilibrio dinámico entre la velocidad de producción del ^{14}C y la velocidad de desintegración del ^{14}C.

Determinación de la edad de una muestra con ^{14}C

Inmediatamente después de formarse en la atmósfera un átomo de ^{14}C, éste reacciona con el oxígeno para formar una molécula de CO_2 y en esta forma entra en la biosfera el ^{14}C. Dado que los organismos vivos intercambian continuamente CO_2 con la atmósfera, la razón $^{14}C/^{12}C$ en un organismo es igual a la razón $^{14}C/^{12}C$ de equilibrio que existe en la atmósfera. Sin embargo, una vez que el organismo muere deja de

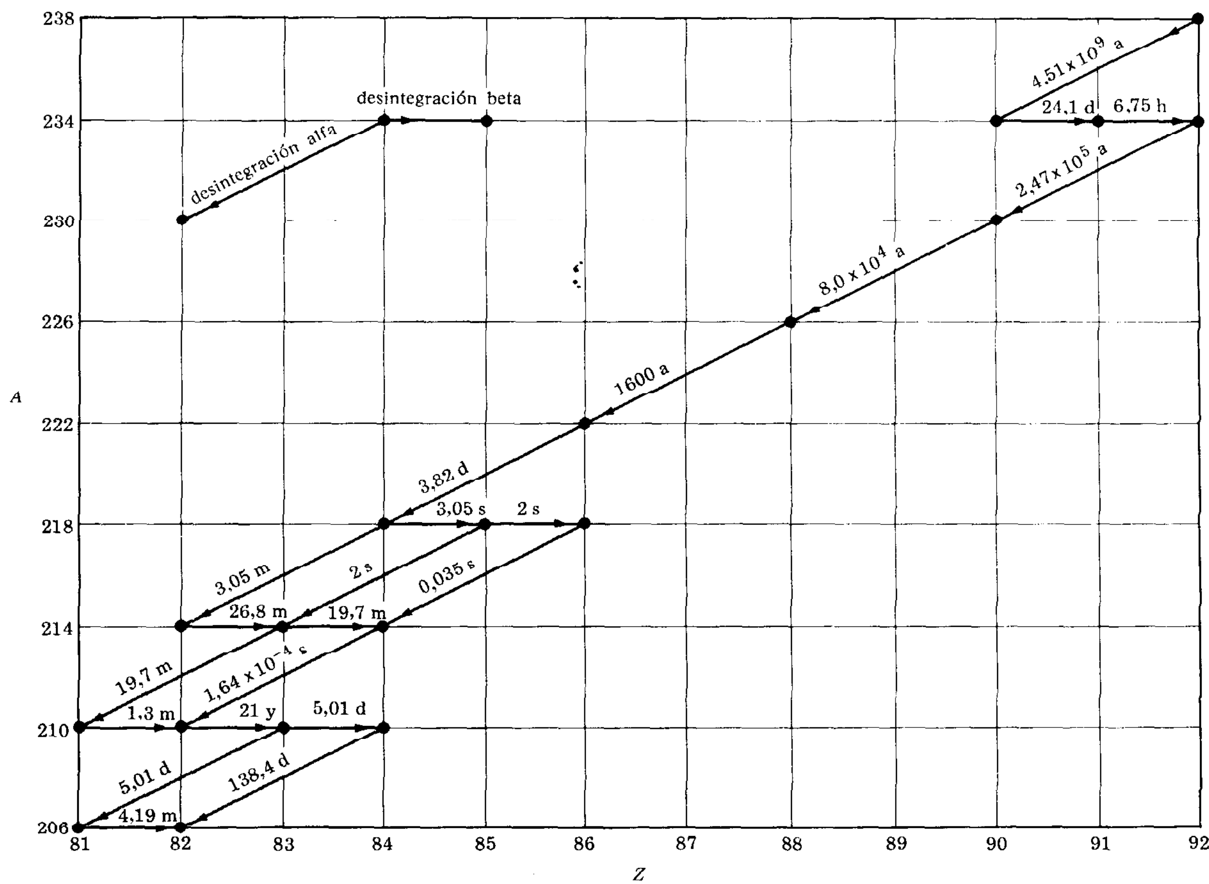


FIGURA 22.5
Cadena de desintegración del ^{238}U. El número másico A y el número atómico Z de cada núclido de la cadena se representan por medio de un punto. Se indican también las semividas de cada desintegración.

haber reaprovisionamiento de ^{14}C, en tanto que el que ya existía en el organismo continúa su desintegración con una semivida de 5730 años. En consecuencia, se puede determinar la época de un lugar arqueológico mediante una medida de la velocidad actual de desintegración del ^{14}C de una muestra de material orgánico encontrada en la excavación.

Por ejemplo, supongamos que la velocidad de desintegración del ^{14}C en una muestra de 12 g de carbono obtenida a partir de un hueso hallado en una excavación sea

$$R = 45{,}9 \text{ min}^{-1}$$

La semivida del ^{14}C es

$$\tau = 5730 \text{ a} = 3{,}0 \times 10^9 \text{ min}$$

de modo que a partir de la Ec. 22.3 encontramos que en la muestra hay

$$N = \frac{R\tau}{0{,}693} = \frac{(45{,}9 \text{ min}^{-1})(3{,}0 \times 10^9 \text{ min})}{0{,}693}$$
$$= 1{,}99 \times 10^{11}$$

núcleos de ^{14}C. Como la muestra es 1 mol de ^{12}C, contiene $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos normales de ^{12}C. Así la razón $^{14}C/^{12}C$ en la muestra es

$$\frac{^{14}C}{^{12}C} = \frac{1{,}99 \times 10^{11}}{6{,}02 \times 10^{23}} = 3{,}3 \times 10^{-13}$$

mientras que otras medidas dan cuenta de que la razón $^{14}C/^{12}C$ de equilibrio en la atmósfera es $1{,}3 \times 10^{-12}$. Si admitimos que las razones eran iguales cuando se formó el hueso, la cantidad de ^{14}C en la muestra debe haber disminuido en un factor

$$\frac{3{,}3 \times 10^{-13}}{1{,}3 \times 10^{-12}} = 0{,}254$$

o sea, de alrededor de un cuarto. De aquí se deduce que el hueso se formó hace 2 semividas, o bien que el lugar de las excavaciones tiene $2 \times 5730 = 11\,460$ años.

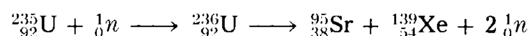
Esta técnica es válida para determinar la edad de muestras de hasta 20 000 años. Para muestras mucho más antiguas que ésta, la cantidad de ^{14}C que queda es demasiado pequeña para ser detectada con precisión.

22.3. FISIÓN Y FUSIÓN

Fisión

Debido a los grandes cambios de energía que intervienen en las reacciones nucleares, se vio claramente desde principios de siglo que una reacción nuclear automantenida liberaría millones de veces más energía que una reacción química ordinaria. Sin embargo, no se conoció una reacción nuclear capaz de automantenerse hasta que científicos alemanes descubrieron, en 1938, que cuando el isótopo del uranio ^{235}U absorbe un neutrón, el núcleo recientemente formado, ^{236}U, en lugar de sufrir una desintegración alfa o beta, se fracciona inmediatamente en dos fragmentos casi iguales. Este tipo de desintegración nuclear se llama *fisión*.

Los fragmentos de fisión varían en número másico entre 75 y 160. Una reacción de fisión típica es



$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{236}_{92}U \longrightarrow {}^{95}_{38}Sr + {}^{139}_{54}Xe + 2\,{}^{1}_{0}n$$

Hay varios rasgos importantes a señalar en esta reacción.

1. El núcleo ^{236}U existe durante menos de 10^{-12} s, de modo que el proceso de fisión se puede considerar instantáneo.
2. La Fig. 22.4 muestra que la energía de enlace media por nucleón de un núclido estable con A comprendido entre 75 y 160 es de unos 8,5 MeV, mientras que la energía de enlace por nucleón del ^{235}U es 7,6 MeV. Esto quiere decir que los 234 nucleones están más fuertemente enlazados en los fragmentos de fisión que en el ^{235}U. La energía de enlace por nucleón es la energía necesaria para arrancar un nucleón del núcleo, o, alternativamente, es la energía liberada cuando un nucleón queda ligado a un núcleo. Por

lo tanto, al aumentar la energía de enlace de 7,6 a 8,5 MeV se liberan 0,9 MeV por nucleón, o sea

$$234 \times 0,9 \text{ MeV} = 211 \text{ MeV}$$

por cada fisión individual. Alrededor del 86 por ciento de esta energía es liberada inmediatamente en forma de energía cinética de los fragmentos y los neutrones.

3. Dado que la razón neutrón/protón del ^{235}U es mayor que la de los núclidos estables en la región de masa de $A = 125$, los fragmentos de fisión poseen un exceso de neutrones y se sitúan por encima de la curva de estabilidad de la Fig. 22.3. De aquí que estos fragmentos sufran desintegraciones beta en una serie de pasos hasta llegar a formar núclidos estables con los mismos números másicos. El núcleo ^{236}U se escinde de muchos modos diferentes, y cada uno de los fragmentos forma una serie de tres o cuatro núclidos radiactivos, de manera que por fisión se producen unos 200 núclidos radiactivos diferentes. La mayor parte de éstos no se dan en la naturaleza.

OBSERVACIÓN. Estos núclidos radiactivos constituyen un subproducto peligroso e indeseable de la fisión. Durante la década de los cincuenta, cuando los Estados Unidos y la Unión Soviética estaban llevando a cabo gran número de pruebas nucleares, se liberó a la atmósfera gran cantidad de material radiactivo procedente de la fisión. El más conocido de éstos era el ^{90}Sr, que es químicamente similar al calcio (tabla 21.2) y que tiene una semivida relativamente larga (tabla 22.1). Como consecuencia sobrevivía lo suficiente como para incorporarse a la cadena alimenticia y de aquí se depositaba junto con el calcio en los huesos de los niños en edad de crecer. El peligro universal de radiación que esto suponía llevó finalmente a la prohibición de las pruebas atómicas en la atmósfera.

4. El proceso de fisión, que necesita un neutrón para iniciarse, libera (por término medio) 2,5 neutrones por fisión individual. Esto fue lo que atrajo inmediatamente la atención de los científicos, ya que ello significaba que era posible lograr una cadena de reacciones nucleares automantenidas si los neutrones extra liberados en una fisión individual pudiesen utilizarse para iniciar nuevas fisiones adicionales.

Las noticias del descubrimiento de la fisión llegaron a los Estados Unidos en enero de 1939. En julio de ese año, Einstein escribió al presidente Roosevelt acerca de la fisión, instándole a que comenzaran en seguida las investigaciones sobre el potencial militar de este descubrimiento. En septiembre de 1939 Alemania invadió Polonia, sumiendo a Europa en la guerra. Los Estados Unidos, ocupados entonces en un proceso de rearme general, se embarcaron en un ambicioso programa de fabricación de una bomba de fisión.

La primera cadena de reacciones de fisión automantenidas *(reacción en cadena)* fue conseguida por Enrico Fermi (1901-1954) y sus colaboradores el 2 de diciembre de 1942 en la Universidad de Chicago. En general se considera que esta fecha marca el comienzo de la Edad Atómica*, puesto que sólo se pueden obtener cantidades utilizables de

* En este libro, *atomico* se refiere en general a las propiedades electrónicas de un átomo, y *nuclear* se refiere a las propiedades nucleares. No obstante, en el uso común, atómico es sinónimo de nuclear.

energía procedentes de una reacción nuclear por medio de una reacción en cadena.

El número medio de neutrones liberados en una fisión individual y que dan lugar a otras fisiones se denomina *factor de multiplicación f*. El mantenimiento de una reacción en cadena necesita que f sea mayor o igual a 1. Como en cada fisión individual se liberan 2,5 neutrones por término medio, no es necesario que cada neutrón inicie otra fisión. Esto es una suerte, porque existen procesos en competición que eliminan neutrones de la región de reacción. De éstos, los más importantes son:

1. Escape de neutrones del reactor.
2. Captura de neutrones por el ^{238}U según la reacción



$$^{238}U + {}^{1}n \longrightarrow {}^{239}U \qquad 22.5$$

3. Captura de neutrones por otros núclidos.

El proceso 1 se reduce al mínimo haciendo el reactor tan grande que resulte muy probable que un neutrón sea capturado antes de escapar. El proceso 3 también se reduce al mínimo si se eligen convenientemente los materiales situados en el interior del reactor.

El proceso 2 se reduce al mínimo embalando el uranio en barras metálicas que se sumergen en un material moderador, a menudo agua corriente. Debido a la geometría de este dispositivo, un neutrón de alta energía procedente de una reacción de fisión de la barra tendrá muchas posibilidades de escapar al moderador antes de ser capturado por un núcleo ^{238}U. En el moderador, su energía va degradándose por colisiones sucesivas con diversos átomos del moderador, hasta que eventualmente vuelve a entrar en una barra de combustible. Entonces, su energía es demasiado pequeña para ser capturado por un núcleo ^{238}U, pero todavía puede ser capturado por un núcleo ^{235}U para inducir otra reacción de fisión.

La Fig. 22.6 es un diagrama esquemático del tipo de reactor nuclear utilizado en la actualidad en las centrales eléctricas nucleares. En un reactor cualquiera existen cuatro componentes esenciales:

1. El combustible, corrientemente uranio natural en forma de largas barras sinterizadas de dióxido de uranio enriquecido (UO_2). El uranio enriquecido contiene de un 2 a un 4 % de ^{235}U fisionable * en lugar de sólo el 0,7 % como el uranio natural.
2. El moderador, en general agua a presión muy elevada (100 atm o más), que rodea completamente las barras combustibles.
3. Las barras de control, corrientemente de cadmio El cadmio absorbe con facilidad a los neutrones, de modo que se puede aumentar o disminuir el factor de multiplicación quitando o poniendo estas barras.
4. El fluido refrigerante, en general agua, que circula por el reactor para eliminar el calor producido. El refrigerante intercambia su calor en una caldera que produce vapor para mover una turbina. En el reactor de agua presurizada mostrado en la Fig. 22.6, el agua sirve como moderador y como refrigerante al mismo tiempo.

* Un núclido es fisionable solamente si puede mantener una reacción en cadena. Hay núclidos tales como el uranio ^{238}U, que se pueden fisionar en determinadas circunstancias, pero no pueden mantener una reacción en cadena. El ^{235}U es el único núclido fisionable que se presenta en la naturaleza. Otros dos núclidos fisionables, el ^{233}U y el ^{239}Pu, se producen artificialmente.

Para poner en marcha un reactor, se retiran poco a poco las barras de control. Esto aumenta el factor de multiplicación al disminuir la oportunidad de que los neutrones sean capturados por el cadmio, que es un material que no sufre fisión. Cuando el factor de multiplicación rebasa el valor 1, el reactor es *crítico*. En este estado una sola fisión, iniciada por un neutrón cósmico extraviado, puede dar lugar rápidamente a miles de millones de fisiones por segundo. Por ejemplo, partiendo de una sola fisión y un factor de multiplicación $f = 1{,}007$, habrá $f^n = 1{,}007^n$ fisiones después de n generaciones, lo que equivale a 10^3 fisiones en la milésima generación. Como el intervalo de tiempo entre generaciones es sólo de 10^{-8} s, la velocidad de fisión crece muy rápidamente una vez que el reactor se hace crítico.

Cuando el reactor alcanza el nivel de actividad deseado, las barras de control se ajustan hasta reducir f a 1,00000. A partir de aquí el reactor mantiene una tasa constante de actividad. Por medio de colisiones con otros núcleos, la energía cinética de los fragmentos y neutrones producidos en el proceso de fisión se convierte en energía térmica, que eleva la temperatura del interior del reactor. Este calor es eliminado por el refrigerante que circula por el reactor y transferido a una caldera, en la que se emplea para obtener el vapor que mueve la turbina y que a su vez hace girar el generador que produce electricidad. De este modo, la energía del núcleo se convierte en energía eléctrica utilizable. La única diferencia entre una central nuclear y una central convencional está en el combustible empleado para producir el vapor. Una vez producido el vapor, ambos tipos de centrales son idénticos en cuanto a su funcionamiento.

Es indudable que las plantas nucleares van a convertirse en una parte cada vez más importante de nuestra red de energía eléctrica a medida que disminuya el abastecimiento de carbón y petróleo. La energía nuclear tiene la ventaja de no descargar contaminantes en la atmós-

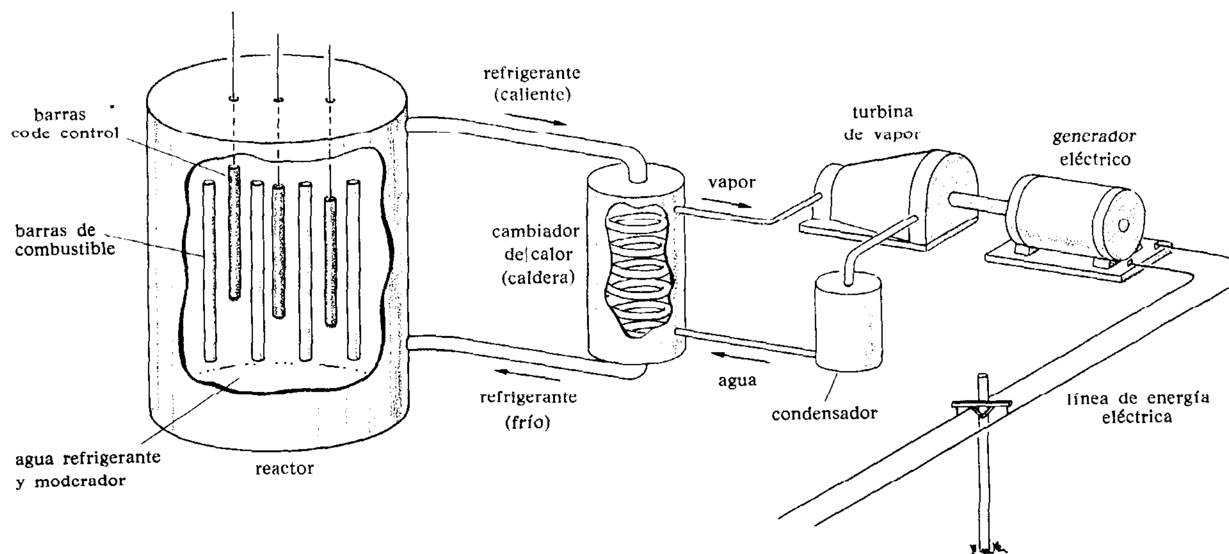
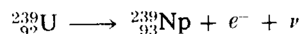


FIGURA 22.6
Diagrama esquemático de un reactor nuclear y su conexión a una central eléctrica nuclear.

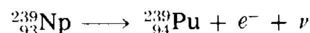
fera, pero los productos radiactivos de desecho que se acumulan dentro de un reactor se han de eliminar cada pocos años. La colocación segura de este peligroso material constituye un serio problema que se hará más crítico a medida que se extienda la industria de la energía eléctrica de origen nuclear.

El único material fisionable que se da en la naturaleza, el ^{235}U, constituye sólo el 0,7 por ciento del uranio natural. De aquí que el abastecimiento mundial de material fisionable sea muy limitado y probablemente insuficiente para mantener la plenamente desarrollada industria nuclear que se espera para el próximo siglo. Afortunadamente se pueden producir en un reactor nuclear otros dos núclidos fisionables: ^{233}U y ^{239}Pu. El plutonio 239 es un producto de desintegración del ^{239}U, que se produce a partir del ^{238}U por captura de un neutrón (Ec. 22.5. La desintegración beta del ^{239}U produce ^{239}Np, un nuevo elemento con número atómico 93. La reacción es



$$^{239}_{92}U \longrightarrow {}^{239}_{93}Np + e^- + \nu$$

y la semivida del ^{239}U es 23,5 min. El neptunio 239 sufre a su vez una desintegración beta con una semivida de 2,35 d para dar ^{239}Pu, que es un nuevo elemento con número atómico 94. La reacción es



$$^{239}_{93}Np \longrightarrow {}^{239}_{94}Pu + e^- + \nu$$

Así, el ^{239}U producido en un reactor se desintegra en pocos días dando ^{239}Pu. Como el ^{239}Pu tiene una semivida de 24 400 a, resulta suficientemente estable para fines industriales.

En los reactores nucleares convencionales, la cantidad de ^{239}Pu producida es menor que la de ^{235}U consumida. Sin embargo, los *reactores de reproducción* que se están desarrollando en la actualidad, producen más material fisionable que el que consumen. En estos reactores no existe moderador para retardar los neutrones, los cuales son capturados por el ^{235}U (dando lugar a fisión) o por el ^{239}U (produciendo ^{239}Pu). De los 2,5 neutrones liberados en cada fisión individual, se necesita 1 para iniciar otra fisión y 1,5 quedan disponibles para producir ^{239}Pu. Como el ^{238}U (del que se obtiene el ^{239}Pu) es 140 veces más abundante que el ^{235}U, los reactores de reproducción ofrecen la posibilidad de un suministro de combustible virtualmente ilimitado.

Una bomba atómica, a diferencia de un reactor, necesita material fisionable en forma pura. Para desarrollar la bomba atómica durante la guerra, las principales actividades estuvieron centradas en la separación del ^{235}U a partir del ^{238}U y en la producción de ^{239}Pu en un reactor. Como el ^{235}U es químicamente idéntico al ^{238}U, la separación requiere un proceso físico que depende de su diferencia de masa. El proceso de más éxito es la difusión de gases; se deja difundir a través de una membrana porosa uranio gaseoso en forma de hexafluoruro de uranio, UF_6. Una molécula compuesta de ^{235}U tiene (por término medio) una velocidad ligeramente superior a una molécula compuesta de ^{238}U y se difunde con mayor rapidez. Así, la difusión del UF_6 a través de una membrana porosa da lugar a un pequeño enriquecimiento de ^{235}U. En 1943 se construyó una ciudad entera (Oak Ridge, en Tennessee) con el fin de separar ^{235}U pasando repetidamente UF_6 por una membrana porosa. Simultáneamente, fueron construidos en Hanford (Wash-

ington) un reactor gigante * y una planta química de separación para producir y purificar ^{239}Pu. Estos desarrollos fueron paralelos, porque el éxito de uno y otro daría como resultado una bomba. De hecho, ambos proyectos lograron su objetivo de producir cantidades utilizables de material purificado antes del final de la guerra.

Cuando un neutrón extraviado de origen cósmico da lugar a una fisión individual en un bloque de ^{235}U (o ^{239}Pu) puro, los neutrones liberados pueden escapar del bloque o bien iniciar otra fisión. Por lo tanto, el factor de multiplicación depende enteramente de su masa. Si la masa es demasiado pequeña, muchos neutrones escapan antes de dar lugar a una fisión, de modo que f es menor que 1. A esta masa se le llama *subcrítica*. Sin embargo, si la masa es bastante grande, hay bastantes neutrones que inician fisiones antes de alcanzar la superficie, de modo que f es mayor que 1. Se dice entonces que la masa es *crítica*. En un bloque de masa crítica hará erupción espontáneamente una reacción en cadena incontrolada.

En una bomba atómica, son forzadas a unirse rápidamente dos masas subcríticas de ^{235}U (o ^{239}Pu) por medio de explosivos convencionales para formar así una masa crítica. Antes de que esta masa pueda desintegrarse, tienen lugar suficientes fisiones como para producir una enorme cantidad de energía en un volumen muy pequeño, lo que da como resultado una inmensa explosión.

La energía liberada en la fisión de 1 mol (235 g) de ^{235}U es de unos

$$6 \times 10^{23} \times 200 \text{ MeV} = 1{,}2 \times 10^{26} \text{ MeV}$$
$$= 2 \times 10^{13} \text{ J}$$

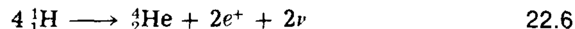
En las bombas lanzadas sobre el Japón, experimentó fisión 1 kg (4,25 mol) de ^{235}U aproximadamente. La energía liberada fue, por lo tanto, de

$$(4{,}25)(2 \times 10^{13} \text{ J}) = 8{,}5 \times 10^{13} \text{ J}$$

que es equivalente a la energía liberada en la explosión de 20 000 toneladas de TNT.

Fusión

La energía del Sol y, por lo tanto, esencialmente toda la energía no nuclear que hay sobre la Tierra, procede de la fusión de cuatro núcleos de hidrógeno (protones) para formar helio. La reacción completa es



$$4\,{}^1_1H \longrightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu \qquad 22.6$$

* El primer reactor de producción de Hanford se puso en marcha el 7 de junio de 1943, sólo 8 meses después de que Fermi consiguiese la primera reacción nuclear en cadena.

A partir del incremento de masa

$$\begin{aligned}\Delta m &= 4\, m_{^1H} - m_{^4He}\\ &= 4 \times 1{,}007825 \text{ u} - 4{,}0026 \text{ u}\\ &= 0{,}0287 \text{ u}\end{aligned}$$

se halla que la energía liberada en cada fusión es de 26,7 MeV. En el cálculo de Δm no se han incluido las masas de los positrones porque estas masas se convierten luego en energía de acuerdo con la reacción



$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma \qquad 22.7$$

(Este proceso de aniquilación se discute con más detalle en el apartado 22.5.) La energía liberada por la fusión de 1 g de hidrógeno es equivalente a la obtenida quemando 16 toneladas de petróleo.

La Ec. 22.6 no es más que la reacción completa, porque en realidad cuatro protones no pueden nunca unirse a la vez. En cambio, el helio se obtiene en una serie de reacciones en las que interviene la fusión de sólo dos núcleos. Hans Bethe (1906) propuso en 1938 dos series de reacciones, el *ciclo del carbono* y la cadena *protón-protón*, que se supone que constituyen los procesos primarios que tienen lugar en el Sol y estrellas similares. Estas series se muestran en la tabla 22.2.

Los núcleos de hidrógeno que intervienen en el ciclo del carbono se combinan con un núcleo ^{12}C en lugar de combinarse directamente entre sí. Una vez que se han unido al núcleo ^{12}C cuatro núcleos de hidrógeno tiene lugar la escisión en ^4He y ^{12}C. De aquí que el ^{12}C no sea más que un catalizador de esta reacción porque en último extremo no se consume. La reacción completa viene dada por la Ec. 22.6.

TABLA 22.2 **Ciclo del carbono y cadena protón-protón.**

Reacción	MeV
Ciclo del carbono	
$^{12}_{6}C + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{13}_{7}N$	+ 2,0
$^{13}_{7}N \longrightarrow ^{13}_{6}C + e^+ + \nu$ $\tau = 10$ min	+ 2,2†
$^{13}_{6}C + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{14}_{7}N$	+ 7,5
$^{14}_{7}N + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{15}_{8}O$	+ 7.3
$^{15}_{8}O \longrightarrow ^{15}_{7}N + e^+ + \nu$ $\tau = 2$ min	+ 2,7†
$^{15}_{7}N + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{12}_{6}C + ^{4}_{2}He$	+ 5,0
	26,7
Cadena protón-protón	
$^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{2}_{1}H + e^+ + \nu$ + 1,5† (dos veces) =	3,0
$^{2}_{1}H + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{3}_{2}He$ + 5,4 (dos veces) =	10,8
$^{3}_{2}He + ^{3}_{2}He \longrightarrow ^{4}_{2}He + 2\, ^{1}_{1}H$ + 12,9 (una vez) =	12,9
	26,7

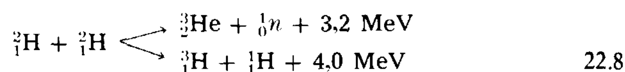
† Incluye la energía obtenida de la posterior aniquilación del positrón (Ec. 22.7).

En la cadena protón-protón, se combinan en primer lugar dos núcleos de hidrógeno para formar deuterio, ^{2}H. Este deuterio reacciona a continuación con hidrógeno normal para formar ^{3}He y por último reaccionan entre sí dos núcleos de ^{3}He para producir un núcleo de ^{4}He y dos protones, ^{1}H. La reacción completa viene dada de nuevo por la Ec. 22.6.

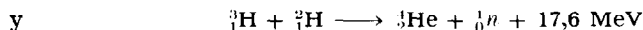
Estas reacciones de fusión no ocurren a temperatura normal porque la repulsión eléctrica entre los núcleos les impide acercarse lo suficiente para reaccionar. La Fig. 22.2 muestra cómo la fuerza repulsiva eléctrica entre dos protones domina la energía potencial a grandes distancias, mientras que la fuerza atractiva nuclear lo hace a pequeñas distancias. Sólo a temperaturas de 20 millones de grados o más, como las que existen en el interior de las estrellas, poseen los núcleos energía cinética suficiente para vencer la repulsión eléctrica. La situación es similar a la de un proceso de combustión, el cual sólo tiene lugar por encima de una cierta temperatura.

OBSERVACIÓN. Los procesos de fusión descritos en la tabla 22.2 liberan una abundante cantidad de neutrinos que habrían de poder ser detectados en la Tierra. Sin embargo, después de muchos años de penoso esfuerzo, no se ha detectado la cantidad esperada de neutrinos. Esta discrepancia entre teoría y experimento está llevando a algunos astrofísicos a reconsiderar sus ideas sobre la estructura y la estabilidad del Sol (Ulrich, 1975).

Debido a su gran potencial de energía, se están llevando a cabo esfuerzos para producir en el laboratorio una reacción de fusión controlada. Las principales reacciones que están siendo estudiadas en estos experimentos son



$$^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \begin{cases} \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{1}_{0}n + 3{,}2\ \text{MeV} \\ \rightarrow ^{3}_{1}H + ^{1}_{1}H + 4{,}0\ \text{MeV} \end{cases} \qquad 22.8$$



y

$$^{3}_{1}H + ^{2}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n + 17{,}6\ \text{MeV}$$

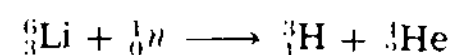
donde ^{3}H es un isótopo radiactivo del hidrógeno (tritio).*

Éstas reciben el nombre de *reacciones termonucleares* porque sólo ocurren a temperaturas de millones de grados. Como no existe material que pueda contener un gas a estas temperaturas, es necesario contener los núcleos de hidrógeno en un intenso campo magnético. Más recientemente, se han utilizado rayos laser de alta energía para calentar pequeñas muestras de deuterio sólido a temperaturas de fusión.

Hasta ahora no ha sido posible contener bastantes núcleos durante un tiempo suficiente para conseguir la fusión. Si se logra la fusión controlada, el mundo dispondrá entonces de una fuente de energía ilimitada y no contaminante con menos subproductos que la fisión.

Colocando una mezcla de ^{2}H y ^{3}H alrededor de una bomba de fisión ordinaria se produce una reacción de fusión no controlada (bomba de hidrógeno). Cuando estalla la bomba de fisión se alcanzan temperaturas de millones de grados que inician la fusión en el hidrógeno. El resultado es una explosión de proporciones astronómicas.

* El tritio se produce colocando ^{6}Li dentro de un reactor donde absorbe un neutrón según la reacción



$$^{6}_{3}Li + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{3}_{1}H + ^{4}_{2}He$$

22.4. RADIACIÓN NUCLEAR

Propiedades

La radiación nuclear se refiere colectivamente a las partículas de alta energía (partículas alfa, rayos beta, protones, neutrones) y a la radiación electromagnética (rayos gamma y X) que acompañan a la desintegración nuclear y a las reacciones nucleares. Todas estas radiaciones penetran a través de la materia, ionizando átomos y escindiendo moléculas a su paso. Como consecuencia poseen efectos nocivos sobre las células vivas y constituyen un peligro para las personas que trabajan con materiales radiactivos o cerca de reactores nucleares. Al mismo tiempo, la capacidad que posee la radiación nuclear para destruir la función celular la hace muy efectiva en el tratamiento del cáncer y enfermedades afines.

Aunque todas las radiaciones nucleares tienen el mismo efecto general sobre la materia viva, cada radiación posee sus propias características que le dan su poder y utilidad en diferentes situaciones. Por lo tanto es necesario considerar las propiedades individuales de cada tipo de radiación.

Las *partículas alfa*, debido a que son mucho más pesadas que los electrones, atraviesan la materia en línea recta chocando con los electrones que encuentran a su paso.* En cada colisión alfa-electrón, la partícula alfa pierde unos 33 eV al chocar con un electrón de un átomo. Así, una partícula alfa con una energía cinética inicial de 5 MeV efectúa unas

$$\frac{5\ \text{MeV}}{33 \times 10^{-6}\ \text{MeV}} = 151\,000$$

colisiones antes de detenerse. Como cada colisión ioniza un átomo o escinde una molécula, una partícula alfa hace un daño considerable antes de detenerse.

La distancia que recorre una partícula antes de detenerse se denomina *alcance*. En un determinado material, todas las partículas alfa con una energía dada poseen el mismo alcance. Este alcance aumenta con la energía de las alfas y disminuye con la densidad del material que atraviesan. Esto se ve en la tabla 22.3 que da el alcance de partículas alfa de varias energías en aire, tejido corporal y aluminio. Esta tabla muestra también que el alcance de las alfas es muy pequeño. Por ejemplo, un alfa de 5 MeV recorre sólo 0,21 mm en tejido corporal y es detenida completamente por una delgada lámina de aluminio. Por consiguiente, es muy fácil protegerse contra las alfas, e incluso sin protección no pueden penetrar a través de la piel. Sin embargo, si se ingiere un emisor alfa radiactivo, se puede acumular en ciertas partes del cuerpo y liberar allí dosis muy perjudiciales de radiación.

Los *rayos beta*, que son simplemente electrones muy veloces, son más fácilmente desviados por las colisiones con los electrones atómicos que lo son las alfa. No obstante, al igual que las alfa, los rayos beta pier-

* El experimento de Rutherford (Apart. 21.2) estudiaba las pocas veces en que una partícula alfa conseguía acercarse a un núcleo lo suficiente como para sufrir una desviación de gran ángulo.

TABLA 22.3 **Alcance de partículas alfa y rayos beta de varias energías en el aire, tejido corporal y aluminio.**

	Alcance, cm		
Energía, MeV	Aire	Tejido corporal	Aluminio
Partículas alfa			
1.0	0,55	$0{,}33 \times 10^{-2}$	$0{,}32 \times 10^{-3}$
2.0	1,04	$0{,}63 \times 10^{-2}$	$0{,}61 \times 10^{-3}$
3.0	1,67	$1{,}00 \times 10^{-2}$	$0{,}98 \times 10^{-3}$
4.0	2,58	$1{,}55 \times 10^{-2}$	$1{,}50 \times 10^{-3}$
5.0	3.50	$2{,}10 \times 10^{-2}$	$2{,}06 \times 10^{-3}$
Rayos beta			
0,01	0,23	0.00027	
0.10	12.0	0.0151	0.0043
0.50	150	0.18	0.059
1,0	420	0,50	0.15
2.0	840	1,00	0.34
3,0	1260	1,50	0,56

den continuamente energía ionizando los átomos que atraviesan y se detienen después de haber recorrido una distancia definida a través de un material dado. La tabla 22.3 da el alcance de rayos beta de diversas energías. Obsérvese que el alcance aumenta rápidamente con la energía y que un rayo beta de 3 MeV recorre 150 veces más tejido que una partícula alfa de 3 MeV.

Además de la pérdida de energía por colisión con los electrones, los rayos beta producen radiación electromagnética (rayos X) siempre que sufren una repentina desaceleración. Esta radiación de enfrenamiento, o *bremsstrahlung*, es la fuente de los rayos X producidos cuando un haz de electrones choca con el ánodo de un tubo de rayos X (Apart. 17.5). Los rayos X penetran en la materia mucho más que los rayos beta, de modo que incluso después de haberse detenido en una sustancia todos los rayos beta, los rayos X que ellos han producido continúan su recorrido por la sustancia.

La Fig. 22.7 muestra las trazas de rayos beta que inciden sobre una plancha de plomo lo bastante gruesa como para detenerlos. Sin embargo, los rayos X producidos por estos beta en el plomo pasan hasta el otro lado, donde pueden todavía presentar un peligro de radiación. Por lo tanto, para proporcionar una adecuada protección a los rayos beta, la barrera debe ser mucho más gruesa que el alcance de estos rayos.

Los *rayos gamma*, a diferencia de las partículas cargadas, pierden toda su energía en una sola interacción, en lugar de hacerlo de manera continua en una serie de colisiones. Por ejemplo, cuando un fotón de un rayo gamma interacciona con un electrón atómico, toda la energía del fotón es transferida al electrón, el cual, por consiguiente, es lanzado fuera del átomo con una energía cinética mayor. Este proceso, llamado *efecto fotoeléctrico* (Apart. 21.1), da como resultado la destrucción del fotón.

Alternativamente, el rayo gamma puede colisionar con el electrón, perdiendo una fracción sustancial de su energía inicial, sin ser destruido. Este proceso es el *efecto Compton*. Un tercer proceso, llamado producción de pares, es importante para los rayos gamma con ener-

gía mayor que 1,02 MeV. Tales rayos gamma pueden interaccionar con un núcleo para producir un par electrón-positrón

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+$$

Todos estos procesos producen electrones de alta energía que se comportan como rayos beta, ionizando otros átomos al atravesar la materia. (Estos electrones pueden producir a su vez rayos X de energía más baja, tal como se muestra en la Fig. 22.7).

No puede predecirse la distancia que recorre un fotón antes de interaccionar con un electrón. Todo lo que se puede predecir es la distancia en la que un fotón tiene una probabilidad del 50 % de interaccionar. A esto se da el nombre de *capa de semiatenuación* y es análoga a la semivida de un núclido radiactivo. La tabla 22.4 da la capa de semiatenuación para rayos gamma de diversas energías en tejido y plomo. Por ejemplo, la capa de semiatenuación para un rayo gamma de 0,1 MeV en tejido es 4,05 cm. Esto quiere decir que después de haber atravesado 4,05 cm de tejido, la intensidad de un haz de rayos gamma es la mitad de su valor original. Después de haber atravesado otros 4,05 cm, la intensidad de lo que queda del haz se ve reducida de nuevo a la mitad. Por lo tanto, una vez que el haz ha atravesado 8,10 cm de tejido su intensidad es sólo un cuarto de su valor original. Para reducir un haz a menos del 1 % de su valor original, tiene que atravesar como mínimo siete capas de semiatenuación, que corresponden en este caso a 28,35 cm. Los rayos gamma y los rayos X son, por lo tanto, mucho más penetrantes que las partículas cargadas.

Los *neutrones*, como los rayos gamma, pierden toda su energía en una sola colisión, aunque los neutrones chocan con los núcleos más que con los electrones. Los neutrones son muy penetrantes y se necesitan por ello grandes cantidades de plomo y hormigón para proteger a los trabajadores de los neutrones producidos por un reactor.

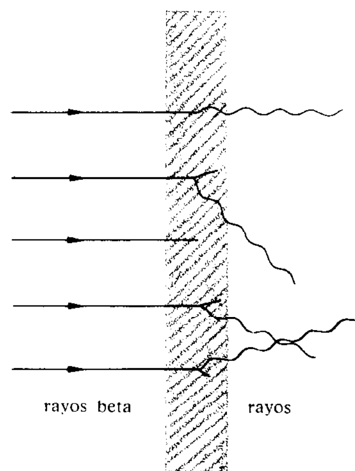


FIGURA 22.7
Rayos beta incidentes sobre una plancha de plomo de espesor suficiente para detenerlos. Cuando los betas se paran, producen rayos X que atraviesan la plancha.

Detección

La radiación nuclear es detectada siempre por la ionización que produce. Por ejemplo, la traza de una partícula cargada en una *cámara de niebla* o *burbujas* se hace visible por las burbujas que se condensan a lo largo del camino ionizado producido por la partícula. Del mismo modo, cuando una partícula cargada se desplaza por la emulsión fotosensible de una película fotográfica, la ionización que produce deja un

TABLA 22.4 **Capa de semiatenuación para rayos gamma de varias energías en tejido corporal y plomo.**

Energía, MeV	Capa de semiatenuación, cm	
	Tejido corporal	Plomo
0,01	0,131	0,00076
0,05	3,12	0,012
0,10	4,05	0,012
0,50	7,20	0,42
1,0	9,80	0,89
5,0	23,0	1,52

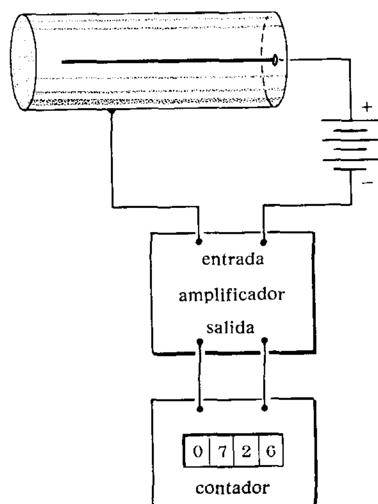


FIGURA 22.8
Diagrama esquemático de un contador Geiger.

registro de su recorrido que se pone de manifiesto cuando se revela la película. Los trabajadores sometidos a irradiación llevan puesto un dosímetro fotográfico para controlar la radiación total a que han estado expuestos. Las cámaras de niebla, las de burbujas y las emulsiones fotográficas son detectores valiosos en la investigación nuclear porque dan un registro completo de la trayectoria seguida por una determinada partícula.

Para la detección instantánea de la radiación se emplean dispositivos electrónicos. El dispositivo más antiguo y más simple es el contador Geiger-Müller *(tubo Geiger),* que no es más que un tubo metálico de descarga con un alambre que pasa a través de su centro (Fig. 22.8). El hilo central se mantiene a un gran potencial positivo (alrededor de +500 V) con respecto a la pared del tubo, y el tubo contiene un gas a baja presión (alrededor de 0,1 atm). Cuando una sola partícula cargada atraviesa el gas del tubo, ioniza a uno o más átomos del gas que dejan en libertad varios electrones. Estos electrones son después acelerados hacia el hilo, pero antes de llegar a él ionizan otros átomos en su camino y, en consecuencia, ponen en libertad más electrones. Estos electrones adicionales ionizan a su vez más átomos todavía cuando son acelerados hacia el hilo. Se desarrolla una reacción en cadena (o *avalancha*) que ioniza rápidamente a la mayor parte del gas del tubo. Como consecuencia, el gas se hace eléctricamente conductor y hay una momentánea oleada de corriente en el tubo. Este impulso de corriente llega hasta un amplificador y a la salida de éste hace funcionar un contador que registra la descarga producida cada vez que pasa por el tubo una partícula cargada.

Los tubos Geiger no detectan directamente ni fotones ni neutrones. Sin embargo, si se rodea el tubo con un material apropiado, parte de los rayos gamma y neutrones incidentes lanzarán fuera de los átomos del material a los electrones y protones con los que chocan, pudiéndose detectar entonces estas partículas cargadas. Por supuesto que sólo una fracción de los fotones y neutrones incidentes se detectan así, dado que sólo una fracción de las partículas incidentes interacciona con el material que rodea el tubo.

Los tubos Geiger son relativamente baratos y fáciles de hacer funcionar. Sus principales desventajas son su incapacidad para medir la energía de la partícula incidente y su *tiempo muerto* bastante largo. (Se entiende por tiempo muerto, el tiempo transcurrido entre el paso de una partícula cargada por un detector y el momento en que éste es capaz de detectar una segunda partícula.) En un tubo Geiger se trata del tiempo necesario para que todos los iones y electrones producidos por la primera partícula se recombinen en átomos neutros, de modo que el tubo vuelve a su estado de reposo. El tiempo muerto de un tubo Geiger es del orden de milisegundos, lo que viene a significar que el tubo tiene su límite en unos cuantos cientos de cuentas por segundo. Si las partículas inciden sobre un tubo Geiger en una mayor proporción, no podrá contarlas todas puesto, que muchas de ellas llegarán durante un período muerto.

En medicina nuclear (Apart. 22.5) se emplea un detector más complicado llamado *contador de centelleo.* Se trata de una versión electrónica del método utilizado por Rutherford en 1911 para detectar partículas alfa (Apart. 21.2). Está basado en el hecho de que ciertos materiales convierten parte de la energía de una partícula ionizante en luz y radiación ultravioleta. En tiempos de Rutherford esta luz era

detectada por el ojo, pero en un moderno contador de centelleo se detecta por medio de un *tubo fotomultiplicador.*

El material de centelleo empleado hoy más a menudo es un cristal transparente de yoduro sódico, NaI. Cuando una partícula cargada es detenida en el cristal, se produce una cantidad de luz proporcional a la energía de la partícula. Parte de esta luz incide sobre el primer electrodo de un tubo fotomultiplicador (Fig. 22.9), a partir del cual salen lanzados electrones por efecto fotoeléctrico (Apart. 21.1). Estos electrones son acelerados hasta el segundo electrodo, que se mantiene a un potencial de varios cientos de volts por encima del primer electrodo. Al golpear este electrodo, cada electrón lanza fuera varios electrones, que a su vez son acelerados hacia un tercer electrodo mantenido a un potencial que excede en varios cientos de volts al del segundo electrodo. En cada etapa, el número de electrones emitidos es de 2 a 10 veces el número de los incidentes, de modo que el número total de electrones aumenta rápidamente. Por ejemplo, en un tubo fotomultiplicador provisto de 10 electrodos y con un factor de multiplicación 2, por cada electrón que sale del primer electrodo llegarán 256 al último. Por lo tanto, sólo han de llegar al primer electrodo unos cuantos fotones para producir en el último una señal que se puede medir.

Como la cantidad de luz producida cuando una partícula cargada se detiene en un cristal de NaI es proporcional a la energía de la partícula y como la corriente en el último electrodo es proporcional al número de fotones que inciden sobre el primero, la señal de salida del fotomultiplicador es proporcional a la energía de la partícula. De aquí que un contador de centelleo no sólo detecta partículas cargadas, sino que, una vez calibrado, puede medir también su energía. Además, el tiempo muerto de un contador de centelleo es del orden de microsegundos, de modo que es capaz de tasas de recuento mucho más elevadas que un contador Geiger.

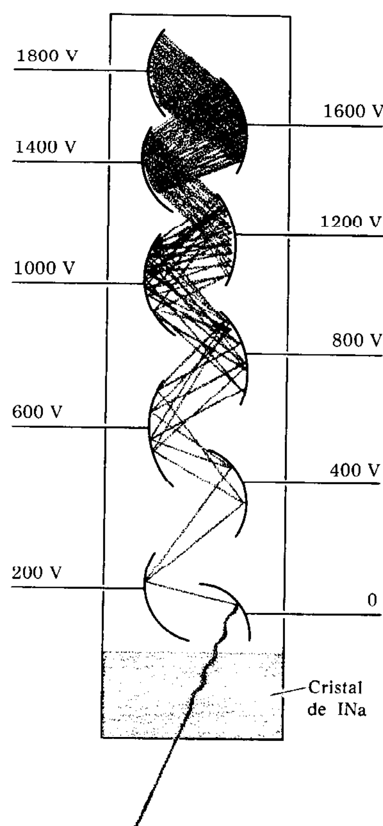


FIGURA 22.9
Diagrama esquemático de un contador de centelleo.

Dosimetría

La medicina que se ocupa de los problemas de la radiación comprende la protección contra los efectos perjudiciales de la radiación tanto de los que trabajan en instalaciones sometidas a irradiaciones como de la población en general, así como del empleo de la radiación para el diagnóstico y tratamiento de enfermedades. Todas estas aplicaciones necesitan una medida cuantitativa de la unidad de dosis de radiación absorbida. La unidad corrientemente adoptada es el *rad* (rd), definido como la absorción de 10^{-2} J de radiación ionizante por kilogramo de material absorbente. Sólo se cuenta la energía realmente absorbida; un rayo gamma que atraviesa el cuerpo sin interacción no contribuye a la dosis. Como un material denso, como el hueso, tiene una capa de semiatenuación para los rayos gamma más pequeña que un tejido blando, la misma intensidad de radiación da como resultado una mayor dosis en el hueso que en el tejido.

El rad es una unidad física; sin embargo, dosis iguales (en rads) de diferentes tipos de radiación tienen efectos biológicos diferentes. La *eficacia biológica relativa* (EBR) de un tipo particular de radiación es el cociente entre la dosis (en rads) de rayos X o gamma y la dosis

TABLA 22.5 **Eficacia biológica relativa (EBR) de los diferentes tipos de radiación.**

Radiación	EBR
Rayos gamma, Rayos X rayos beta	1,0
Neutrones rápidos y protones	10
Neutrones lentos	4-5
Partículas alfa	10-20

(en rads) de la radiación que produce el mismo efecto biológico. En la tabla 22.5, que da la EBR de varias radiaciones, se ve que los rayos beta tienen la misma eficacia que los rayos gamma y que las partículas alfa son de 10 a 20 veces más eficaces.

La unidad biológica de dosis es el rem *(rad equivalent man)* que se define en función de la EBR por medio de

$$\text{rem} = \text{EBR} \times \text{rad}$$

Por ejemplo, una dosis de 50 rd de partículas alfa equivale a una dosis en unidades biológicas que varía entre 500 y 1000 rem. Así, una dosis de 50 rd de partículas alfa que recibiese el cuerpo sería tan letal como una de 500 rd (=500 rem) de rayos gamma. Por supuesto que, debido al corto alcance de las partículas alfa, la exposición de todo el cuerpo sólo es posible por ingestión de un emisor alfa que se difunde a través de todo el cuerpo.

TABLA 22.6. **Fuentes de radiación.** Dosis media anual recibida por un miembro de la población en general debida a diversas fuentes.

Fuente	Dosis, rem
Rayos cósmicos	0,044
Materiales radiactivos naturales presentes en las rocas	0,058
Médicas	0,073
Polvo radiactivo	0,004
Centrales nucleares	3×10^{-6}
Otras	0,003
Total	0,182

La población en general está expuesta a radiación procedente de una diversidad de fuentes naturales y artificiales. La tabla 22.6 repersenta la dosis anual media procedente de todas las fuentes recibida por un individuo de los Estados Unidos. Obsérvese que la exposición con propósitos médicos (rayos X, terapia del cáncer, etc.) es la mayor fuente de radiación artificial, sobrepasando en mucho la dosis despreciable que procede de los reactores nucleares.

La Agencia de Protección del Medio Ambiente establece 0,17 rem/año como la máxima dosis para todo el cuerpo (exceptuando la radiación natural y la médica) que un miembro de la población en general puede recibir. La tabla 22.6 muestra que las únicas fuentes de radiación cubiertas por este límite son el polvo radiactivo (de pruebas atmosféricas de bombas atómicas) y los reactores nucleares, que contribuyen en conjunto con sólo 0,004 rem/año.

A pesar de que algunos críticos han objetado que el límite fijado por la Agencia de Protección del Medio Ambiente es demasiado elevado, está claro que mientras los reactores nucleares se construyan de acuerdo con la normativa legislada, la dosis real procedente de fuentes que no sean las médicas permanecerá muy por debajo de 0,17 rem/año.

TABLA 22.7. **Efectos de dosis agudas de radiación gamma.**

Dosis, rd	Efecto
0-25	Inobservable.
25-100	Ligeros cambios en la sangre.
100-200	Cambios moderados en la sangre; vómitos en el 5-50 % de los casos dentro de las 3 h; recuperación completa a las pocas semanas (excepto para el sistema productor de la sangre).
200-600	Graves cambios en la sangre; vómitos en el 50-100 % de los casos dentro de las 3 h; pérdida del pelo dentro de las 2 semanas; hemorragias e infección; muerte en el 0-80 % de los casos dentro de los 2 meses.
600-1000	Graves cambios en la sangre; vómitos en el intervalo de 1 h; pérdida del pelo; hemorragia e infección; muerte en el 80-100 % de los casos dentro de los 2 meses.

El máximo peligro de la exposición crónica a niveles de radiación bajos es que puede producirse un aumento del cáncer en la población expuesta y un aumento de los defectos genéticos en la generación siguiente. Sin embargo, todas las evidencias acerca de ello proceden de estudios sobre pocas poblaciones, tales como los japoneses supervivientes a la bomba atómica, que recibieron dosis agudas y elevadas de radiación, y de estudios sobre animales sometidos experimentalmente a dosis elevadas. Extrapolando los resultados de estos estudios, se ha asignado un máximo al riesgo posible debido a bajas dosis. A pesar de que ésta es la aproximación más conveniente para asegurar la protección de la población en general, ha de recordarse que no hay evidencia directa de que la exposición a radiación de un nivel inferior a 1 rem/año produzca realmente efectos dañinos.

El problema de establecer los efectos de bajos niveles de radiación es complicado, debido a la reconocida capacidad del cuerpo para recobrarse de la radiación. Entonces, mientras una sola dosis aguda de 1000 rem es ineluctablemente fatal, los pacientes de cáncer reciben rutinariamente dosis de 100 rem cada día durante más de dos semanas sin efectos patológicos. La tabla 22.7 muestra los efectos de una exposición a diversas dosis de radiación gamma sobre todo el cuerpo.

22.5. MEDICINA NUCLEAR

La medicina nuclear es la aplicación de las técnicas de la física nuclear a la medicina. La mayoría de las aplicaciones llevan consigo el uso de isótopos radiactivos, que han llegado a ser fácilmente asequibles como subproductos de la industria electronuclear. Estos isótopos están teniendo un uso creciente en la investigación biológica y médica y en el tratamiento y diagnóstico de enfermedades.

Investigación

Los isótopos radiactivos se emplean en investigación como *trazadores* para marcar átomos individuales en una molécula. Por ejemplo, el metabolismo del hierro en el cuerpo ha sido estudiado empleando ^{59}Fe radiactivo. La mayor parte del hierro del cuerpo se halla en la hemo-

globina de los glóbulos rojos de la sangre. Suministrando primero a un animal una dieta que contenga ^{59}Fe y midiendo a continuación la radiactividad subsiguiente de los glóbulos rojos del animal, se ha encontrado que en condiciones normales un animal absorbe de la dieta muy poco hierro. O sea que, a diferencia de la mayoría de los elementos del cuerpo, el hierro no está siendo constantemente reemplazado por nuevo hierro procedente de la dieta. Se ha visto que un animal sólo incorpora ^{59}Fe a sus glóbulos rojos cuando ha perdido hierro del cuerpo por pérdida de sangre.

Una vez que el ^{59}Fe se incorpora a un glóbulo rojo, permanece allí a lo largo de toda la vida de la célula. Además, incluso después que la célula es destruida, su hierro no es eliminado del cuerpo sino que se vuelve a usar para formar la hemoglobina de una nueva célula.

La estabilidad del hierro en los glóbulos rojos de la sangre ha conducido a una interesante técnica para la medida del número total de glóbulos rojos en un animal. De un animal que estuvo alimentado con una dieta de ^{59}Fe tras una pérdida de sangre se extrae un número conocido de glóbulos rojos que contienen ^{59}Fe y se inyectan en un animal testigo alimentado con una dieta normal. El número de células radiactivas de una muestra de sangre tomada del animal testigo se determina midiendo la radiactividad de la muestra. El número total de glóbulos rojos que hay en el animal puede calcularse entonces a partir del número de células de la muestra y el número total de células radiactivas inyectadas.

Terapia

En el tratamiento de enfermedades se emplea directamente ^{60}Co radiactivo como fuente de radiación ionizante. El ^{60}Co sufre una desintegración beta y pasa a un estado excitado del ^{60}Ni, el cual decae de forma inmediata a su estado fundamental emitiendo sucesivamente un rayo gamma de 1,17 MeV y otro de 1,33 MeV. Las energías de estos rayos gamma son mucho más altas que las energías de los rayos X producidas por todos los aparatos de rayos X, menos los más grandes, de modo que el ^{60}Co es una fuente cómoda y relativamente económica de radiación muy penetrante. La cantidad necesaria de ^{60}Co (alrededor de 10 g) se guarda en el interior de una pesada caja de plomo colocada por encima de una mesa. Un paciente tendido sobre la mesa es expuesto a la radiación abriendo un pequeño orificio en la caja. La propia habitación está fuertemente aislada del resto del hospital. Como no puede haber personal del hospital en la habitación durante el tratamiento, la operación se controla por medio de un circuito cerrado de televisión.

Ejemplo. ¿Cuál es la dosis recibida por un paciente de 60 kg expuesto durante 30 s a una fuente de 8 g de ^{60}Co? Suponer que un 1 por ciento de los rayos gamma emitidos por la fuente alcanzan al paciente. Según la tabla 22.1, la semivida del ^{60}Co es

$$\tau = 5{,}26 \text{ años} = 1{,}65 \times 10^{8} \text{ s}$$

por lo cual, según la Ec. 22.3, la velocidad de desintegración de 8 g (8/60 mol) de ^{60}Co es

$$R = \frac{(0{,}693)(8/60)(6{,}02 \times 10^{23})}{1{,}65 \times 10^{8}\ \mathrm{s}} = 3{,}4 \times 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Como cada desintegración del ^{60}Co produce dos rayos gamma, hay $6{,}8 \times 10^{14}$ rayos gamma producidos por segundo. Estos rayos gamma se emiten uniformemente en todas direcciones, y sólo alrededor del 1 %, o sea $6{,}8 \times 10^{12}$, cae cada segundo sobre el paciente. En la tabla 22.4 vemos que el valor de semiatenuación de un rayo gamma de 1 MeV en tejido corporal es de unos 10 cm, que es aproximadamente el espesor de delante a atrás del cuerpo. Esto quiere decir que la mitad aproximadamente de los rayos gamma que inciden sobre el paciente le atraviesan sin interacción y que la otra mitad son absorbidos por el cuerpo. Así, alrededor de $3{,}4 \times 10^{12}$ rayos gamma por segundo son absorbidos por el cuerpo.

La energía media de un rayo gamma del ^{60}Co es 1,25 meV, de modo que la energía absorbida por kilo y por segundo es

$$\frac{(3{,}4 \times 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1})(1{,}25\ \mathrm{MeV})}{60\ \mathrm{kg}} = 7{,}08 \times 10^{12}\ \mathrm{MeV/kg \cdot s}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-2}\ \mathrm{J/kg \cdot s} = 1{,}1\ \mathrm{rad/s}$$

donde el rad se define como 10^{-2} J/kg de radiación absorbida (apartado 22.4). Así, una exposición de 30 s al ^{60}Co produce una dosis de 33 rd sobre todo el cuerpo.

También se usan en radioterapia productos farmacéuticos radiactivos porque algunos elementos, por ejemplo el yodo, son absorbidos preferentemente por ciertos órganos del cuerpo, como el tiroides. Así, algunas enfermedades del tiroides son tratadas administrando fármacos que contienen ^{131}I radiactivo. Como el yodo se concentra en el tiroides, los rayos beta que acompañan la desintegración del ^{131}I pasan directamente al órgano enfermo sin que el tejido sano absorba demasiada radiación.

Diagnóstico

Las radiografías convencionales del cuerpo sólo son capaces de distinguir órganos de diferente densidad. En particular, un hueso se ve con claridad en una radiografía en contraste con el blando tejido que le rodea porque pasa menos radiación a través del hueso que a través del tejido. Sin embargo, las radiografías son incapaces de detectar una masa anormal de tejido blando, tal como un tumor, enclavada en tejido normal. Por esta razón se han desarrollado productos farmacéuticos radiactivos que son absorbidos preferentemente por el tumor. La radiación procedente de un enfermo al que se ha inyectado un radiofármaco para determinar si existe un tumor, se detecta por medio de dispositivos especiales.

El núclido radiactivo empleado corrientemente en estos estudios es el $^{99}_{43}$Tc^{m} (el superíndice *m* indica estado *metastable*). Este isótopo del tecnecio se obtiene del ^{99}Mo, que por desintegración beta pasa a un estado excitado del ^{99}Tc en lugar de al estado fundamental. Esto es frecuente en muchas desintegraciones. Sin embargo, a diferencia de

la mayoría de los estados excitados, el estado excitado del ^{99}Tc es semiestable (metastable). La semivida para la desintegración del $^{99}Tc^m$ al estado fundamental es de 6,0 h, en lugar de 10^{-8} s que es la semivida normal en una desintegración de este tipo. Por lo tanto, el $^{99}Tc^m$ vive lo suficiente para ser empleado en medicina. Además, como decae a su estado fundamental emitiendo un rayo gamma, no intervienen por tanto partículas cargadas. (El estado fundamental pasa por desintegración beta a ^{99}Ru con una semivida de 212 000 a, lo que significa que el tecnecio se elimina del cuerpo mucho antes de que se produzcan rayos beta.) La ausencia de partículas cargadas reduce al mínimo el peligro de radiación por el uso de $^{99}Tc^m$, porque muchos de los rayos gamma salen del cuerpo antes de interaccionar.

OBSERVACIÓN. El tecnecio ($Z = 43$) y el promecio ($Z = 61$) son los únicos elementos con $Z < 84$ que no tienen isótopos estables. Ninguno de los dos elementos se dan en la naturaleza; lo mismo que el plutonio, ambos deben producirse artificialmente a partir de reacciones nucleares.

El $^{99}Tc^m$ se obtiene en forma de pertecnetato ($^{99}Tc^mO_4^-$) lavando con solución salina una sal de $^{99}MoO_4^-$. El $^{99}MoO_4^-$ se desintegra continuamente en $^{99}Tc^mO_4^-$, el cual permanece mezclado con el permolibdenato hasta que se disuelve en la solución. La sal de molibdeno viene a ser el generador, puesto que puede guardarse durante varios días y lavarse con solución salina siempre que se necesite $^{99}Tc^mO_4^-$. Dado que la semivida del $^{99}Tc^m$ es de sólo 6 h, el pertecnetato debe ser inyectado inmediatamente en el paciente y examinado éste en el intervalo de unas pocas horas que sigue a la inyección.

La barrera cerebro-sangre, que normalmente impide que los productos químicos extraños se difundan en el cerebro, no existe en un tumor cerebral, de aquí que el pertecnetato se difunda en un tumor cerebral pero no en el tejido colindante. En consecuencia, el tumor cerebral emite más rayos gamma que el tejido que le rodea, haciendo posible la detección del tumor. Sin embargo, debido a que los rayos gamma no pueden ser concentrados en un foco, se necesitan técnicas especiales para conseguir una imagen significativa.

Un *dispositivo de exploración rectilínea* consiste en un contador de centelleo provisto de un colimador de plomo que cubre la parte frontal del cristal (Fig. 22.10). El colimador está perforado por varios orificios inclinados de tal manera que sólo los rayos gamma procedentes de un pequeño volumen pueden atravesarlo. Así, el contador sólo «ve» este pequeño volumen.* Pasando un contador punto por punto sobre la cabeza se obtiene una imagen completa de la cabeza. El número de cuentas registradas por el contador en cada punto mide la cantidad de $^{99}Tc^m$ en ese punto.

Disponiendo de una pequeña luz sincronizada con el contador que se desplace adelante y atrás sobre una placa fotográfica, se obtiene indirectamente una imagen de la cabeza. En cada punto se ajusta la intensidad de la luz de manera que sea proporcional al número de cuentas registradas en el punto correspondiente de la cabeza del paciente, obteniéndose así un registro visual de la radiactividad detectada por el contador. Un tumor aparece como una mancha luminosa sobre la placa (véase la Fig. 22.13). Explorando desde diferentes ángulos, se puede localizar el tumor en tres dimensiones.

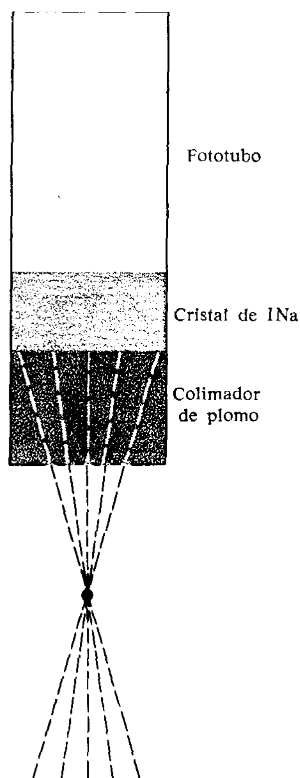


FIGURA 22.10
Diagrama esquemático del detector de radiación de un dispositivo de exploración rectilínea.

* Cada orificio detecta rayos gamma procedentes de cualquier punto situado a lo largo de la línea de visión del orificio. Sin embargo, como sólo pueden pasar por todos los orificios los rayos gamma procedentes del punto de intersección de todas las líneas de visión, se detectarán más rayos gammas procedentes de este punto que de cualquier otro.

Dado que el dispositivo de exploración rectilínea construye una imagen punto por punto, necesita unos 15 min para obtener una sola imagen. Se pueden obtener resultados más rápidos mediante una cámara Anger de centelleo (Fig. 22.11). Este aparato consiste en un gran cristal de centelleo con 19 fotomultiplicadores montados detrás de él (Figura 22.12). La parte frontal del cristal está cubierta por un gran colimador de plomo que contiene miles de orificios paralelos de colimación. El aparato recibe el nombre de cámara porque recibe los rayos gamma simultáneamente de todos los lugares del campo de visión. Cada orificio de colimación ve un punto diferente del campo porque un rayo gamma procedente de un determinado punto sólo puede pasar por el orificio que es perpendicular a él.

La luz emitida cuando interacciona un rayo gamma en el cristal es detectada simultáneamente por cada uno de los 19 fotomultiplicadores, pero con una intensidad que depende de la distancia del rayo gamma al fotomultiplicador. Mediante un análisis de las intensidades relativas detectadas por los fotomultiplicadores se obtiene la posición del



FIGURA 22.11
Cámara Anger en funcionamiento.
(Nuclear-Chicago.)

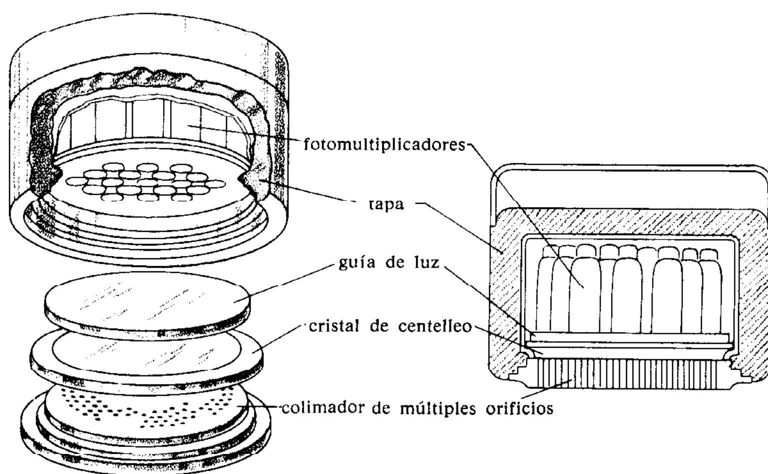


FIGURA 22.12
Disposición de los fotomultiplicadores en una cámara Anger.

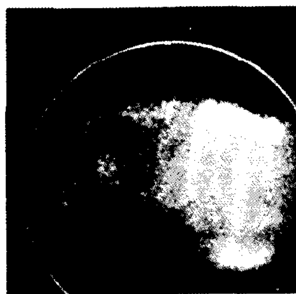


FIGURA 22.13
Exploración cerebral hecha con una cámara Anger. La mancha blanca indica un tumor. *(Nuclear-Chicago.)*

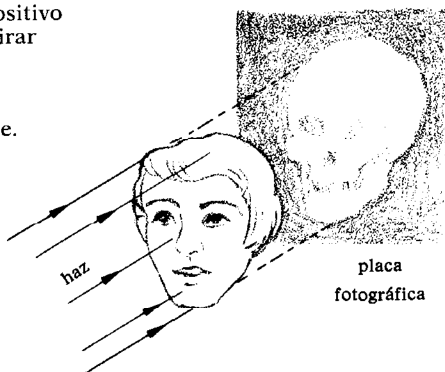
rayo gamma en dos dimensiones. El análisis se lleva a cabo electrónicamente en menos de un microsegundo y en un osciloscopio se pone de manifiesto una mancha que corresponde a la posición de cada rayo gamma. Una cámara fotográfica montada delante de la pantalla del osciloscopio registra cada mancha cuando aparece, hasta que se forma sobre la película una imagen completa. La Fig. 22.13 es una fotografía típica de la imagen osciloscópica de una exploración cerebral tomada con una cámara Anger. Con una de estas cámaras se puede lograr una imagen satisfactoria en sólo unos pocos segundos.

Algunas de las limitaciones de la exploración con rayos X se han superado recientemente con el desarrollo de la *tomografía axial computadorizada* (TAC). Una imagen convencional de rayos X, por ser la proyección de un objeto tridimensional sobre un plano, contiene imágenes superpuestas de todas las estructuras del interior del objeto (Fig. 22.14*a*). El dispositivo de exploración TAC, en cambio, produce una vista transversal de una sección de un objeto tridimensional, sin superposición de imágenes.

El dispositivo de exploración TAC consiste en un fino haz de rayos X que pasa a través del cuerpo del paciente formando un ángulo recto respecto a un eje de rotación (Fig. 22.14*b*). La fracción del haz que no es absorbida por el cuerpo se detecta con un dispositivo electrónico situado al otro lado del cuerpo. El haz y el detector se van girando alrededor del eje grado a grado, produciendo así 180 imágenes. El grado de absorción de estas imágenes se envía a un computador que reconstruye una imagen del plano barrido por el haz giratorio.

El computador divide el plano de exploración en una serie de regiones discretas, como se muestra en la Fig. 22.15. Cada exploración implica que el haz de rayos X pase a través de alguna de estas regiones, y la intensidad de la absorción depende de la densidad de estas regiones. El computador reconstruye estas densidades a partir de las 180 imágenes de absorción, produciendo un perfil de densidades del plano (Fig. 22.16).

El dispositivo de exploración TAC fue introducido comercialmente por primera vez en 1972 y desde entonces se ha proclamado como una de las técnicas de diagnóstico más prometedoras de los últimos años. Sin embargo, se necesitarán varios años más de experiencia clínica para que pueda desarrollarse al máximo todo su potencial.



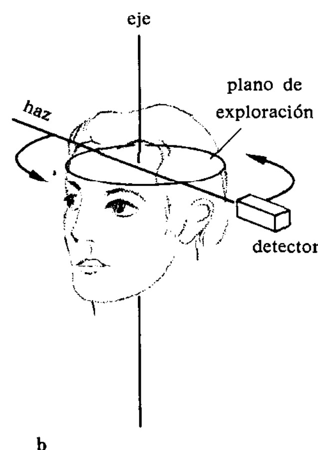
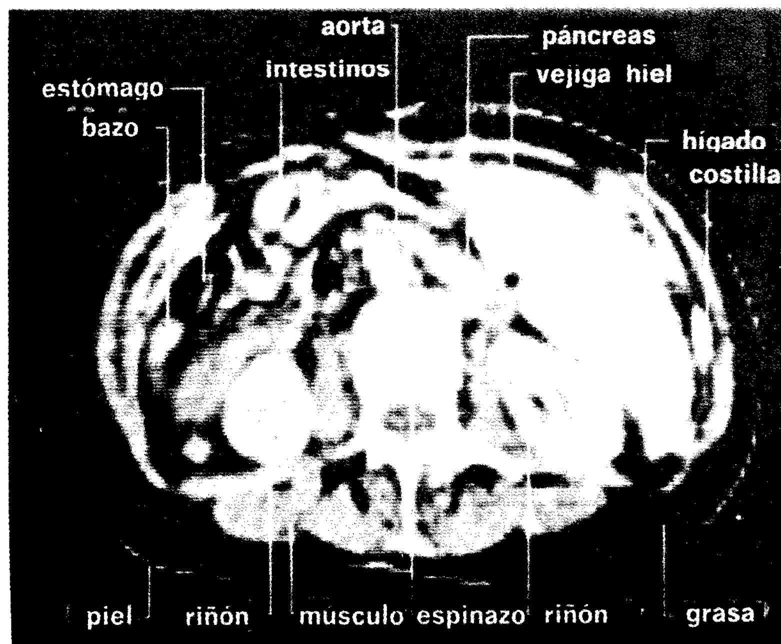


FIGURA 22.14
(*a*) La imagen convencional de rayos X es una proyección en el plano de un objeto tridimensional. (*b*) Un dispositivo de exploración TAC hace girar un estrecho haz de rayos X alrededor de un eje, de modo que el haz barre un plano perpendicular al eje.



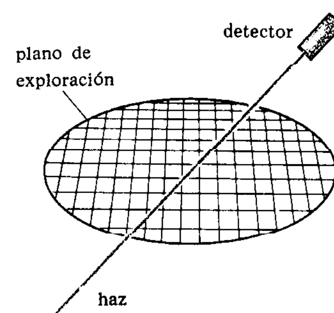


FIGURA 22.15
El plano de exploración está dividido en muchas regiones pequeñas, varias de las cuales son atravesadas por el haz de rayos X en cada posición.

FIGURA 22.16
Exploración TAC del abdomen.

Otra nueva técnica de obtención de imágenes, aún en la fase experimental, utiliza las propiedades de la aniquilación de positrones. Un positrón es un antieléctrón. Cada partícula elemental tiene una antipartícula. El antiprotón y el antineutrón han sido producidos en aceleradores de partículas de alta energía, pero el antielectrón, o positrón, es emitido de modo natural por ciertos núclidos radiactivos. Una partícula y su antipartícula tienen la misma masa, pero carga opuesta. Además, una partícula y su antipartícula se aniquilan entre sí cuando entran en colisión. Cuando un positrón y un electrón se aniquilan, sus masas se convierten en dos rayos gamma (Ec. 22.7). A partir de la Ec. 22.2 y la tabla 22.1 se obtiene que la destrucción de un electrón libera la energía

$$E = 931{,}5 \text{ MeV/u} \times 0{,}0005486 \text{ u}$$
$$= 0{,}511 \text{ MeV}$$

Como en el proceso de aniquilación se destruyen dos masas electrónicas, se libera un total de $2 \times 0{,}511$ MeV. Esta energía aparece en forma de dos rayos gamma que se desplazan en direcciones opuestas a partir del punto de aniquilación (Fig. 22.17).

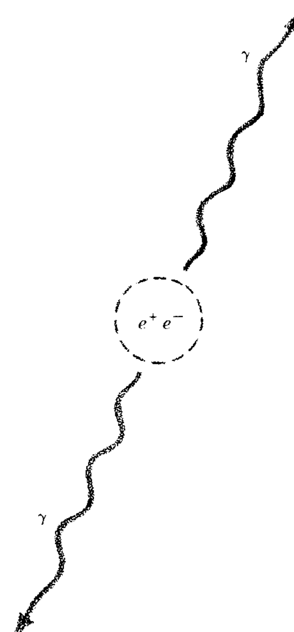


FIGURA 22.17
Aniquilación electrón-positrón en dos rayos gamma.

Se ha proyectado una cámara de positrones para detectar esta radiación de aniquilación y para emplear el que los dos gamma se producen en direcciones opuestas. Una cámara experimental consta de dos series de contadores de centelleo, compuesta cada una de 127 contadores (Fig. 22.18). El paciente, al que se ha administrado un isótopo radiactivo emisor de positrones, se coloca entre las dos series. La tabla 22.3 muestra que los electrones de baja energía recorren sólo una fracción de milímetro en tejido corporal. Un positrón se comporta de manera análoga, de modo que se detiene muy cerca del núcleo emi-

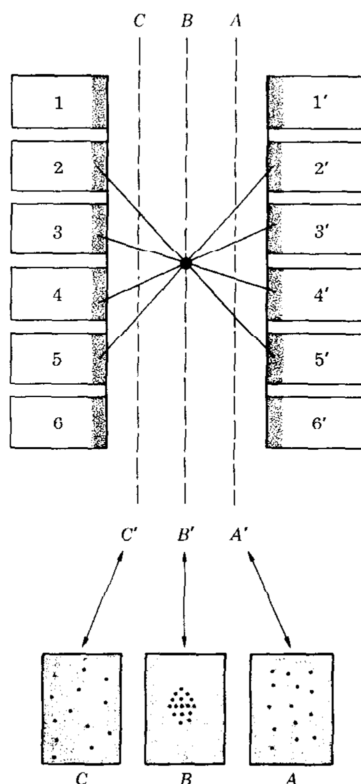


FIGURA 22.18
Diagrama esquemático de una cámara electrón-positrón. Las imágenes de la parte baja son las intersecciones de las rectas con varios planos imaginarios. La imagen más neta se obtiene cuando un plano pasa por la posición de la fuente radiactiva.

sor. A continuación se aniquila con un electrón emitiendo dos rayos gamma. La detección simultánea de un gamma de 0,511 MeV por parte de un contador de cada serie significa que los dos rayos gamma proceden de la misma aniquilación.

Por ejemplo, si los contadores 2 y 5' de la Fig. 22.18 detectan un rayo gamma en el mismo instante, la aniquilación debe haber tenido lugar en un punto a lo largo de la recta que une estos contadores. De este modo, la radiación de aniquilación detectada por las dos series determina un gran número de líneas rectas. Esta información se almacena en un computador. Imaginemos ahora un plano *AA'* paralelo a los contadores y situado en un punto intermedio entre las dos series. La intersección de las rectas y el plano es una colección bidimensional de puntos que se puede determinar mediante el computador y que se puede mostrar en un osciloscopio. Cuando se varía la posición del plano, cambia la colección de puntos. Un operador ajusta la posición del plano hasta que sobre la pantalla del oscilador los puntos forman la imagen más neta. De este modo se obtiene una imagen de la fuente y se determina la distancia perpendicular de la fuente a los contadores.

La cámara de positrones es capaz de conseguir una imagen satisfactoria en una fracción de segundo, haciendo posible la representación dinámica. La Fig. 22.19 muestra tres imágenes tomadas a intervalos de 0,1 s de un sujeto normal inhalando aire que contiene una pequeña cantidad de ^{13}N. La primera fotografía muestra el aire en el momento

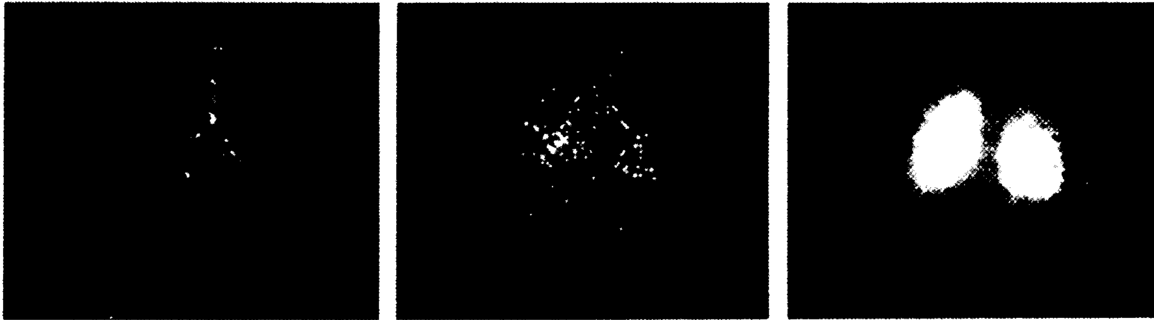


FIGURA 22.19
Imágenes pulmonares tomadas con una cámara electrón-positrón. Estas fotografías tomadas a intervalos de 0,1-s muestran el aire en el momento de penetrar en las vías pulmonares. *(Physics Research Laboratory, Massachusetts General Hospital.)*

de penetrar en los bronquios primarios y secundarios; la segunda fotografía muestra cómo el aire invade los bronquios más pequeños y la tercera los pulmones completamente llenos. La cámara de positrones ofrece interesantes posibilidades para detectar obstrucciones y otras patologías pulmonares.

PROBLEMAS

OBSERVACIÓN. Para los datos relacionados con los núclidos que se mencionan en estos problemas, ver la tabla 22.1.

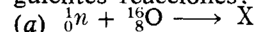
1. ¿Cuántos neutrones hay en un núcleo de ^{197}Au?
   Resp. 118.
2. ¿Cuál es el símbolo del núclido que tiene 13 protones y 15 neutrones?
3. ¿Cuál es la masa en kilogramos de un núcleo de ^{56}Fe?
   Resp. $9,3 \times 10^{-26}$ kg.
4. ¿Cuáles de los siguientes núclidos no identificados son isótopos entre sí? $^{175}_{71}X$, $^{71}_{32}X$, $^{175}_{74}X$, $^{167}_{71}X$, $^{71}_{30}X$, $^{180}_{74}X$
5. El radio de un núcleo de número másico A es $r = 1,3 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m. (*a*) ¿Cuál es el radio de un núcleo de ^{125}Te? (*b*) ¿Cuál es el volumen del núcleo? (*c*) ¿Cuál es la densidad del núcleo?
   Resp. (*a*) $6,5 \times 10^{-5}$ m; (*b*) $1,15 \times 10^{-42}$ m^3; (*c*) $1,8 \times 10^{17}$ kg/m^3.
6. Demostrar que la densidad nuclear es la misma para todos los núcleos cualquiera que sea A (véase Prob. 5).
7. En una estrella de neutrones, toda la materia está condensada a la densidad de un núcleo, es decir, la densidad de la materia en una estrella de neutrones es $1,8 \times 10^{17}$ kg/m^3. ¿Cuál es el radio de una estrella de neutrones que tenga la misma masa que el Sol?
   Resp. 13,8 km.
8. ¿Cuál es el defecto de masa y la energía de enlace del ^{2}H (deuterio)?
9. ¿Cuál es la energía de enlace por partícula del ^{88}Sr?
   Resp. 8,73 MeV.
10. Demostrar que la desintegración $^{16}O \rightarrow {}^{12}C + {}^4He$ es imposible.
    (*Sugerencia:* Considérense las masas de los núcleos que intervienen.)
11. (*a*) ¿Cuántas desintegraciones por segundo hay en 1 mol de ^{32}P? (*b*) Un *curie*(Ci) es una

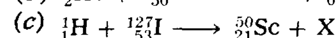
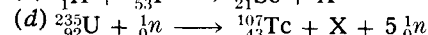
cantidad de material radiactivo que produce $3{,}70 \times 10^{10}$ desintegraciones por segundo. ¿Cuántos *curies* hay en 1 g de ^{32}P?
Resp. (*a*) $3{,}38 \times 10^{17}$ s^{-1}; $2{,}85 \times 10^{5}$ curies.

OBSERVACIÓN. Un curie de material radiactivo es muy «activo» y exige procedimientos especiales de manejo. Se puede manejar un milicurie utilizando precauciones rutinarias.

12. (*a*) ¿Cuántas desintegraciones por segundo hay en 1 kg de ^{238}U? (*b*) ¿Cuántos curies hay en 1 kg de ^{238}U (ver Prob. 11)?
13. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de desintegración del ^{14}C en 1 g de carbono sacado de un árbol vivo? (La velocidad de desintegración por gramo recibe el nombre de *actividad específica.*) (*b*) La velocidad de desintegración en 16 g de carbono tomados de una muestra de madera vieja es 30 min^{-1}. ¿Cuál es la edad de la muestra?
Resp. (*a*) 15 min^{-1}; (*b*) $1{,}7 \times 10^{4}$ a.
14. ¿Cuántos curies hay en 1 g de ^{90}Sr?
*15. La velocidad de desintegración de una muestra radiactiva resultó ser 250 s^{-1} en el instante $t = 0$ y 175 s^{-1} en el instante $t = 2{,}0$ h. ¿Cuál es la semivida del núclido de la muestra? (*Sugerencia:* Utilizar la Ec. 22.4.)
Resp. 3,9 h.
*16. Una muestra de ^{32}P tiene una actividad de 1,7 Ci. ¿Cuánto tardará su actividad en reducirse a 1×10^{-2} Ci? (*Sugerencia:* Utilizar la tabla 22.1 y la Ec. 22.4.)
17. (*a*) ¿Qué núclido sufre una desintegración alfa para dar ^{238}U? (*a*) ¿A qué núclido da lugar el ^{135}Xe por desintegración beta?
Resp. (*a*) ^{242}Pu; (*b*) ^{135}Cs.
18. ¿Cuáles de los núclidos siguientes son emisores e^- y cuáles son emisores e^+: (*a*) $^{50}_{20}$Ca, (*b*) $^{88}_{40}$Zr, (*c*) $^{151}_{60}$Nd, (*d*) $^{189}_{80}$Hg?
19. Demostrar que un neutrón libre puede sufrir una desintegración beta dando un electrón pero que un protón libre no puede dar por desintegración beta un neutrón y un positrón.

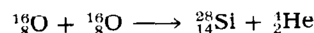
OBSERVACIÓN. Un neutrón libre sufre una desintegración beta con una semivida de 10,8 min, mientras que un protón libre es estable. Sin embargo, un protón dentro de un núcleo rico en protones puede sufrir una desintegración beta.

20. La *captura electrónica* es una transformación nuclear en la que un protón de un núcleo se combina con un electrón orbital para formar un neutrón. Por ejemplo, una reacción típica de captura electrónica es $^{168}_{69}\text{Tm} + e^- \longrightarrow {}^{168}_{68}\text{Er}$. Los núcleos que sufren captura electrónica ¿están por encima o por debajo de la banda de núcleos estables de la Fig. 22.3?
21. Determinar el número atómico y el número másico del núclido desconocido en las siguientes reacciones:

(*a*) $^{1}_{0}n + {}^{16}_{8}\text{O} \longrightarrow \text{X}$

(*b*) $^{4}_{2}\text{He} + {}^{118}_{50}\text{Sn} \longrightarrow \text{X} + {}^{1}_{0}n$

(*c*) $^{1}_{1}\text{H} + {}^{127}_{53}\text{I} \longrightarrow {}^{50}_{21}\text{Sc} + \text{X}$

(*d*) $^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{107}_{43}\text{Tc} + \text{X} + 5\,{}^{1}_{0}n$
Resp. (*a*) ^{17}O; (*b*) ^{121}Te; (*c*) ^{78}As; (*d*) ^{124}In

OBSERVACIÓN. Para los cuatro problemas siguientes utilizar la tabla de isótopos del «Handbook of Chemistry and Physics».

22. Hacer una lista de los isótopos estables del estaño.
23. ¿Por qué se utilizan pocas veces los isótopos radiactivos del oxígeno y nitrógeno como trazadores en la investigación biológica?
24. Núcleos como el ^{95}Sr y el ^{139}Xe, que son fragmentos directos de una fisión, sufren una serie de desintegraciones beta hasta que se forman núcleos estables. (*a*) Escribir la serie de desintegraciones que sufren el ^{95}Sr y el ^{139}Xe. (*b*) ¿Cuál es el núclido estable formado de cada fragmento? (*c*) ¿Cuál es la semivida aproximada de cada serie?
25. Dibujar un gráfico semejante al de la figura 22.5 empezando por el ^{232}Th.
26. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de la masa del ^{235}U se convierte en energía por fisión?
27. La persona media en los Estados Unidos consume unos $2{,}5 \times 10^{10}$ J de energía por año. ¿Cuánto ^{235}U se necesita para producir esta energía?
Resp. 0,29 g.
28. Calcular las masas del ^{3}He y ^{3}H a partir de la Ec. 22.8 y de las masas que aparecen en la tabla 22.1.
29. Calcular la energía liberada en la reacción de «combustión del oxígeno»



$$^{16}_{8}\text{O} + {}^{16}_{8}\text{O} \longrightarrow {}^{28}_{14}\text{Si} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

La masa del ^{28}Si es 27,97693 u.
Resp. 9,58 MeV.

OBSERVACIÓN. Aunque la reacción del Prob. 29 es exotérmica, sólo puede tener lugar a temperatu

ras de muchos miles de millones de grados debido a la fuerte repulsión eléctrica entre los dos núcleos de oxígeno. Si estas altas temperaturas se produjesen en una explosión atómica, todo el oxígeno de la atmósfera se convertiría en silicio. Por suerte, la temperatura en una explosión atómica es sólo de unos pocos millones de grados.

30. En un fotomultiplicador con 10 electrodos, ¿cuántos electrones alcanzan el último electrodo por cada electrón incidente sobre el segundo electrodo si el factor de multiplicación es 10?
31. ¿Qué espesor debe tener, aproximadamente, una pared de plomo para detener el 97 % de los rayos gamma de 1 MeV que inciden sobre ella?
Resp. 4,45 cm.
32. La intensidad de un haz de rayos gamma queda reducida al 25 % de su valor inicial después de pasar a través de 0,84 cm de plomo. ¿Cuál es la energía de los rayos gamma?
33. Para hacer una radiografía de tórax se utiliza un haz de rayos X de 50 keV (0,050 MeV). ¿Cuál es la razón de la dosis recibida por el tórax a la recibida por la piel de la espalda? (Suponemos que el tórax tiene un espesor de 10 cm.)
Resp. 8.
34. En los diagnósticos, los radiofármacos se dan normalmente en cantidades de milicuries. ¿Cuál es la masa de 50 milicuries de $^{99}Tc^m$?
35. A un paciente se le inyectan 20 milicuries de $^{99}Tc^m$ para una exploración cerebral. La energía de los rayos gamma emitidos cuando este núclido decae hasta su estado fundamental es 0,143 MeV. Suponiendo que la mitad de los rayos gamma escapan del cuerpo antes de interaccionar, ¿cuál es la dosis de radiación recibida por un paciente de 60 kg? (*Sugerencia:* Debido a su corta semivida, todo el $^{99}Tc^m$ se desintegra mientras permanece en el cuerpo.)
Resp. 0,44 rd.
36. Si la intensidad de un haz de rayos X de 50 keV es 300 W/m², calcular de manera aproximada la dosis recibida por un paciente durante una exposición de 0,25 s. (*Sugerencia:* Suponer que el cuerpo es una plancha de 10 cm de espesor y que tiene la densidad del agua.)

BIBLIOGRAFÍA

ADVISORY COMMITTEE ON THE BIOLOGICAL EFFECTS OF IONIZING RADIATIONS: «The Effects on Populations of Exposure to Low Levels of Ionizing Radiation», National Academy of Sciences-National Research Council, Washington, D.C., 1972. Popularmente conocido como el Informe BEIR, este documento sintetiza todos los estudios relevantes de los efectos de una larga exposición a bajos niveles de radiación ionizante y estima el riesgo de la población frente a los aumentos del nivel normal de exposición.

ARENA, Víctor: «Ionizing Radiation and Life», The C. V Mosby Company, St. Louis, 1971. Libro de texto sobre los efectos de la radiación en biología, que empieza por los principios básicos de física nuclear y describe a continuación los efectos de la radiación sobre las moléculas, células y organismos vivientes.

BEISER, Arthur: «Concepts of Modern Physics», McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963. Tratado simple pero cuantitativo del núcleo y de las partículas elementales.

GLASSTONE, Samuel: «Sourcebook on Atomic Energy», 3.ª ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1968. El tratado más simple, claro y completo acerca de los principios básicos de la física nuclear y de las aplicaciones de la física nuclear a la ciencia, la tecnología y la medicina.

GORDON, Richard, GABOR T. Herman y STEVEN A. Johnson: «Image reconstruction from Projection», *Scientific American,* **233**:56 (octubre 1975). Se explica con claridad la técnica de la tomografía axial computadorizada.

JUNGK, Robert: «Brighter than a Thousand Suns», Harcourt, Brace and Company, Inc., Nueva York, 1958. Historia popular del desarrollo de la bomba atómica que incluye la del esfuerzo que hizo Alemania en la bomba atómica.